



Proposition de corrigé

PSI - Épreuve de Physique ULM 2025

par

ARTHUR HOTTIER

Soumis pour aider à satisfaire la curiosité de ceux qui souhaiteraient explorer le sujet au-delà de ce qu'ils ont pu traiter pendant l'épreuve ou comme confirmation des résultats obtenus.

Informations de contact

Courriel : arthur.hottier@telecom-paris.fr

Téléphone : +33 6 42 49 65 92

17 avril 2025

© 2025 Arthur Hottier. Tous droits réservés.

Résumé

Sorti du lycée du Parc, où j'ai suivi les classes préparatoires MPSI puis PSI, je suis actuellement étudiant à Télécom Paris. Passionné de physique, je replonge chaque année au cœur du voyage scientifique proposé par les sujets du concours ULM.

Ce document constitue une proposition détaillée de corrigé pour l'épreuve de physique du concours ULM 2025. Vous y trouverez, pour chaque question, une solution commentée dans un style que j'espère rigoureux, pédagogique, conforme au programme et surtout exact. Si des erreurs se sont glissées dans ce corrigé, que ce soit de raisonnement ou d'application numérique, n'hésitez pas à me contacter : je serai très heureux de les corriger.

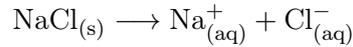
Table des matières

1	Génération d'énergie électrique à partir d'énergie osmotique	2
2	Récupération d'énergie à l'aide d'une membrane chargée électriquement et d'électrodes	5
2.1	Propriétés de l'eau salée dans un canal	5
2.2	Écoulement diffusio-osmotique	9
2.3	Courant ionique diffusio-osmotique	13
3	Intégration du dispositif	15
3.1	Caractérisation de la résistance interne d'un canal	15
3.2	Circuit électrique équivalent	16
3.3	Onduleur	18

1 Génération d'énergie électrique à partir d'énergie osmotique

Question 1.

Dans la solution A, il y a de l'eau pure, et du sel NaCl. Le sel se dissout totalement en solution selon :



Si on note n_{Na} , n_{Cl} et n_w les nombres de moles respectifs de Na^+ , Cl^- et d'eau on peut définir leur fractions molaires respectives :

$$x_{\text{Na}} = \frac{n_{\text{Na}}}{n_{\text{Na}} + n_{\text{Cl}} + n_w}, \quad x_{\text{Cl}} = \frac{n_{\text{Cl}}}{n_{\text{Na}} + n_{\text{Cl}} + n_w}, \quad x_w = \frac{n_w}{n_{\text{Na}} + n_{\text{Cl}} + n_w}$$

Or par stoechiométrie $n_{\text{Na}} = n_{\text{Cl}}$ ce qui donne bien :

$$\boxed{x_{\text{Na}} = x_{\text{Cl}}}$$

Considérons ensuite un volume $V = 1\text{L}$ de solution A, et notons n_s la quantité de matière de sel de sorte que les fractions molaires se réécrivent :

$$x = \frac{n_s}{n_s + n_w}, \quad x_w = \frac{n_w}{n_s + n_w},$$

Or connaissant $M_{\text{H}_2\text{O}}$, M_{NaCl} les masses molaire de l'eau et du sel, c_s^m la concentration massique en sel on a :

$$n_w = \frac{m_w}{M_{\text{H}_2\text{O}}}, \quad n_s = \frac{c_s^m}{M_{\text{NaCl}}} = \frac{c_s^m}{M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}}, \quad m_w : \text{masse d'eau dans un litre de solution A}$$

Les applications numériques se font avec les données fournies et nos connaissances ($M_{\text{H}_2\text{O}}$) :

$$\boxed{x \approx 2 \times 10^{-2}}$$

La solution A est constituée à 98% d'eau pure et à 2% de sel, cela correspond environ à la proportion de sel dans l'eau de mer.

Question 2.

Le potentiel chimique de l'eau en présence d'un soluté de fraction molaire x dans l'hypothèse d'un mélange idéal s'écrit :

$$\boxed{\mu(P, T, x) = \mu^*(P, T) + RT \ln x}$$

Les nombres de moles d'eau et de sel dans le volume V_A sont respectivement

$$n_w^A = \frac{V_A}{v_m}(1 - x), \quad n_s^A = \frac{V_A}{v_m}x$$

Dès lors

$$\boxed{G_A = n_w^A \mu^* + n_s^A \mu_s = \frac{V_A}{v_m} \left[(1 - x)\mu^* + x(\Psi(P, T) + RT \ln x) \right]}$$

et, pour la solution B (eau pure, $x = 0$),

$$\boxed{G_B = \frac{V_B}{v_m} \mu^*}$$

Question 3.

Après mélange à volume V_M des deux solutions A et B :

$$n_w^M = \frac{V_M}{v_m}(1 - x_M), \quad n_s^M = \frac{V_M}{v_m}x_M,$$

Ce qui donne :

$$G_M = \frac{V_M}{v_m} \left[(1 - x_M)\mu^* + x_M(\Psi(P, T) + RT \ln x_M) \right]$$

Question 4.

La conservation du nombre de moles de sel impose :

$$n_s^M = n_s^A + n_s^B = \frac{V_A}{v_m}x$$

Donc :

$$x_M = \frac{n_s^M}{(n_w^M + n_s^M)} = \frac{(V_A/v_m)x}{(V_M/v_m)} = \frac{V_A}{V_A + V_B}x$$

En posant $\phi_A = \frac{V_A}{V_A + V_B}$, on obtient alors :

$$x_M = \phi_A x$$

La variation d'enthalpie lors du passage à la solution mélangée s'écrit :

$$\Delta G = G_M - (G_A + G_B)$$

En substituant alors les expressions obtenues dans les questions précédentes, en remplaçant $V_M x_M = V_A x$ et $x_M = \phi_A x$ et après simplification des termes en μ^* et Ψ il reste :

$$\Delta G = \frac{RT}{v_m} \left(V_A x \ln(\phi_A x) - V_A x \ln(x) \right)$$

Et finalement :

$$\Delta G = \frac{RT}{v_m} V_A \ln(\phi_A) x$$

Question 5.

Pour $x \ll 1$, l'expression précédente est déjà linéaire en x et pour cause, elle a déjà été simplifiée.

Question 6.

Pour un gaz parfait de n mol à T passant de V_A à V_M de manière isotherme le cours donne :

$$\Delta G_{\text{gaz}} = n RT \ln \left(\frac{V_A}{V_M} \right)$$

Si l'on prend $n = \frac{xV_A}{v_m}$, on retrouve comme $V_M = V_A + V_B$:

$$\Delta G_{\text{gaz}} = \Delta G$$

Concrètement, l'ajout de V_B à V_A pour former V_M produit exactement la même énergie que la détente d'un gaz de V_A à V_B , ce qui peut avoir des applications pratiques si le milieu impose des contraintes sur la technique utilisée (étanchéité, etc.) ?

Question 7.

Le travail maximal exploitable est :

$$W_{\max} = \int_{V_a}^{V_m} P \, dV = \int_{V_a}^{V_m} \frac{nRT}{V} \, dV = nRT \ln \frac{V_m}{V_a} = -\Delta G_{\text{gaz}}$$

C'est à dire :

$$W_{\max} = -\Delta G$$

L'application numérique donne alors :

$$W_{\max} \approx 0,24 \text{ kWh}$$

Question 8.

Le temps d'éclairage d'une ampoule de puissance P exprimé à partir de W_{\max} vaut :

$$t = \frac{W_{\max}}{P}$$

L'application numérique donne :

$$t \approx 27 \text{ h}$$

Question 9.

On considère un débit Q d'eau douce (et d'eau salé) et une énergie disponible par mètre cube de $w_{\text{unit}} = \frac{W_{\max}}{V_A}$ de sorte que la puissance totale soit :

$$P = Q \times w_{\text{unit}} = Q \times \frac{W_{\max}}{V_A}$$

Ce qui donne en faisant l'application numérique :

$$P \approx 180 \text{ GW}$$

Si l'on prend la puissance d'un réacteur nucléaire de $\mathcal{P}_{\text{nucl}} = 0,9 \text{ GW}$, alors

$$\frac{P}{\mathcal{P}_{\text{nucl}}} = \frac{180 \text{ GW}}{0,9 \text{ GW}} \approx 200.$$

Ce dispositif osmotique génère une puissance 200 fois supérieure à celle d'un réacteur nucléaire.

Question 10.

Pour V_B fixé, on cherche à maximiser le travail exploitable, c'est-à-dire V_A tel que :

$$\frac{dW_{\max}(V_A)}{dV_A} = 0$$

Comme :

$$W_{\max}(V_A) = -\Delta G(V_A) = -\frac{RT}{v_m} V_A \ln(\phi_A) \quad x = \frac{RT}{v_m} V_A \ln\left(\frac{V_M}{V_A}\right) \quad x$$

Mais V_M est constant donc en posant : $u = \frac{V_A}{V_M}$:

$$u \mapsto W_{\max}(u) \text{ se comporte comme } u \mapsto -u \ln(u)$$

Or, $x \mapsto -x \ln(x)$ est maximale en $x = e^{-1}$ et on en déduit :

$$\frac{V_A}{V_M} = \frac{V_A}{V_A + V_B} = e^{-1} \implies V_A = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} V_B$$

Et l'application numérique donne :

$$V_A \approx 0,56 V_B$$

2 Récupération d'énergie à l'aide d'une membrane chargée électriquement et d'électrodes

2.1 Propriétés de l'eau salée dans un canal

Question 11.

Ici les dimensions posent problème, la loi de Fick usuelle donne le flux de densité de particules avec la formule :

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} n^*, \quad n^* \text{ est la densité particulaire}$$

Mais on n'utilise pas n^* , c'est la concentration c_+ que l'on veut, liées par :

$$n^* = \mathcal{N}_A c_+$$

Ceci nous amène à définir un vecteur densité de particule molaire $\vec{j}_+^{(D)} = \frac{\vec{j}}{\mathcal{N}_A}$ de sorte que :

$$\vec{j}_+^{(D)} = -D_+ \vec{\nabla} c_+, \quad \text{où } D_+ = D$$

Question 12.

C'est la version molaire de la loi de conservation de la matière :

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{j}_+^{(D)} + \vec{j}_+^{(E)} \right) = 0$$

En explicitant les formes de $\vec{j}_+^{(D)}$ et $\vec{j}_+^{(E)}$:

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{\nabla} c_+ + \mu_+ c_+ \vec{\nabla} \phi \right)$$

Finalement, comme $\phi = \frac{k_B T}{e} \psi$ et $\frac{k_B T}{e}$ est constant :

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{\nabla} c_+ + \mu_+ \frac{k_B T}{e} c_+ \vec{\nabla} \psi \right)$$

Question 13.

À l'équilibre le flux total de cations s'annule :

$$\vec{j}_+^{(D)} + \vec{j}_+^{(E)} = \vec{\nabla} c_+ + \mu_+ \frac{k_B T}{e} c_+ \vec{\nabla} \psi = \vec{0}$$

Or par la loi de Boltzmann et dérivée d'une composition :

$$c_+ = c_\infty \exp(-\psi) \implies \nabla c_+ = -\nabla \psi c_+$$

On en déduit alors :

$$-\vec{\nabla} \psi c_+ + \mu_+ \frac{k_B T}{e} c_+ \vec{\nabla} \psi = \vec{0}$$

C'est à dire :

$$D_+ = \mu_+ \frac{k_B T}{e} \quad \left(\text{ou } \mu_+ = D_+ \frac{e}{k_B T} \right)$$

Question 14.

Pour les particules chargées négativement il faut remplacer la charge e par $-e$ dans l'expression de ψ en fonction de ϕ , ce qui donne avec (2) :

$$c_- = c'_\infty \exp(\psi), \quad \text{avec à priori : } c'_\infty \neq c_\infty$$

Cependant, par hypothèse on a que loin de la paroi : $\phi = 0$ et donc par (2) :

$$\pm\psi = 0 \implies c_+ = c_\infty, \quad c_- = c'_\infty$$

Mais comme par hypothèse toujours on a que loin de la paroi $c_+ = c_- = c_\infty$ on a bien :

$$\boxed{c'_\infty = c_\infty}$$

Question 15.

La densité de charge volumique est alors la pondération entre les densités de charges positives et négatives :

$$\boxed{\rho_e = (+e)n_+ + (-e)n_- = e\mathcal{N}_A(c_+ - c_-)}$$

Comme $c_+ = c_\infty e^{-\psi}$, $c_- = c_\infty e^{+\psi}$ et $\psi = \frac{e\phi}{k_B T}$ on en déduit :

$$\rho_e = e\mathcal{N}_A c_\infty (e^{-\psi} - e^{+\psi})$$

Puis en fonction de \sinh :

$$\boxed{\rho_e = -2e\mathcal{N}_A c_\infty \sinh(\psi)}$$

Question 16.

Dans le vide et avec la perméabilité ϵ_r l'équation de Poisson s'écrit :

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

En y insérant $\psi = \frac{e\phi}{k_B T}$ et $\rho_e = -2e\mathcal{N}_A c_\infty \sinh \psi$ on obtient :

$$\frac{k_B T}{e} \nabla^2 \psi = \frac{2e\mathcal{N}_A c_\infty}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sinh(\psi)$$

Ce qui après réorganisation donne :

$$\boxed{\nabla^2 \psi - \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh(\psi) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}{2e^2 \mathcal{N}_A c_\infty}}$$

Remarque : λ_D est appelée longueur de Debye.

Question 17.

On suppose que le plan de la surface est chargé uniformément à Σ et infini dans les direction \hat{e}_x et \hat{e}_y et on considère un point $M(x, y, z)$ au-dessus de ce plan. On a donc que tout plan contenant M orienté par \hat{e}_z (ce sont les plans contenant M et orthogonaux à la surface) sont des plans de symétries pour la distribution de charges et donc des plans de symétries pour le champ \vec{E} , ainsi \vec{E} appartient à l'intersection de tous ces plans soit :

$$\boxed{\vec{E} = E \vec{e}_z}$$

Ensuite, comme le plan de la surface est infini et uniformément chargé, on a invariance de la norme $E(x, y, z)$ du champ \vec{E} par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y et donc :

$$E = E(x, y, z) = E(z)$$

Finalement, comme $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, on a que :

$$\phi = \phi(z)$$

Question 18.

Lorsque $\psi \ll 1$ on a par le formulaire à l'ordre 1 :

$$\sinh(\psi) = \psi$$

Donc l'équation différentielle de la question 16 se simplifie de la sorte :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\lambda_D^2} \psi = 0$$

En tenant maintenant compte des simplifications de la question 17 et avec (2) on a :

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} - \frac{1}{\lambda_D^2} \psi = 0$$

C'est une forme connue d'équation dont on donne directement la solution générale :

$$\psi(z) = A e^{z/\lambda_D} + B e^{-z/\lambda_D}.$$

Or, ψ ne peut pas raisonnablement diverger vers $+\infty$ donc $A = 0$ et de plus, on sait que le champ au niveau de la paroi en $z = 0$ vaut ψ_0 et donc $B = \psi_0$. On en déduit avec (2) :

$$\psi(z) = \psi_0 e^{-z/\lambda_D} \implies \phi(z) = \phi_0 e^{-z/\lambda_D} \quad (\phi_0 = \frac{k_B T}{e} \psi_0)$$

Question 19.

Par la question 18 et la question 17, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \rho_e$$

Or : $E = -\frac{d\phi}{dz}$ par définition donc $\frac{dE}{dz} = -\frac{d^2 \phi}{dz^2}$ d'où :

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho_e(z)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

En intégrant de $z = 0^+$ à $z \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$E(\infty) - E(0^+) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_0^\infty \rho_e(z) dz.$$

Or par la question 18 toujours $E(\infty) = 0$ car $\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\phi_0}{\lambda_D} e^{-z/\lambda_D} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$. Et la discontinuité du champ à la paroi $z = 0$ est donné par :

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad E(0^-) = 0 \text{ par hypothèse.}$$

On en déduit finalement :

$$\int_0^\infty \rho_e(z) dz + \Sigma = 0$$

Question 20.

On reprend l'équation de Poisson de la question 19 et on utilise l'expression du potentiel de la question 18 pour établir :

$$\frac{\phi_0}{\lambda_D^2} e^{-z/\lambda_D} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \rho_e$$

Et en intégrant l'équation de $z = 0^+$ à $z \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\frac{\phi_0}{\lambda_D^2} \int_0^{+\infty} e^{-z/\lambda_D} dz = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_0^{+\infty} \rho_e(z) dz$$

Le membre de gauche se calcule facilement, et celui de droite se simplifie avec la question 19 :

$$\Sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\lambda_D} \phi_0$$

Question 21.

On s'attend à trouver que λ_D est une longueur, vérifions cela avec la question 20, on réécrit :

$$\lambda_D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\phi_0}{\Sigma} \implies [\lambda_D] = [\varepsilon_0 \varepsilon_r] \left[\frac{\phi_0}{\Sigma} \right]$$

Or par l'équation de Poisson en dimension et simple analyse dimensionnelle :

$$\frac{[\phi]}{L^2} = \frac{[\rho_e]}{[\varepsilon_0 \varepsilon_r]} \quad \text{et} \quad \frac{[\Sigma]}{L} = [\rho_e]$$

Ce qui donne finalement :

$$[\lambda_D] = L$$

L'application numérique avec la formule de la question 16 donne :

$$\lambda_D \approx 0,4 \text{ nm}$$

Question 22.

La question se fait bien à la main mais c'est mieux avec Python (compliqué en épreuve certes) :

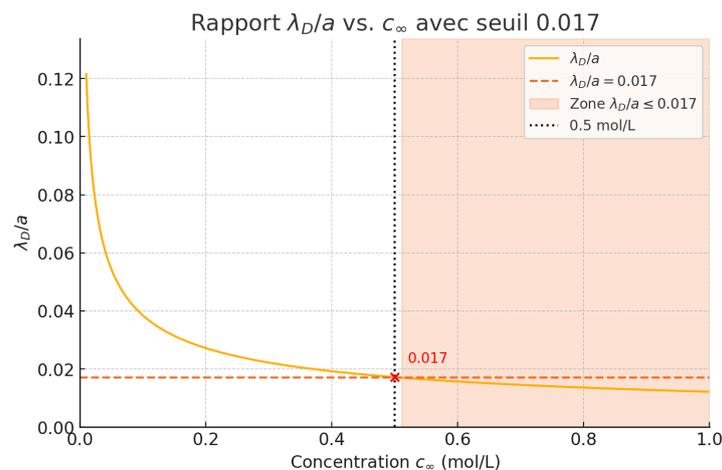


FIGURE 1 – Evolution du rapport $\frac{\lambda_D}{a}$ en fonction de la concentration en sel c_s

Le rapport $\frac{\lambda_D}{a}$ décroît avec l'augmentation de la concentration c_∞ , pour la concentration donnée ce rapport est de l'ordre de 10^{-2} ce qui prouve bien que $\lambda_D \ll a$ et valide l'hypothèse faite.

Question 23.

On va faire un saut dans le monde tordu des équations différentielles non-linéaires, en suivant l'indication on va donc commencer par dériver $\ln\left(\frac{\tanh(\psi(z))}{4}\right)$ en supposant que (5) est vérifiée :

$$\frac{d}{dz} \left(\ln \left(\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \right) \right) = \frac{\frac{d}{dz} \left(\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \right)}{\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{d\psi(z)}{dz} \left(\frac{d}{dz} \left(\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \right) \right)}{\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right)}$$

Or en utilisant le formulaire, on sait que $\frac{d \tanh}{dx}(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ et $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ donc :

$$\frac{d}{dz} \left(\ln \left(\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \right) \right) = \frac{1}{4} \frac{d\psi(z)}{dz} \frac{1}{\sinh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \cosh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right)}$$

Or comme (5) est vérifiée :

$$\frac{d}{dz} \left(\ln \left(\tanh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \right) \right) = \frac{d}{dz} \left(\ln \left(\gamma e^{-z/\lambda_D} \right) \right) = -\frac{1}{\lambda_D} \quad \text{et}$$

Et de plus, par le formulaire : $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$ donc :

$$\frac{1}{\sinh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right) \cosh \left(\frac{\psi(z)}{4} \right)} = \frac{2}{\sinh \left(\frac{\psi(z)}{2} \right)}$$

Donc on en déduit :

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi(z)}{dz} \frac{1}{\sinh \left(\frac{\psi(z)}{2} \right)} = -\frac{1}{\lambda_D} \iff \frac{d\psi(z)}{dz} = -\frac{2}{\lambda_D} \sinh \left(\frac{\psi(z)}{2} \right)$$

Si on dérive cette équation par rapport à z à nouveau, on obtient :

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = -\frac{2}{\lambda_D} \frac{1}{2} \frac{d\psi(z)}{dz} \frac{d \sinh}{dz} \left(\frac{\psi(z)}{2} \right)$$

Or par le formulaire $\frac{d \sinh}{dx} = \cosh(x)$ et donc en réutilisant la formule deux crans au-dessus :

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = \frac{2}{\lambda_D^2} \sinh \left(\frac{\psi(z)}{2} \right) \cosh \left(\frac{\psi(z)}{2} \right)$$

Et l'utilisation du formulaire une dernière fois permet de conclure :

$$\boxed{\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh(\psi(z))}$$

Ce qui est bien l'équation de la question 16, on a donc qu'ainsi construite, $\psi(z)$ est solution de cette équation et par unicité de la solution à un problème de Cauchy on conclut.

Remarque : On pouvait aussi s'en sortir en multipliant l'équation différentielle initiale par $\frac{d\psi(z)}{dz}$ et en travaillant avec ça, ce qui aurait eu l'avantage de comprendre la construction des constantes d'intégrations.

2.2 Écoulement diffusio-osmotique**Question 24.**

L'unique force volumique est simplement $\vec{f}_{\text{vol}} = \rho_e \vec{E}$ et comme $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ on obtient :

$$\boxed{\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho_e \vec{\nabla} \phi}$$

Question 25.

Le nombre d'Osborn Reynolds Re est défini comme le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses subies par une particule sur une distance caractéristique L évoluant à une vitesse caractéristique v dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η .

$$Re = \frac{\rho \|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v})\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\rho L v}{\eta}$$

Question 26.

On utilise la formule (7) et l'expression du nombre de Reynolds de la question 25 pour obtenir :

$$Re = \frac{\rho a^2 RT \delta c}{8 \eta^2}$$

L'application numérique donne ensuite :

$$Re \approx 9.7 \times 10^{-5} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{L'écoulement s'effectue en régime laminaire}}$$

Question 27.

Chacun des termes de droite a au moins une composante non nulle, on regarde maintenant le terme de gauche $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v})$ en régime stationnaire. Or :

$$(v \cdot \nabla)(v) = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mais dans notre cas : $v = v(z)\vec{e}_x$ donc $v_z = v_y = 0$ et en particulier : $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ ce qui donne :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) = \vec{0}$$

L'équation de Navier-Stokes se réécrit finalement :

$$\boxed{\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} P + \vec{f}_{\text{vol}} = 0}$$

Question 28.

En utilisant la question 27 et la question 24 on obtient :

$$\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} P - \rho_e \vec{\nabla} \phi = 0$$

En projection sur \vec{e}_z on obtient donc :

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_e \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0}$$

Question 29.

On part de l'équation de Poisson en une dimension dans le milieu ionique :

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Or, avec $\psi = \frac{e}{k_B T} \phi$ on a $\phi = \frac{k_B T}{e} \psi$ et donc :

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{k_B T}{e} \frac{d^2\psi}{dz^2}$$

Dans la limite linéaire $\sinh \psi = \psi$, l'équation de la question 16 donne $\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \psi$ et donc :

$$\frac{k_B T}{e} \frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{k_B T}{e} \frac{\psi}{\lambda_D^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \implies \rho_e = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{e \lambda_D^2} \psi$$

Enfin, en utilisant $\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{2 e^2 \mathcal{N}_A c_\infty(x)}$ on obtient :

$$\boxed{\rho_e(x, z) = -2 e \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \implies K = -2 e \mathcal{N}_A}$$

Question 30.

On part de l'expression obtenue en question 28 :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_e \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

et avec les relations $\rho_e = K c_\infty \psi$ et $\phi = \frac{k_B T}{e} \psi$ de la question 29 on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -K c_\infty \psi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_B T}{e} \psi \right) = -\frac{K k_B T c_\infty}{2e} \frac{\partial \psi^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{K k_B T c_\infty}{2e} \psi^2 \right)$$

En intégrant de $z = +\infty$ (où $P = P_\infty$ et $\psi = 0$) à z :

$$P(z) - P_\infty = -\frac{K k_B T c_\infty}{2e} \psi^2(z).$$

D'où l'expression finale, en insérant l'expression de $K = -2 e \mathcal{N}_A$:

$$\boxed{P(x, z) = P_\infty(x) + k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) [\psi(x, z)]^2.}$$

Question 31.

On part de l'équation de la question 27, que l'on simplifie de sorte que :

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

D'après la formule de la question 30 et comme $P_\infty(x) = P_0$ est constante :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = k_B T \mathcal{N}_A \left(\frac{dc_\infty(x)}{dx} [\psi(x, z)]^2 + 2 \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \psi(x, z) c_\infty(x) \right)$$

Et également comme $\psi(x, z) = \frac{e}{k_B T} \phi(x, z)$ on obtient avec la question 29 :

$$\rho_e \frac{\partial \phi}{\partial x} = \rho_e \frac{k_B T}{e} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} = -2 k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x}$$

On obtient alors directement :

$$\boxed{\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = k_B T \mathcal{N}_A \left(\frac{dc_\infty(x)}{dx} [\psi(x, z)]^2 \right)}$$

Question 32.

Si le fluide est adhérent à la paroi la continuité de la vitesse y impose :

$$v(z = 0) = 0$$

Question 33.

On part de l'équation de la question précédente, et on intègre entre z et $+\infty$ de sorte que :

$$\int_z^{+\infty} \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} dz = \left(\frac{k_B T \mathcal{N}_A}{\eta} \frac{dc_\infty}{dx} \right) \int_z^\infty \psi(x, z')^2 dz'$$

Puis comme $\frac{\partial v}{\partial z}(\infty) = 0$:

$$\frac{\partial v(z)}{\partial z} = \left(\frac{k_B T \mathcal{N}_A}{\eta} \frac{dc_\infty}{dx} \right) \int_z^\infty \psi(x, z')^2 dz'$$

On intègre une seconde fois entre 0 et z , cette fois-ci de sorte à obtenir :

$$\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial z} dz = \frac{k_B T \mathcal{N}_A}{\eta} \frac{dc_\infty}{dx} \int_0^\infty \left(\int_z^\infty \psi(x, z')^2 dz' \right) dz$$

Puis comme la question 32 donne $v(0) = 0$ on obtient :

$$v_\infty(x) = \frac{k_B T \mathcal{N}_A}{\eta} \frac{dc_\infty(x)}{dx} \int_0^\infty \left(\int_z^\infty \psi(x, z')^2 dz' \right) dz$$

Sachant maintenant que $\psi(x, z) = \psi_0(x) e^{-z/\lambda_D}$ on simplifie les intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_z^\infty \psi(x, z')^2 dz' \right) dz &= \int_0^\infty \left(\int_z^\infty \psi_0(x)^2 e^{-2z'/\lambda_D} dz' \right) dz \\ &= \int_0^\infty \psi_0(x)^2 \left[\frac{\lambda_D}{2} e^{-2z/\lambda_D} \right] dz \\ &= \psi_0(x)^2 \frac{\lambda_D}{2} \int_0^\infty e^{-2z/\lambda_D} dz \\ &= \psi_0(x)^2 \frac{\lambda_D}{2} \cdot \frac{\lambda_D}{2} \\ &= \frac{\psi_0(x)^2 \lambda_D^2}{4} \end{aligned}$$

Ce qui donne avec $\phi_0(x) = \frac{k_B T}{e} \psi_0(x)$:

$$v_\infty(x) = \frac{e^2 \mathcal{N}_A \lambda_D^2}{4 \eta k_B T} \phi_0(x)^2 \frac{dc_\infty}{dx}$$

Soit en remplaçant λ_D^2 par son expression de la question 16 :

$$v_\infty(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{8 \eta c_\infty(x)} \frac{dc_\infty}{dx}$$

Question 34.

Dans le canal, la concentration décroît le long de l'axe : $\frac{dc_\infty}{dx} < 0$. Il en résulte

$$v_\infty(x) < 0,$$

C'est-à-dire que le fluide s'écoule dans le sens des x décroissants :

$$\boxed{\text{du moins concentré vers le plus concentré}}$$

2.3 Courant ionique diffusio-osmotique

Question 35.

On propose la formule suivante :

$$I_{\text{DO}} = 4a \int_0^\infty \rho_e(x, z) v(z) dz$$

Pour les dimensions on a :

$$[\rho_e] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}, \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad [dz] = \text{m} \implies [I_{\text{DO}}] = \text{C} \cdot \frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{m} = \frac{\text{C}}{\text{s}} \implies [I_{\text{DO}}] = \text{A}$$

L'intégrale $\int_0^\infty \rho_e v dz$ donne le courant par unité de longueur de paroi et le facteur $4a$ rend compte des quatre faces d'un canal à section carrée de côté a .

Cette expression suppose que $\lambda_D \ll a$, de sorte que les doubles couches sont confinées près des parois et ne se chevauchent pas.

Question 36.

On sait que :

$$L^2 = [\lambda_D^2] = \left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{e^2} \right] \frac{1}{[\mathcal{N}_A][c_\infty]} \implies \left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{e^2} \right] = L^{-1}$$

On peut donc immédiatement en déduire que :

$$[\ell_B] = L$$

De même, comme $[\Sigma] = [e] L^{-2}$:

$$[\ell_{GC}] = L$$

Remarque : $[\ell_B]$ est appelée longueur de Bjerrum.

Question 37.

La longueur de Bjerrum se définit par

$$\ell_B = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}$$

L'application numérique donne :

$$\ell_B \approx 0.7 \text{ nm}$$

ℓ_B est la distance pour laquelle l'énergie potentielle électrostatique entre deux ions de charge élémentaire e , $U_{\text{el}} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}$, devient égale à l'énergie thermique $k_B T$. Autrement dit, à $r = \ell_B$, on a $U_{\text{el}} = k_B T$, ce qui compare directement la force électrostatique et l'agitation thermique.

Question 38.

On part de l'expression générale :

$$K_{\text{osm}} = 4a \Sigma \frac{k_B T}{2\pi \eta \ell_B} \left[1 - \frac{\ell_{GC}}{\lambda_D} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}}\right) \right].$$

Lorsque $\ell_{GC} \gg \lambda_D$, en posant $x = \lambda_D/\ell_{GC}$ on a $x \ll 1$ et par le formulaire : $\sinh^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{6}$ d'où :

$$1 - \frac{\ell_{GC}}{\lambda_D} \operatorname{arcsinh}(x) \approx \frac{x^2}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \right)^2.$$

La conductance osmotique devient alors

$$K_{\text{osm}} = a \Sigma \frac{k_B T}{3\pi\eta\ell_B} \left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \right)^2$$

En particulier, si la membrane n'est pas chargée ($\Sigma = 0$) on obtient :

$$K_{\text{osm}} = 0 \implies I_{\text{DO}} = 0$$

Question 39.

Je ne vois pas d'autre solution que de déterminer un équivalent en $x \gg 1$ de \sinh^{-1} , pour cela :

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln\left(x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \ln\left(x + x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}(x^{-4})\right)\right) \\ &= \ln\left(2x + \frac{1}{2x} + \mathcal{O}(x^{-3})\right) \\ &= \ln(2x) + \ln\left(1 + \frac{1}{4x^2} + \mathcal{O}(x^{-4})\right) \\ &= \ln(2x) + \mathcal{O}(x^{-2}) \\ &\sim \ln(2x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant l'expression générale et en posant $x = \frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \gg 1$:

$$K_{\text{osm}} \sim 4a \Sigma \frac{k_B T}{2\pi\eta\ell_B} \left[1 - \left(\frac{\ln(2x)}{x} \right) \right]$$

Et comme $\frac{\ln(2x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$K_{\text{osm}} = 4a \Sigma \frac{k_B T}{2\pi\eta\ell_B}$$

Question 40.

On part de l'expression approchée établie à la question 39 et on fait l'application numérique :

$$K_{\text{osm}} \approx 10^{-16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

La variation linéaire de la concentration donne :

$$c_\infty(x) = c_s - (c_s - 0) \frac{x}{L} = c_s \left(1 - \frac{x}{L} \right) \implies \frac{dc_\infty}{dx} = -\frac{c_s}{L}$$

On peut alors faire l'application numérique :

$$I_{\text{DO}} = K_{\text{osm}} \frac{1}{c_\infty} \frac{dc_\infty}{dx} \implies I_{\text{DO}} = 10^{-9} \text{ A}$$

Question 41.

On suppose que la membrane est entièrement occupée par un réseau de canaux carrés, chacun de largeur a . Le nombre de canaux par unité de surface est alors

$$n = \frac{1}{a^2}.$$

Si chaque canal fournit un courant I_{DO} , le courant total par unité de surface (courant surfacique) est

$$J_{\text{DO}} = n I_{\text{DO}} = \frac{I_{\text{DO}}}{a^2}$$

Comme I_{DO} croît au plus linéairement avec a par définition on trouve que J_{DO} se comporte comme $\frac{1}{a}$

Pour maximiser le courant surfacique, il vaut mieux des canaux étroits.

3 Intégration du dispositif**3.1 Caractérisation de la résistance interne d'un canal****Question 42.**

On lit la pente de la caractéristique $I(V)$ (courant en fonction de la différence de potentiel) pour chaque concentration :

$$G = \frac{\Delta I}{\Delta V}$$

Pour $c_{s,1} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$\Delta I \approx 1 \text{ nA} \quad \text{pour} \quad \Delta V \approx 0.1 \text{ V} \implies G_1 \approx 10^{-8} \text{ S}$$

Pour $c_{s,2} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$\Delta I \approx 6 \text{ nA} \quad \text{pour} \quad \Delta V \approx 0.1 \text{ V} \implies G_2 \approx 6 \times 10^{-8} \text{ S}.$$

On en déduit finalement les rapports :

$$\boxed{\frac{G_1}{G_2} \approx \frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{c_{s,1}}{c_{s,2}} = 10}$$

On constate que $\frac{G_1}{G_2} \neq \frac{c_{s,1}}{c_{s,2}}$ donc :

la conductance mesurée n'est pas proportionnelle à la concentration en sel.

Question 43.

On a par définition le courant traversant une surface S :

$$I_+ = \iint_S \vec{j}_+ \cdot \vec{dS}$$

En supposant j_+ uniforme sur la section a^2 du canal, on obtient :

$$I_+ = a^2 j_+ = a^2 (e \mu_+ n_+ E) \quad \text{avec} \quad n_+ = c_s \mathcal{N}_A, \quad E = \frac{\Delta V}{L}.$$

D'où, puisque $c_+ = c_s$:

$$I_+ = a^2 e \mu_+ (c_s \mathcal{N}_A) \frac{\Delta V}{L}$$

Question 44.

Pour les ions négatifs de mobilité μ_- , même raisonnement :

$$I_- = a^2 e \mu_- (c_s \mathcal{N}_A) \frac{\Delta V}{L}$$

Le courant total est donc

$$I = I_+ + I_- = a^2 e (c_s \mathcal{N}_A) (\mu_+ + \mu_-) \frac{\Delta V}{L}$$

et la résistance interne du canal vaut

$$R_c = \frac{1}{G} = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{a^2 e \mathcal{N}_A c_s (\mu_+ + \mu_-)}$$

Question 45.

Pour $c_{s,1} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ l'application numérique donne :

$$G_1 \approx 8.7 \times 10^{-10} \text{ S}$$

Et pour $c_{s,2} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$G_2 \approx 8.7 \times 10^{-9} \text{ S}$$

Ces deux valeurs sont proches de celles obtenues à la question 47, cependant elles montrent que la conductance est proportionnelle à la concentration, contrairement à la question 47. Le sujet explique que cette différence entre théorie et réalité vient de la dépendance de la conductance vis-à-vis de la densité surfacique de charge dans le tube.

3.2 Circuit électrique équivalent**Question 46.**

Chaque canal est représenté par un bloc à droite contenant une résistance R_c et une source de tension idéale générant un courant I_{do} . Ils sont tous en parallèle les uns des autres, reliés aux électrodes (points), la lampe est à gauche, modélisée par sa résistance r .

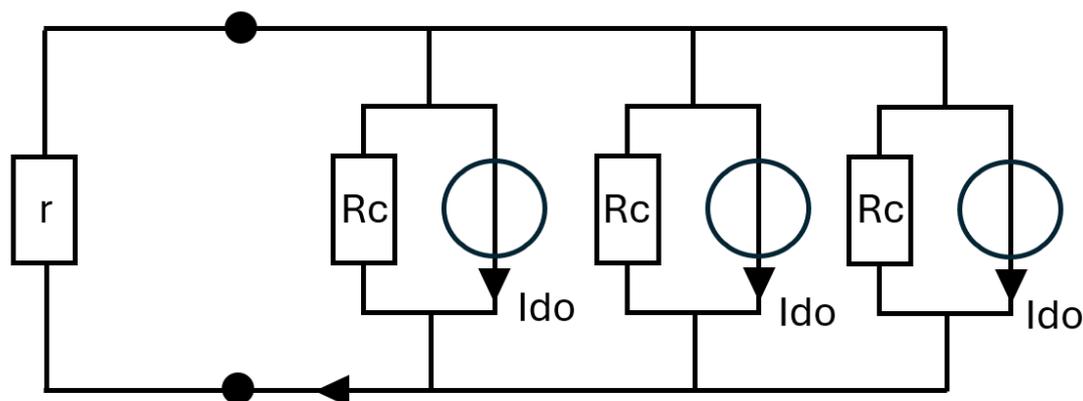


FIGURE 2 – Schéma du circuit

Question 47.

Les blocs à gauche se simplifient en un bloc équivalent contenant en parallèle une résistance $R_N = \frac{R_c}{N}$ et une source de tension générant un courant $I_N = NI_{do}$. La formule du pont diviseur de courant nous permet alors de conclure :

$$i = \frac{R_N}{R_N + r} I_N = \frac{NR_c}{R_c + Nr} I_{do}$$

L'équivalence des modèles Thévenin et Norton nous donne bien que la membrane est équivalente à une source de tension E en parallèle avec une résistance R vérifiant :

$$E = I_{do} R_c \quad \text{et} \quad R = \frac{R_c}{N}$$

Remarque : Il faudrait **absolument** faire un schéma.

Question 48.

On modélise la membrane par son équivalent de Thévenin : une source E placée en série avec la résistance R et connectée à la charge r de sorte que :

$$i = \frac{E}{R + r}, \quad P = i^2 r = \frac{E^2 r}{(R + r)^2}$$

Pour trouver la valeur de r qui maximise P , on résout simplement :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{E^2 (R + r)^2 - 2E^2 r (R + r)}{(R + r)^4} = 0$$

Ce qui n'arrive que si :

$$r = R$$

Valeur pour laquelle la puissance est maximale et vaut :

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R}$$

Question 49.

Pour l'application numérique on utilise la formule de la question 45 :

$$R_c = \frac{1}{G_2} \approx 1.15 \times 10^8 \Omega$$

Exprimons maintenant la puissance maximale délivrée par un canal :

$$P_{\max, \text{canal}} = \frac{I_{DO}^2 R_c}{4} \quad \text{AN :} \quad P_{\max, \text{canal}} \approx 2.9 \times 10^{-11} \text{ W}$$

Ce qui donne par unité de surface $\sigma = \frac{1}{a^2}$ une puissance maximale de :

$$P_{\max, \text{surf}} = \sigma P_{\max, \text{canal}} \quad \text{AN :} \quad P_{\max, \text{surf}} \approx 4.6 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

Question 50.

Pour allumer une ampoule de 9 W, la surface nécessaire est :

$$S = \frac{P_{\text{ampoule}}}{P_{\text{max,surf}}} = \frac{9 \text{ W}}{4.6 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}} \approx 1.96 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Question 51.

On utilise le même raisonnement qu'en question 50, la surface nécessaire est :

$$S = \frac{P_{\text{react}}}{P_{\text{max,surf}}} \approx 1.96 \times 10^4 \text{ m}^2.$$

3.3 Onduleur**Question 52.**

Par la loi des mailles :

$$U(t) = \begin{cases} E - R i(t), & 0 \leq t < \frac{T}{2} \quad (K_1 \text{ et } K_4 \text{ fermés}) \\ -E - R i(t), & \frac{T}{2} \leq t < T \quad (K_2 \text{ et } K_3 \text{ fermés}) \end{cases}$$

Question 53.

Dans chaque phase la tension U est donnée par la somme des tensions aux bornes de la résistance et de l'inductance :

$$U(t) = r i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

La question 52 nous permet de conclure que :

$$\begin{cases} E = (R + r) i(t) + L \frac{di(t)}{dt}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \quad (K_1 \text{ et } K_4 \text{ fermés}) \\ E = -(R + r) i(t) - L \frac{di(t)}{dt}, & \frac{T}{2} \leq t < T \quad (K_2 \text{ et } K_3 \text{ fermés}) \end{cases}$$

En prenant de l'avance sur la résolution on pose $I = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$ de sorte que les équations se simplifient comme suit :

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{I}{\tau}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \quad (K_1 \text{ et } K_4 \text{ fermés}) \\ \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = -\frac{I}{\tau}, & \frac{T}{2} \leq t < T \quad (K_2 \text{ et } K_3 \text{ fermés}) \end{cases}$$

Question 54.

Pour la phase 1, lorsque $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, la solution est de la forme :

$$i(t) = C_1 e^{-t/\tau} + I$$

Et avec la condition initiale $i_1(0) = i_0$ on a $C_1 = i_0 - I$ d'où :

$$i(t) = I + (i_0 - I) e^{-t/\tau} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2}\right)$$

Pour la phase 2, lorsque $\frac{T}{2} \leq t \leq T$, la forme de la solution est :

$$i(t) = C_2 e^{-t/\tau} - I$$

Cette fois la condition initiale vient de la continuité du courant qu'impose la self dans le circuit c'est à dire :

$$i\left(\frac{T^-}{2}\right) = I + (i_0 - I) e^{-T/2\tau} = C_2 e^{-T/2\tau} - I = i\left(\frac{T^+}{2}\right)$$

D'où l'on déduit C_2 :

$$C_2 = i_0 + I(2e^{T/(2\tau)} - 1)$$

Puis :

$$i(t) = \left(i_0 - I + 2I e^{\frac{T}{2\tau}}\right) e^{-t/\tau} - I \quad \left(\frac{T}{2} \leq t \leq T\right)$$

On trace finalement le graphique suivant avec Python, il aurait fallu le faire à la main le jour de l'épreuve.

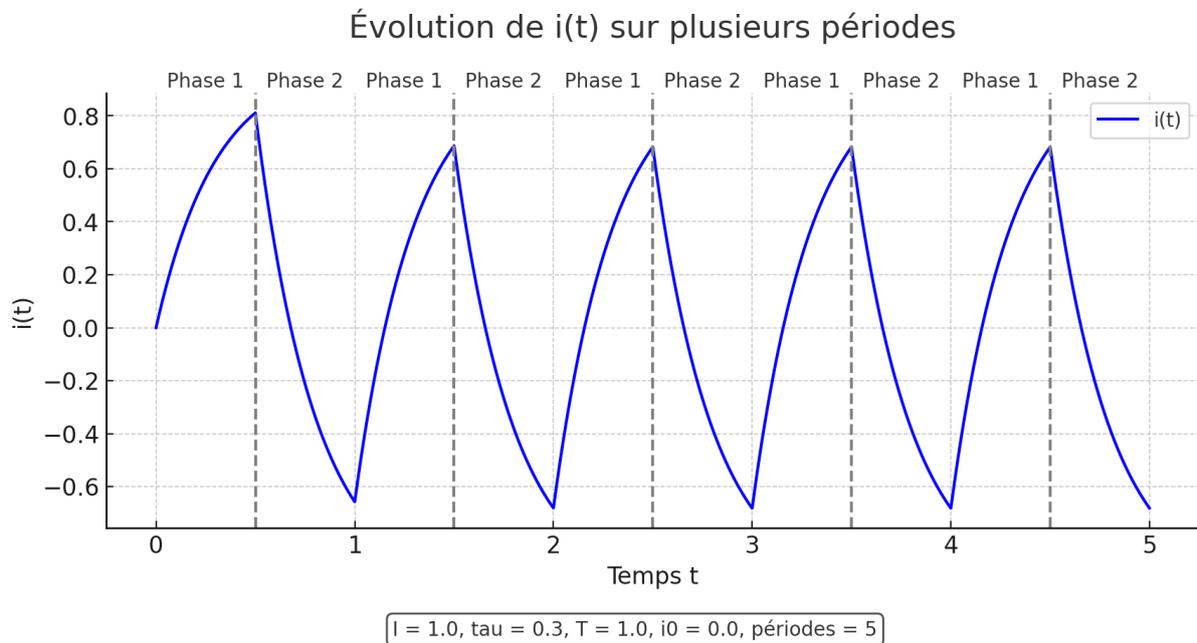


FIGURE 3 – Tracé de i sur plusieurs périodes

Question 55.

La continuité de i dans le circuit impose :

$$i_{\max} = i(T^-) = i_0$$

C'est-à-dire en utilisant la question 54 :

$$\left(i_0 - I + 2I e^{\frac{T}{2\tau}}\right) e^{-T/\tau} - I = i_0$$

Qui donne finalement par l'arc moitié et en utilisant le formulaire :

$$i_{\max} = I \frac{1 - e^{-T/(2\tau)}}{1 + e^{-T/(2\tau)}} = I \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right)$$

Question 56.

Pendant la première phase, la question 54 donne :

$$i(t) = I + (i_0 - I) e^{-t/\tau}, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

Or, en régime permanent périodique on a choisi l'origine des temps à $t = 0$ où le courant est à son minimum $-i_{\max}$, la question 55 donne donc $i_0 = I \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right)$ puis :

$$i(t) = I \left[1 - \left(1 + \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right) \right) e^{-t/\tau} \right]$$

Question 57.

Par définition de la puissance moyenne :

$$P_{AC} = \frac{1}{T} \int_0^T r i^2(t) dt = \frac{r}{T} \left(\int_0^{T/2} i^2(t) dt + \int_{T/2}^T i^2(t) dt \right)$$

On utilise ensuite les questions précédentes pour obtenir après simplifications :

$$P_{AC} = r I^2 \left[1 - \frac{2\tau}{T} \tanh\left(\frac{T}{2\tau}\right) \right]$$

Remarque : Je n'ai pas trouvé d'astuce pour cette question autre que de développer les calculs jusqu'au bout, ce qui est extrêmement long.

Question 58.

On rappelle l'expression exacte obtenue avec la question 57 :

$$P_{AC} = r I^2 \left[1 - \frac{\tanh(x)}{x} \right] \quad \text{où} \quad x = \frac{T}{2\tau}$$

Dans le cas où $T \gg \tau$ ($x \gg 1$) on a que $\frac{\tanh x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc :

$$P_{AC} \approx r I^2$$

Dans le cas où $T \ll \tau$ ($x \ll 1$) on a par le formulaire $1 - \frac{\tanh x}{x} = \frac{x^2}{3}$ et donc :

$$P_{AC} = r I^2 \frac{T^2}{12 \tau^2}$$

Question 59.

Si la résistance r était simplement branchée en continu à la source (E, R) , on aurait

$$i_{DC} = \frac{E}{R+r} = I, \quad P_{DC} = r i_{DC}^2 = r I^2.$$

En revanche, d'après la question 57,

$$P_{AC} = r I^2 \left[1 - \frac{2\tau}{T} \tanh\left(\frac{T}{2\tau}\right) \right].$$

On en déduit puisque $\frac{2\tau}{T} \tanh\left(\frac{T}{2\tau}\right) > 0$:

$$P_{AC} = P_{DC} \left[1 - \frac{2\tau}{T} \tanh\left(\frac{T}{2\tau}\right) \right] < P_{DC}$$

Ainsi, pour que la puissance restituée se rapproche de P_{DC} , il faut minimiser $\frac{\tau}{T}$, c'est-à-dire :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \ll T \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L \ll (R+r) \frac{T}{2}}$$

Autrement dit, on optimise la valeur de l'inductance en la rendant suffisamment faible pour que $\tau \ll T$ et ainsi limiter la perte due au lissage.

Question 60.

On veut $T \simeq 10\tau$, donc

$$\tau = \frac{T}{10} = \frac{1}{10f}$$

La résistance de l'ampoule se calcule avec :

$$r \approx \frac{230^2}{9} \approx 5,9 \times 10^3 \Omega.$$

La membrane, de conductance $G_2 = 8,7 \times 10^{-9} \text{ S}$, par la question 45 donne :

$$R = \frac{1}{G_2} \approx \frac{1}{8,7 \times 10^{-9}} \approx 1,15 \times 10^8 \Omega.$$

Comme $R \gg r$, on prend $R+r \approx R$ pour l'application numérique de sorte que :

$$\boxed{L = \tau(R+r) \approx 0,002 \times 1,7 \times 10^7 \approx 3,3 \times 10^4 \text{ H.}}$$

Une inductance de l'ordre de $3 \times 10^4 \text{ H}$ est évidemment hors de portée pour un montage membranaire. Toute autre solution (condensateurs, électronique de modulation, etc.) serait nécessaire pour obtenir un signal « lissé » à 50 Hz.

Fin de la proposition
