



RETOUR SUR LES ORAUX

X-ENS



IP PARIS



ENS

ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE

FILIÈRE MP - 2025

Avant-propos

Chers lecteurs,

Si vous lisez ces lignes, il est fort probable que vous soyez en classe préparatoire MP. Cet ouvrage a été spécifiquement conçu pour les étudiants de deuxième année souhaitant se projeter vers les oraux, étape cruciale après l'admissibilité obtenue aux écrits. Que vous soyez la cible directe de cet ouvrage ou non, nous espérons sincèrement que vous en tirerez profit et que vous apprécierez le travail investi dans sa réalisation.

Ce recueil regroupe des exercices issus des oraux d'admission de l'**École polytechnique (X)** ainsi que des **Écoles normales supérieures (ENS)**. Certains exercices, dits « *avec déroulement* », sont accompagnés de commentaires fournis par leurs auteurs, candidats ayant eux-mêmes vécu ces épreuves.

Cet ouvrage propose un large panel de corrigés. La majorité de nos lecteurs visant prioritairement l'École polytechnique, nous avons mis l'accent sur la correction des exercices de mathématiques de l'X. Quant à la physique, elle constitue la particularité de cette édition : **la grande majorité des oraux sont fournis avec leurs corrigés !**

Rappelez-vous d'une chose essentielle : échouer sur un exercice facile ou réussir un exercice difficile ne détermine pas nécessairement l'issue de votre oral. Le jour J, de nombreux facteurs entrent en jeu et tout reste possible après l'admissibilité. Gardez confiance : les cartes sont redistribuées et rien n'est figé. Peu importe le nombre de simulations d'oraux que vous aurez effectuées, rien ne remplace l'expérience unique de votre premier véritable oral.

Ces exercices sont le fruit d'un travail collaboratif d'élèves ayant souhaité partager leur expérience ; les corrigés ont été majoritairement rédigés par les auteurs ainsi que par les contributeurs mentionnés en fin d'ouvrage. Malgré nos nombreuses relectures, des erreurs peuvent subsister. Si vous en relevez, ou si vous souhaitez proposer des méthodes alternatives, nous vous invitons à nous en faire part à l'adresse suivante :

orauxens25@outlook.fr

Nous exprimons notre profonde gratitude à toutes les personnes ayant contribué à ce projet. Bien que la majorité des retours proviennent de *Lydexiens*, nous avons également bénéficié des précieux apports de *Lymediens* et de *Zahraouis*.

Ce document s'inscrit dans la continuité des éditions 2022, 2023 et 2024 réalisées par des Lydexiens admissibles à l'X, que nous remercions pour leur travail. Nous espérons que ce guide vous sera utile et que cette tradition de partage se perpétuera au fil des années.

*Nous vous souhaitons une excellente lecture
et beaucoup de courage pour votre préparation !*

Les logos et noms de l'École polytechnique et des ENS sont utilisés à titre illustratif uniquement.
Ces établissements n'ont pas participé à l'élaboration de ce livre et ne le soutiennent pas officiellement.

Ce livre est publié sous licence **Creative Commons BY-NC-SA 4.0**.



Table des matières

1	Maths X	6
1.1	Exercices avec déroulements	6
1.2	Exercices sans déroulements	25
2	Maths U	26
3	Maths L	29
4	Maths SR	34
5	Maths ULSR	36
6	Physique U	41
6.1	Exercices avec déroulement	41
6.2	Exercices sans déroulement	46
7	Physique LSR	47
7.1	Exercices avec déroulement	47
7.2	Exercices sans déroulement	54
8	Physique X	55
8.1	Exercices avec déroulement	55
8.2	Exercices sans déroulement	73
9	Analyse de documents scientifiques (ADS)	74
9.1	ADS PC	74
9.2	ADS Maths	78
10	Chimie	80
11	TIPE ENS	82
11.1	TIPE MATHS	82
11.2	TIPE PC	82
11.3	TIPE INFO	84
12	Oral Info ENS	85
13	TP Info ENS	87
14	Français	88
15	Arabe	91
16	Anglais	92
17	Corrigé Maths X	93
17.1	Corrigé de l'énoncé 1	93
17.2	Corrigé de l'énoncé 2	94
17.3	Corrigé de l'énoncé 3	95
17.4	Corrigé de l'énoncé 4	96
17.5	Corrigé de l'énoncé 5	97
17.6	Corrigé de l'énoncé 6	100
17.7	Corrigé de l'énoncé 7	100
17.8	Corrigé de l'énoncé 9	101
17.9	Corrigé de l'énoncé 10	103
17.10	Corrigé de l'énoncé 11	106
17.11	Corrigé de l'énoncé 12	107

17.12	Corrigé de l'énoncé 13	109
17.13	Corrigé de l'énoncé 14	111
17.14	Corrigé de l'énoncé 15	113
17.15	Corrigé de l'énoncé 16	114
17.16	Corrigé de l'énoncé 21	115
18	Corrigé Maths U	117
18.1	Corrigé de l'énoncé 22	117
18.2	Corrigé de l'énoncé 24	117
19	Corrigé Maths L	119
19.1	Corrigé de l'énoncé 28	119
19.2	Corrigé de l'énoncé 31	120
20	Corrigé Physique U	121
20.1	Corrigé de l'énoncé 1	121
20.2	Corrigé de l'énoncé 2	123
20.3	Corrigé de l'énoncé 3	125
20.4	Corrigé de l'énoncé 4	127
20.5	Corrigé de l'énoncé 5	128
20.6	Corrigé de l'énoncé 6	129
20.7	Corrigé de l'énoncé 7	131
21	Corrigé Physique LSR	133
21.1	Corrigé de l'énoncé 8	133
21.2	Corrigé de l'énoncé 9	134
21.3	Corrigé de l'énoncé 10	135
21.4	Corrigé de l'énoncé 11	136
21.5	Corrigé de l'énoncé 12	139
21.6	Corrigé de l'énoncé 13	144
21.7	Corrigé de l'énoncé 14	146
21.8	Corrigé de l'énoncé 15	146
21.9	Corrigé de l'énoncé 16	150
22	Corrigé Physique X	152
22.1	Corrigé de l'énoncé 18	152
22.2	Corrigé de l'énoncé 19	153
22.3	Corrigé de l'énoncé 20	156
22.4	Corrigé de l'énoncé 21	157
22.5	Corrigé de l'énoncé 22	159
22.6	Corrigé de l'énoncé 23	162
22.7	Corrigé de l'énoncé 24	164
22.8	Corrigé de l'énoncé 25	166
22.9	Corrigé de l'énoncé 26	168
22.10	Corrigé de l'énoncé 27	171
22.11	Corrigé de l'énoncé 28	172
22.12	Corrigé de l'énoncé 29	175
22.13	Corrigé de l'énoncé 30	177
22.14	Corrigé de l'énoncé 31	179
22.15	Corrigé de l'énoncé 32	181
22.16	Corrigé de l'énoncé 33	184
22.17	Corrigé de l'énoncé 34	186

Crédits	188
-------------------	-----

1 Maths X

1.1 Exercices avec déroulements

Énoncé 1

Exercice 1

On considère une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad X^T A X > 0.$$

On définit la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle X, Y \rangle_A := X^T A^{-1} Y, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.
2. Soit $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n)$. Mq AN diagonalisable sur $\mathbb{C}$
Indication : Si F est un sev stable par AN , montrer que $F^\perp$ stable par AN

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$y'' + e^x y = 0, \text{ sur } \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Montrer que y s'annule au moins une fois.

Déroulement : 12 / 20

La première question est simple. La seconde demandait plus de réflexion, l'examineur précise que je dois absolument utiliser le produit scalaire défini précédemment, ce qui me bloque un peu car l'expression ne m'inspire rien, on me donne la première indication que je démontre sans grande difficulté. Pour conclure, je propose un raisonnement par récurrence sur la dimension, je rencontre un problème pour garder l'antisymétrie de n à $n - 1$. En réalité, il fallait itérer en reprenant à chaque fois une droite ou un plan stable, l'examineur me demande de rédiger ça. (Il n'était jamais satisfait par des justifications orales, il faut que j'écrive au moins l'idée sur le tableau.) On passe au second exo, pas assez de temps pour tout écrire, je commence tout juste la démarche par l'absurde lorsque le temps s'écoule.

Énoncé 2

Soit E un evn, et $f \in L(E)$.

Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{rg}(f - \text{id}) = 1$ et $\text{tr}(f - \text{id}) = 0$.
- (ii) $\exists a \in E \setminus \{0\}, \exists \ell \in E^* \setminus \{0\}$ tels que

$$\ell(a) = 0 \text{ et } \forall x \in E, f(x) = x + \ell(x) a.$$

Déroulement 6/20

Quand je suis rentrée à cet oral, l'examineur était souriant, accueillant. La simplicité de l'exercice n'a pas joué en ma faveur, j'étais méfiante et je me suis mis l'idée qu'il fallait chercher et réfléchir un peu loin, puisqu'il s'agissait d'un oral (ce qui était une erreur fatale). En gros, j'avais trouvé la solution en autonomie mais j'étais hyper réactive, une erreur d'inattention se glissa dans un passage (du moins c'est ce que je me disais pour contourner l'embarras de la situation) et me coûta très cher. Je l'ai rectifiée après une remarque de l'examineur qui commença à me poser quelques questions hyper simples, c'est là où j'étais sûre d'avoir entre 4 et 7 à cet oral (et j'ai eu finalement raison). S'il y a une leçon à retenir de cet oral catastrophique, c'est que : sous l'effet du stress, on a tendance à projeter des obstacles inexistants et à dramatiser artificiellement la difficulté d'un oral. Il faut donc faire attention à ça pour ne pas s'auto-saboter.

Énoncé 3

Exercice 1

$$I(x) = \int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt$$

Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $I(x)$.

Exercice 2

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 1, \quad \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B).$$

Montrer que A et B sont semblables.

Déroulement 11/20

C'était mon dernier oral, j'étais plutôt confiante quand j'ai vu l'énoncé, l'examineur avait l'air très fatigué et regardait le tableau bizarrement, j'ai proposé plusieurs approches avant de voir l'examineur intervenir pour me donner une indication, j'ai expliqué ce que je voulais faire et l'examineur semblait un peu satisfait, à un moment donné il me proposa de passer à un autre exercice, le deuxième était abordable, j'ai fini l'exo en autonomie et l'examineur avait l'air content. Vu ma performance, je m'attendais à une note au voisinage de 12.

Énoncé 4

On considère l'équation

$$\frac{X^2 + Y^2}{1 + XY} = N, \quad X, Y \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}.$$

1. Solution pour $X = Y$.
2. Solution pour $N = 0, N = 1$.

3. Soit (X, Y) solution pour $N > 1$ tel que $X \neq Y$.

Montrer que $\exists (U, V)$ solution tel que $U > V \geq 0$.

4. Pour X, Y solution, montrer que $\exists Z \in \mathbb{Z}$ tel que (Y, Z) est solution et $Y > Z$.

5. Soit X, Y solution : Montrer que N est un carré parfait.

6. Soit $X, Y \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{X^2 + Y^2}{1 + XY} = -N.$$

Montrer que $N = 5$.

Déroulement 9/20

L'examineur me demande d'écrire la première question au tableau. C'est en réalité la fameuse question 6 de l'IMO 1988, mais je ne m'en rends compte qu'après l'oral.

Je réponds à la première question sans difficulté. À la deuxième, je commets une petite erreur de raisonnement car je me dépêchais, pensant que c'était facile. Pour la troisième, je me suis un peu attardé car je pensais qu'il fallait trouver un nouveau couple de solutions, mais je finis par revenir sur la bonne piste.

L'examineur ne donnait aucune réaction à mon raisonnement ou à mes propositions, se contentant de dire « vas-y » ou de donner une indication occasionnelle.

C'est à ce moment qu'il me donne par erreur la dernière question de l'oral, puis la retire immédiatement. Il me donne ensuite la quatrième question et je me lance dans les calculs. Je trouve deux pistes pour déterminer Z . J'essaye la première mais je me bloque sur l'inégalité.

Il me dit alors d'essayer l'autre piste, où nous nous retrouvons au même point. Je finis enfin par montrer l'inégalité, et il me lance la cinquième question.

Arrivé à ce stade, le temps était écoulé. Il me demande si j'ai une idée sur la façon de procéder ; je propose quelque chose qui s'avère incorrect. L'oral se termine ainsi.

En sortant, je sentais que l'oral s'était bien passé, ayant répondu à quatre questions. La note reçue me choque encore et je n'arrive pas à en trouver l'explication. Peut-être me suis-je trop bloqué, ou peut-être est-ce simplement le fait de ne pas avoir trouvé la bonne piste à la fin de l'oral.

Énoncé 5

Soit $n \in \mathbb{N}$

Soient $f, g \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\deg f = n, \quad \deg g \leq n.$$

On définit

$$B(f, g) = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

par la relation, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(\lambda)g(\mu) - f(\mu)g(\lambda)}{\lambda - \mu} = \sum_{0 \leq i, j \leq n} b_{ij} \lambda^{i-1} \mu^{j-1}.$$

1. Cas f scindé simple . Montrer que :

$$\dim(\ker(B(f, g))) = \text{nombre de racines communes de } f \text{ et } g.$$

2. Cas général . Montrer que :

$\dim(\ker(B(f, g))) \geq$ nombre de racines communes comptées avec leur multiplicité

(minimale entre f et g)

Déroulement 11/20

Ce qui m'a dérangé dans cet oral c'est que l'examineur parlait beaucoup, il était impatient; il donnait des indications à profusion et cela n'a fait qu'impacter négativement ma note. La pression était extrême dans cet oral parce que j'avais raté mon épreuve de physique et pire encore je me suis trompé de salle. Et le fait que l'examineur donnait une indication dès que je donnais une piste qui ne semblait pas marcher me déstabilisait davantage et puis je faisais l'erreur de ne pas trop parler alors que dans ce cas il fallait le faire parce que parfois l'indication

était ce à quoi je pensais. J'écris pour $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ et $X_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \vdots \\ \mu^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

On a la relation (*) :

$$\frac{f(\lambda)g(\mu) - f(\mu)g(\lambda)}{\lambda - \mu} = {}^tX_\lambda B(f, g)X_\mu$$

J'écris $\text{Ker}(B(f, g)) = \text{vect}(v_1, \dots, v_r)$ pour après écrire les v_i en fonction de certains X_μ en utilisant Vandermonde.

L'examineur me répond qu'on peut prendre dans (*) les λ des racines de f et g (j'ai mis du temps pour penser à ça ...).

J'écris alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$0 = {}^tX_\lambda B(f, g)X_\mu$$

avec μ racine commune de f et g .

Je dis que les $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ engendrent les (E_i) , donc si μ est racine de f et g :

$$X_\mu \in \text{Ker}(B(f, g))$$

Cela montre une inégalité mais pas l'égalité.

L'examineur me donne l'indication de prendre M la matrice de Vandermonde des racines de f et de calculer ${}^tMB(f, g)M$. C'est une matrice diagonale dont les coefficients non nuls sont exactement en nombre égal au nombre des racines communes.

Pour l'autre question, je prends λ une racine commune à f et g de multiplicité $\geq m$ dans les deux. Je bloque, et après une certaine durée, l'examineur me donne l'indication de dériver par rapport à λ dans (*).

J'en déduis que $X_\lambda, X'\lambda, \dots, X\lambda^{(m-1)}$ sont dans $\text{Ker}(B(f, g))$.

Il ne restait que l'argument pour justifier que ces vecteurs, pour les différentes racines, sont libres entre eux. L'examineur voulait un argument élégant mais le temps était trop serré. Il faut utiliser ce morphisme (soit r le nombre de racines communes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités $m_1, \dots, m_r$ resp.) :

$$\varphi : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{m_1 + \dots + m_r}$$

$$P \longmapsto (P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \dots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), \dots, P(\lambda_r), \dots, P^{(m_r-1)}(\lambda_r))$$

Ou plutôt sa matrice.

Énoncé 6

$$\text{Soit } \alpha = \frac{12 + 5i}{13}$$

1. Montrer que α n'est pas racine de l'unité.
2. Montrer que α est racine d'un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Montrer que α n'est pas racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

Déroulement 12/20

C'était mon premier oral en mathématiques. L'examineur commence par m'annoncer l'exercice ; il me donne juste la première question. Comme on travaille ici avec les nombres complexes et les racines de l'unité, j'ai pensé au début à calculer le module en espérant le trouver différent de 1, ce qui n'est pas le cas. J'ai donc commencé à chercher ou à conjecturer une formule pour les puissances n -ièmes de α , mais le calcul ne cessait de se complexifier.

Après 5 minutes de recherche, je me suis dit : pourquoi ne pas écrire α sous la forme $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$, avec $\cos(\theta) = \frac{12}{13}$? À ce moment-là, j'ai mené un raisonnement par l'absurde : en supposant qu'il est racine de l'unité, alors α est annulé par $X^n - 1$, donc c'est un entier algébrique. De même pour $\bar{\alpha}$. Leur somme l'est donc aussi, or

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{24}{13},$$

qui est un entier algébrique (c'est-à-dire racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers). Absurde, car les seuls nombres rationnels racines d'un polynôme unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$ sont les entiers.

Jusqu'à cet instant, je n'avais pas eu d'interaction avec l'examineur. Avant de me retourner vers lui pour discuter la solution, je me suis rendu compte que mon raisonnement revenait en fait à calculer sur n'importe quel polynôme unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$ et pas seulement sur $X^n - 1$. J'ai donc décidé de discuter mon approche avec lui. J'étais content, jusque-là, de mon idée, ma réaction face à l'exercice.

Après avoir expliqué la solution à l'examineur, il m'a répondu : Tu as grillé l'exo et n'as pas accepté mon approche, bien qu'elle soit juste et bien plus optimale que celle qu'il allait me proposer. J'étais déçu. Son approche était de considérer la suite $\exp(i \cdot 2^n \theta)$ et d'utiliser des résultats sur les groupes cycliques pour trouver une contradiction.

Énoncé 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 tel que $f^2 \leq 1$ et $f'^2 + f''^2 \leq 1$

On pose $g : x \mapsto f^2 + f'^2$ et on suppose $\exists t \in \mathbb{R}, g(t) > 1$

1. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}, x = t \text{ ou } (\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y-t}{x-t} \in [0, 1] \implies g(y) > 1)\}$ est un intervalle ouvert.
2. Montrer que g' ne s'annule pas sur E .
3. Trouver la contradiction.

Déroulement 15/20

C'était mon premier oral, sans stress. Je suis rentré et l'examinateur m'a souri, ce qui m'a donné un peu d'énergie. Pendant l'oral, l'examinateur était silencieux. Il m'a donné la première question ; pour montrer qu'il s'agissait d'un intervalle, c'était facile, je l'ai expliqué à travers un schéma et une courbe, et il a approuvé en hochant la tête.

Concernant l'ouverture, je me suis dit qu'il fallait passer par la définition. Je lui ai proposé ma démarche, qu'il a approuvée, mais il m'a demandé de réécrire E . Après 2-4 minutes de réflexion, je l'ai fait et j'ai trouvé directement qu'il s'agissait d'un ouvert.

Pour la deuxième question, il s'agissait d'un raisonnement par l'absurde et de dérivation. Pour la troisième question, il m'a demandé d'écrire $E =]a, b[$ et de dessiner ce que j'avais trouvé dans cet intervalle, ce que j'ai fait. J'ai alors trouvé deux conditions sur $g(a)$ et $g'(a)$ si a est réel (sinon à la limite) et j'ai finalement mis en évidence la contradiction.

Après une discussion sur l'exercice, on pouvait enlever certaines conditions pour f ou choisir la classe C^1 plutôt que C^2 . Après cela, l'examinateur semblait satisfait et m'a dit que le temps était écoulé.

Énoncé 8

Soit

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 = 7\}.$$

1. Tracer l'ensemble E .
2. On note $E_{\mathbb{Q}} = E \cap \mathbb{Q}^2$ l'ensemble des points de E à coordonnées rationnelles.

Soit $(x, y) \in E_{\mathbb{Q}}$. On considère la tangente à E en ce point. Montrer que le second point d'intersection de cette tangente avec E appartient aussi à $E_{\mathbb{Q}}$.

On définit alors une fonction f qui, à tout x tel qu'il existe $y \in \mathbb{Q}$ avec $(x, y) \in E_{\mathbb{Q}}$ associe l'abscisse du second point d'intersection de la tangente en (x, y) avec E .

3. On pose $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est injective.

Déroulement 17/20

Je suis arrivé à l'oral assez fatigué, ce qui m'a mis sous pression dès le départ. L'exercice m'a immédiatement rappelé un passage d'un livre, hors programme, que j'avais parcouru pour préparer, où l'on expliquait comment certaines courbes cubiques permettent de construire de nouveaux points rationnels via des tangentes. Comme je n'en avais fait qu'une lecture rapide, cela m'a un peu perturbé : j'avais déjà vu l'idée, mais sans vraiment savoir la manier. L'examinateur m'a d'abord demandé de tracer E . C'était une question un peu inhabituelle mais destinée à visualiser la courbe. J'ai analysé son comportement à l'infini et remarqué une symétrie par rapport à la droite $y = x$. Vient ensuite l'étude des tangentes. C'est une partie où le stress est monté, car même si l'idée me rappelait quelque chose, je n'avais jamais vraiment travaillé la méthode. J'ai commencé par écrire l'équation de la tangente en un point (a, b) , mais l'examinateur m'a progressivement guidé pour comprendre la structure de l'intersection avec la courbe. Il m'a notamment amené à voir qu'un certain facteur apparaissait naturellement du fait de la tangence, ce qui simplifiait beaucoup la situation. Ensuite, nous avons discuté de la suite (u_n) . La question était moins classique, car la fonction définie est loin d'être simple.

L'examineur m'a orienté vers une étude arithmétique et j'ai manipulé les écritures rationnelles des termes de la suite. Même si je n'ai pas réussi à terminer entièrement pendant l'oral, j'ai pu mettre en place les outils nécessaires. Le stress était très présent, surtout parce que c'était mon dernier oral du week-end et que je comptais beaucoup dessus pour remonter ma moyenne.

Énoncé 9

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On pose :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad V_m = \frac{1}{S_1} + \dots + \frac{1}{S_m}$$

1. Montrer que, avec une probabilité de 1, la suite (V_m) converge dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
2. On suppose désormais que $X_1 \in L^2$. Construire une suite $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que :

$$\begin{cases} n_k \geq 2n_{k-1}, \\ \mathbb{P}(S_{n_k} \geq 2n_k \mathbb{E}(X_1)) \leq 2^{-k} \end{cases}$$

3. Montrer qu'avec probabilité 1 on a :

$$\exists K > 0, \forall k > K, \quad S_{n_k} \leq 2n_k \mathbb{E}(X_1)$$

4. Soit l la limite de V_n (c'est une variable aléatoire). Montrer que :

$$\mathbb{P}(l = +\infty) = 1$$

5. Montrer que :

$$\text{Var}(V_m) \leq \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \left(\frac{1}{S_k^2} \right)$$

Exercice 2 Trouver toutes les $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphismes de dimension 10) qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension 5.

Déroulement 17/20. (Exercice 1 seulement)

Dès mon entrée, l'examineur a commencé à me donner les données de l'exercice. J'ai tout de suite reconnu qu'il s'agissait d'un problème de probabilité, ce qui m'a un peu stressé, avant même d'avoir lu la première question. Une fois l'énoncé recopié, il m'a posé la première question. Le terme « avec probabilité 1 » était un peu flou sur le moment. Il m'a alors suggéré de l'écrire en français au tableau. Honnêtement, je n'ai pas compris immédiatement ce qu'il attendait. Je pensais aux modes classiques de convergence (en probabilité, en loi...), et je ne voulais pas lui demander « c'est quoi avec proba 1 » de peur qu'il pense que je n'étais pas à la hauteur. Après une trentaine de secondes de réflexion, j'ai compris ce qu'il fallait montrer. Pour la deuxième question, avec l'hypothèse $X_1 \in L^2$, j'ai pensé à utiliser une inégalité de concentration classique. J'ai effectué les calculs et l'examineur semblait satisfait de ma démarche. La construction de la suite (n_k) découle directement de cette inégalité. Je commençais à me

sentir plus à l'aise avec l'exercice.

La troisième question était plus technique. J'ai reconnu qu'il fallait étudier l'événement sous sa forme ensembliste. Avant tout, je me suis rappelé du théorème de Borel–Cantelli — je savais qu'il pouvait s'appliquer ici, mais sans jamais le citer à l'oral. J'ai démontré rigoureusement cette propriété en considérant le complémentaire de l'événement et en utilisant le théorème de la limite monotone. En combinant avec le résultat de la question précédente, j'ai pu conclure. Je commençais vraiment à m'habituer au problème. Pour la quatrième question, j'ai d'abord tenté une mauvaise piste, et l'examinateur m'a guidé en me suggérant d'examiner la somme de $\frac{1}{S_n}$ entre n_k et n_{k+1} . Cette indication m'a permis de trouver une minoration qui montre que la série diverge.

J'avais encore du temps pour la dernière question. J'ai essayé plusieurs pistes mais je n'ai pas trouvé de démonstration complète. J'ai examiné le cas $m = 1$ qui est immédiat, mais je n'arrivais pas à conclure au cas général. J'ai hésité entre utiliser l'indépendance ou faire une majoration directe. Je suis resté silencieux un moment, ce que je regrettais un peu en sortant, car je pensais que ça allait affecter négativement ma note.

Déroulement 16/20. (Exercice 1, question 1, 2 et 4 et Exercice 2)

L'examinateur était silencieux, mais, par contre, souriant, il me dictait l'énoncé question par question.

La 1^{ère} question m'a pris 9 secondes, je n'avais pas compris au début, mais après l'avoir résolue, l'examinateur a avoué qu'elle n'était pas très bien formulée.

Je réalisais la note de l'épreuve tout en discutant avec l'examinateur qui me posait de temps en temps quelques questions. Après avoir fini l'exercice, l'examinateur m'a donné le nom du théorème, un peu près 9 minutes avant la fin de l'épreuve.

Il me donna le 2^{ème} exercice qui me paraissait au début bizarre (dimension 10, 5 ??), pour éviter le silence et sachant que je n'avais plus de temps, j'ai tenté de construire des endomorphismes de dimension 5 à partir de la base canonique et de faire alors ce qui m'a permis de résoudre l'épreuve.

Énoncé 10

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

On pose $f(A) = P(A)$ avec $P \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ tel que $\forall \lambda \in Sp(A), f(\lambda) = P(\lambda)$.

1. Montrer que f est bien défini.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $A \in S_n(\mathbb{R}), B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $Sp(A), Sp(B) \subset I$
Montrer que $\forall \lambda \in [0, 1] Sp(\lambda A + (1 - \lambda)B) \subset I$
3. On définit dans $S_n(\mathbb{R})$ une relation d'ordre $A \leq B \iff B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $V \subset S_n(\mathbb{R})$, si $\forall A, B \in V$:

$$\forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$$

Montrer que la fonction inverse est convexe sur $S_n(\mathbb{R})^{++}$.

4. Si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_k \in S_n(\mathbb{R})$.

Supposons que $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1], x \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i = x I_n$. Montrer que $f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i)$

5. Est ce que $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $S_n(\mathbb{R})$?

Déroulement 17/20

L'oral était très linéaire : il fallait aller vite et ne pas trop traîner pour aborder les questions intéressantes. C'était le dernier oral scientifique que j'avais à passer et je n'avais plus rien à perdre.

L'épreuve commence calmement par une vérification : je parle du théorème spectral et j'écris quelques lignes indicatives au tableau ; l'essentiel se fait à l'oral. Pour la seconde question, on me donne deux minutes de réflexion et on me demande « quels sont les intervalles faciles à traiter ? ». Je réponds $\mathbb{R}^+$ et je résous la question par la même technique en considérant les segments inclus dans I .

Pour la troisième question, je connaissais la méthode : je pose directement la racine carrée et, après des manipulations dans lesquelles je suis un peu lent, j'arrive finalement au résultat.

La quatrième question marque le début des difficultés : d'abord je ne sais pas vraiment comment procéder. Je commence par réduire l'étude au cas $k = 2$. Après cinq minutes de réflexion, l'examineur me demande de tracer la courbe d'une fonction convexe — honnêtement, je voyais mal en quoi cela pouvait aider. Je commence à réfléchir à voix haute sur la tangente, mais j'écarte cette piste parce que f n'est pas supposée C^1 . L'examineur m'assure que ce n'est pas nécessaire et qu'il existe bien une droite supportant la courbe et restant en dessous d'elle. Une discussion s'engage, car je ne voyais pas pourquoi cela était correct. Finalement, après avoir considéré cette droite, j'établis une analogie avec les matrices, ce qui lui plaît beaucoup, et je termine par résoudre la question.

On me donne la dernière question ; j'essaie de trouver un contre-exemple. J'écarte rapidement les matrices de taille 2 et 3, mais je ne vois pas comment construire un contre-exemple dans $S_4(\mathbb{R})$. L'examineur me dit alors que la propriété est en fait correcte. Le temps s'écoule, en rangeant mes affaires je lui demande comment on pourrait procéder. Il me répond de traiter le cas $\lambda = \frac{1}{2}$. Je propose ensuite de passer par la densité des dyadiques ; il confirme que c'est la bonne direction.

C'est dommage, car j'avais déjà préparé le grand classique : si f est continue sur I et si $\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, alors f est convexe. Mais l'idée ne m'était pas venue sur le moment.

À la sortie, je sentais que j'avais bien mené les choses et il m'a attribué la note 17. Je pense qu'il faut toujours essayer de créer un lien avec l'examineur : même si on nous demande de résoudre l'exercice, communiquer nos pensées et dialoguer peut aider. J'ai réussi à convaincre les examinateurs de bien me noter en partie grâce au lien qui s'est formé, et pas uniquement à cause de ma performance technique.

Énoncé 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- On pose pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n+x}$
Pour quel valeur de α f_α est définie, calculer, en fonction de α , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ et donner un équivalent de f_α en $+\infty$
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant à coefficients positifs et $\forall x \in \mathbb{R}^* g_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{P(n+x)}$.
Mêmes questions.

Déroulement 14/20

Après avoir dit que c'est défini pour c, j'ai proposé une comparaison série-intégrale pour trouver la limite et un équivalent en $+\infty$, et lorsque j'ai eu besoin d'utiliser $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1}$ l'examinateur me demande pour quelles valeurs de α cette quantité est bien définie, ensuite j'ai commencé la disjonction des 3 cas pour finir la première question dans les 30 minutes à peu près. Dans la deuxième question il m'a demandé quelle simplification on peut faire pour trouver la limite et les équivalents, j'ai bloqué un peu et il m'a demandé de montrer qu'on peut ne garder que le monôme de plus haut degré dans P, je l'ai démontré en utilisant des inégalités (voir le corrigé), puis il m'a demandé de conjecturer le résultat par analogie avec le premier cas. J'ai proposé des expressions, et l'oral s'est terminé.

Énoncé 12

On dit que deux séries entières

$$A(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n \text{ et } B(z) = \sum \frac{b_n}{n!} z^n$$

sont congrues modulo m si et seulement si

$$\forall n, a_n \equiv b_n [m]$$

- Montrer que si p est premier,

$$(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum \frac{-z^{k(p-1)}}{(k(p-1))!} [p]$$

- Si $m > 4$ est non premier alors $m \mid (m-1)!$ et

$$(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 [m]$$

Déroulement 8/20

Le début de cet oral était l'étude du cas $p=3$. La formule générale n'était pas donnée mais plutôt une somme (en pointillés) à laquelle manquait un coefficient multiplicatif. Je développe en premier lieu l'expression puis effectue un DSE des exponentielles. Certes j'obtiens le résultat, mais ça ne collait pas avec l'expression demandée à cause du coefficient manquant. Je redéveloppe donc à l'aide de Cauchy... après un long tunnel de calculs j'aboutis au même résultat. Après une bonne trentaine de minutes perdues à calculer je demande à l'examinateur de vérifier

l'énoncé. Il lui manquait effectivement le coefficient et s'excuse brièvement et valide le résultat trouvé. Je passe alors à la deuxième question dont la première partie me prend une dizaine de minutes. Il me dicte alors la deuxième partie de la question, après quelques échanges non fructueux le temps s'était entièrement écoulé, et donc je m'arrête. Ce qui est à retenir de mon expérience est l'importance de se manifester un peu plus tôt si l'on est absolument sûr qu'il y a une erreur d'énoncé, soyez courtois et expliquez pourquoi vous le pensez.

Déroulement 16/20. (La question 2 pour le cas $m = 4$ puis la question 2 puis la question 1)

Examinateur sympa, les premières questions étaient simples ; dans la 3ème question, il m'a donné une indication, c'était de penser à l'ensemble de ces séries puis aux séries de la forme $\frac{(e^z-1)}{n!}$. J'ai réussi à résoudre la question grâce à l'indication.

NB : ce même exo était posé à un autre camarade mais seulement en une question.

Énoncé 13

Soit $n \geq 1$. Soit H un sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall A, B \in H, \quad AB \in H.$$

On définit

$$\mathcal{D} = \{\Delta \in \mathcal{L}(H) \mid \forall A, B \in H, \Delta(AB) = \Delta(A)B + A\Delta(B)\}.$$

1. Pour $C \in H$.

On note $\Delta_C : A \mapsto AC - CA$.

Montrer que $\Delta_C \in \mathcal{D}$.

2. Calculer e^{Δ_C} .

3. Soit $\Delta \in \mathcal{D}$ quelconque. On note $G = e^\Delta$. Montrer que:

$$G(AB) = G(A)G(B), \quad \forall A, B \in H.$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on note C_λ l'espace caractéristique de δ associé à λ .

Montrer que si $A \in C_\lambda$ et $B \in C_\mu$ alors $AB \in C_{\lambda+\mu}$ (Ind: considérer $e^{t(\delta-(\lambda+\mu)id)}$ $t \in \mathbb{R}$)

5. Montrer la décomposition de Dunford (existence + unicité)

Déroulement 14/20. (Question 1, 2 et 3)

C'était mon premier oral à l'X, et honnêtement, il a été catastrophique.

Le jury a commencé par des questions assez simples : la première et la deuxième se sont bien passées. Mais pour la troisième, il m'a donné un énoncé faux, concernant des exponentielles de matrices (et non d'endomorphismes). Au départ, je n'avais aucune idée de comment aborder l'exponentielle de matrices, puisqu'on n'a pas de propriétés majeures immédiates.

J'ai essayé de définir une fonction et de la dériver pour montrer une quantité constante, mais j'ai vite été bloqué par des problèmes de commutativité. Après plusieurs échecs, j'ai fini

par soupçonner que l'énoncé était faux, car il impliquait des propriétés étranges. Le jury, impassible, regardait par la fenêtre. J'ai proposé différents arguments pour montrer que c'était faux, mais sans réaction. Puis il m'a donné une indication, qui s'est révélée elle aussi fausse... Deux minutes avant la fin, il m'a finalement confirmé que l'énoncé était faux, et j'ai alors donné rapidement la bonne réponse par un calcul simple, en appliquant directement le binôme de Newton. Il m'a demandé de quitter la salle sans commentaire.

Je m'attendais à une note autour de 6 ou 8, donc 14 a été une bonne surprise. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'un premier oral peut être vraiment raté, mais qu'il faut garder une attitude positive pour la suite. L'objectif reste de maximiser les notes, qui à l'X relèvent en grande partie de la chance.

Déroulement 17/20

Première orale de maths à l'X, donc j'étais stressé, mais les premières questions m'ont mis en confiance. Pour la troisième, je n'ai pas trouvé de pistes claires pendant environ cinq minutes, donc j'ai essayé d'expliquer ma tentative et pourquoi ça ne marchait pas. Il m'a alors donné une indication, à laquelle j'ai assez bien réagi. Pour la quatrième, j'ai pris un peu trop de temps pour me rappeler de la preuve, et le temps de l'épreuve s'est écoulé.

Énoncé 14

Exercice 1

Soit M une matrice symétrique réelle et N une matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que MN est diagonalisable.

Exercice 2

Quels sont les entiers naturels n pour lesquels il existe un cercle (non nécessairement centré en l'origine) du plan contenant exactement n points à coordonnées rationnelles ?

Déroulement 13/20

C'était mon deuxième oral. Le premier était de chimie, que j'ai très mal passé ; j'étais donc démoralisé. Mais je me suis dit que je n'avais rien à perdre et que j'allais tout donner dans cette épreuve, surtout que les mathématiques représentent mon point fort, celui sur lequel je comptais pour intégrer l'X.

Le premier exercice ne me posait aucune difficulté réelle : je l'ai résolu rapidement et sans intervention de l'examineur. J'ai d'abord montré que le produit est semblable à une matrice symétrique en utilisant uniquement le théorème spectral, mais cela ne suffisait pas. Je me suis ensuite rendu compte que, comme $N = H^2$ avec H symétrique définie positive, on obtient que MN est semblable à HMH , qui est symétrique, donc diagonalisable en vertu du théorème spectral. L'examineur m'a demandé si H est unique ; c'était le cas, et je lui ai expliqué pourquoi.

Ensuite, il m'a donné le deuxième exercice. Au début, j'ai bombardé l'examineur de remarques (par exemple : si un cercle centré en 0 contient un point à coordonnées rationnelles, alors ses symétriques par rapport aux axes sont aussi à coordonnées rationnelles). Puis j'ai essayé d'étudier l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ avec $x, y \in \mathbb{Q}$. J'ai même tenté d'utiliser des résultats sur les

polynômes (comme : les racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont soit entières, soit irrationnelles). Bref, j'ai essayé d'exploiter tout ce que je savais pour ne pas rester bloqué. À un moment, l'examineur est intervenu et m'a demandé de traiter le cas $n = 0$. Je n'avais pas d'idée, alors j'ai décidé d'utiliser un raisonnement par l'absurde. J'ai supposé que chaque cercle contient au moins un point à coordonnées rationnelles ; en particulier, à chaque cercle de rayon r centré à l'origine, on peut associer un point rationnel noté $f(r)$. Ainsi, la fonction f serait injective. Mais l'ensemble de départ est $\mathbb{R}_+$ et celui d'arrivée est $\mathbb{Q}^2$, ce qui contredit la dénombrabilité de $\mathbb{Q}^2$. Jusqu'à ce stade, l'examineur était très satisfait, et je pensais que j'aurais au moins 16.

Mais ensuite, il m'a demandé de montrer que, si un cercle contient trois points à coordonnées rationnelles, alors son centre a lui aussi des coordonnées rationnelles. J'ai réussi à le montrer, mais avec difficulté et sans grande aisance, ce qui a révélé mes lacunes en géométrie et le fait que je ne maîtrise pas bien le vocabulaire géométrique en français (ayant étudié la géométrie en arabe lorsque j'étais petit). Cela justifie ma note.

Enfin, nous avons pu faire une synthèse de tous ces résultats et déterminer les entiers vérifiant l'énoncé.

Conseils pour préparer l'oral maths de l'X : Il faut s'assurer de la maîtrise de tous les théorèmes et de l'assimilation de toutes les définitions du programme, chose qui se fait tout au long des deux années de prépas. Ensuite, il faut travailler un maximum d'oraux X et dans tous les chapitres et pour cela je vous recommande de travailler sur Cassini (de préférence la version récente) durant votre année SPE (aussi en SUP pour les plus motivés) après avoir maîtrisé son cours et travaillé son TD et ses DMs. Je vous recommande aussi de travailler sur la RMS les oraux des années récentes car il y'a une probabilité considérable d'avoir un oral qui est tombé récemment soit à l'X soit à aux ENS donc n'hésitez pas à y foncer surtout après l'écrit et à l'approche des oraux. Enfin, il est indispensable que vous fassiez des simulations soit avec un prof soit entre vous pour améliorer sa performance en oral et se sentir à l'aise au tableau le jour J.

Énoncé 15

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $E = \mathbb{C}^d$.

Pour $A \in M_d(\mathbb{C})$ on note $N(A) = \text{Tr}(AA^*)$.

On suppose que U_d est un sous groupe de $GL_d(\mathbb{C})$ vérifiant:

- Si $A, B \in U_d$ tel que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$ et $N(I_d - B) < 4$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$ vérifie $N(I_d - C) < 4$ et C commute avec A alors $C = I_d$
- Si $A, B \in U_d$ alors:

$$N(I_d - ABA^{-1}B^{-1}) \leq 2N(I_d - A)N(I_d - B)$$

- Si $A \in U_d$ et $B \in GL_d(\mathbb{C})$ alors:

$$N(AB) = N(BA) = N(B)$$

1. Soit G un sous groupe fini de U_d . Soit $A, B \in G$ tel que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$ et $N(I_d - B) < 4$. Montrer que $AB = BA$.

2. Soit H le sous groupe de G engendré par les éléments $A \in G$ tel que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$.
Montrer que H est abélien.
3. Pour $g \in E$ on définit $gH = \{gh | h \in H\}$.
Montrer qu'il existe une constante K_d qui ne dépend pas du sous groupe G tel que:

$$G = \bigcup_{\text{au plus } K_d} gH$$

Déroulement 10/20

C'était un oral l'après-midi. L'énoncé était très long à réécrire au tableau. Pire encore, il comportait de nombreuses propriétés qu'il fallait profondément appréhender et assimiler afin de s'engager correctement dans une bonne piste. J'ai commencé à réfléchir à la question 1 et je suis resté bloqué à la dernière étape de la résolution. Après plusieurs tentatives vouées à l'échec, l'examineur m'a enfin donné une indication en considérant un commutateur, idée qui est loin d'être évidente ! Aussitôt, j'ai résolu la question 1 après avoir reçu l'indication. De même pour la deuxième question, sauf qu'elle m'a pris beaucoup de temps à résoudre, surtout que cette fois-ci je n'ai reçu aucun coup de main. D'ailleurs, j'accordais trop d'importance à expliciter clairement mon raisonnement, en suivant la rigueur et la logique. Ensuite, il m'a présenté la dernière question, qui avait l'air redoutable. Je lui ai donné quelques pistes de résolution, puis il m'a dit que le temps était écoulé.

Déroulement 14/20

Je suis entré dans la salle, stressé, parce que je venais de bâcler les deux dernières épreuves et que celles-ci étaient déterminantes, donc il fallait absolument que j'obtienne une bonne note. L'examineur m'a demandé d'écrire toute une série de conditions sur un certain groupe, ce qui m'a fait peur. Après avoir fini d'écrire les questions, j'ai commencé à regarder le tableau, sans aucune idée de par où commencer. Mais finalement, j'ai commencé à manipuler la norme (au carré), et il m'a dit que la seule chose que nous devons savoir à ce sujet, c'était qu'elle était positive. Ensuite, il m'a demandé de considérer une certaine suite, et là, j'ai compris immédiatement comment continuer. La deuxième question était triviale, et pour la troisième, nous avons commencé à discuter. En particulier, j'ai prouvé que la distance entre deux représentants de classes différents était minorée par une certaine constante strictement positive. Mais la suite ressemblait à un « hors-programme » familier, même si ce n'était pas exactement ça. Je lui ai donné mon intuition, mais elle n'était pas tout à fait correcte. La bonne approche consistait à utiliser la précompacité et à terminer l'exercice en une seule ligne.

Énoncé 16

- Soit $D = \{\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{Z}, \text{ morphisme de groupe}\}$
 $\forall a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ on note $\pi_i(a) = a_i$
 Soit $e_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ définie par $\pi_i(e_i) = 1$ et $\forall j \neq i \pi_j(e_i) = 0$
1. Soit $\phi \in D$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \phi(e_n) = 0$

Montrer que $\phi = 0$

(Indication : Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 2^n a + 3^n b$)

2. Soit $\phi \in D$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ on note $x_n = \phi(e_n)$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{n+1} \geq n + 1 + \sum_{i \leq n} |\lambda_i x_i|$ et que $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i$ divise λ_{i+1}

On note $l = \phi(\lambda)$

Montrer que $l = \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i$

3. Soit $\phi \in D$, montrer que $\exists N \in \mathbb{N}, \phi = \sum_{i=0}^N \lambda_i \pi_i$

Déroulement 11/20

L'examineur m'a donné l'indication pour la question 1 dès les premières cinq minutes en me disant que c'est difficile à deviner. Après j'ai passé une vingtaine de minutes en essayant de manipuler des sommes infinies qui n'avaient que peu de sens. Lorsque j'ai trouvé l'idée d'écrire la somme jusqu'au n-ième terme et factorisé par 2^n il m'a signalé que c'est une bonne idée, et pour conclure j'ai divisé par 2^n et j'ai passé à la limite en disant qu'une suite d'entiers tendant vers 0 est nulle APCR. Pour la deuxième question je n'ai eu aucune idée, l'examineur m'a proposé d'écrire la différence entre les deux termes et voir ses propriétés arithmétiques, après j'ai pu conclure. Lorsqu'il m'a donné la troisième question, il restait à peine 5 minutes, j'ai essayé de proposer des idées mais j'étais loin d'une réponse. Il m'a dit qu'il faut "généraliser" le résultat de Q2, ce que je n'avais pas compris (jusqu'à aujourd'hui), et l'oral s'est terminé.

Déroulement 15/20

Mon premier oral « important » de l'X, j'avais passé la chimie seulement la veille. Je me sens confiant, ayant vu quelques-uns des oraux proposés à mes camarades ; je me dis qu'il y a moyen d'avoir une bonne note et j'essaie de rendre le stress positif. Je rentre dans la salle, l'examineur, assis au fond, commence par me définir plein de suites et d'ensembles, puis me donne la première question. Je vois qu'elle n'utilise pas tout ce qu'on avait défini, et je me dis qu'elle doit être préliminaire et que je devrais la résoudre rapidement. Je prends un peu de temps de réflexion pour ne pas dire de bêtises, mais je n'arrive à rien. Je commence alors à présenter mon intuition : j'écris que ce qu'on aimerait faire, c'est appliquer l'additivité du morphisme sur une somme infinie. L'examineur intervient vite et dit que ce n'est pas possible puisque... je lui coupe la parole et lui dis que je sais, que c'est juste une intuition et que je voulais montrer que c'est légitime dans ce cas. Première erreur de ma part, je me dis que je l'ai peut-être agacé. J'essaie d'oublier et de me concentrer sur la question, mais je bloque complètement. À un moment, je dis à l'examineur que j'hésite entre deux pistes, ce à quoi il me répond : « Faites ce que vous voulez ! » quinze minutes sont passées, je stresse comme pas possible et l'examineur décide enfin de me donner l'indication (qui normalement devrait être fournie avec l'énoncé). L'indication me surprend puisqu'elle n'a rien à voir apparemment avec l'exercice ; j'ai envie de me retourner et de lui dire : « Je suis censé penser à ça tout seul ?? » Je montre l'indication, il me dit de l'appliquer à l'exercice. Je commence par des analogies bizarres de groupes, puis je me rends compte qu'il faut juste l'appliquer pour un terme de la suite, mais je bloque encore. Je stresse encore plus car je me dis que je dois finir seul puisqu'il m'a donné une indication, mais finalement je tente plein de choses, mais rien n'aboutit. Il me donne une deuxième indication, je la montre sans difficulté et je conclus tout

de suite ; l'indication rendait l'exercice trop facile, ce qui ne m'arrangeait pas pour la note. L'examineur me donne la deuxième question, alors qu'il reste moins de dix minutes. Je commence, je m'inspire de la première question, je plonge dans des inégalités que j'essaie de justifier, mais je ne me rapproche pas tellement du résultat. Je me retourne une fois, mais je vois que l'examineur ne me regardait même pas. Il me dit ensuite d'effacer, que le temps était écoulé, et je ne sais même pas s'il avait vu ce que j'avais écrit.

Je sors de l'oral totalement effondré : le pire oral possible — un exercice trop dur, un examinateur aigri et silencieux, pas de réponse... bref, je devais passer de sacrés oraux ensuite pour rattraper cette catastrophe. Je m'attendais au mieux à un 9 (sans blague), mais je me retrouve finalement avec un 15, qui est la note la plus surprenante que j'ai eue pendant toute ma scolarité. Je pense que l'examineur savait à quel point l'oral était difficile : il testait à quel point je pouvais résister à la difficulté, et peut-être que mes idées, bien qu'elles n'aboutissaient pas, lui ont semblé intéressantes et révélatrices d'une bonne intuition mathématique. Et quand j'y pense, je m'en suis bien sorti : j'étais actif, je parlais même quand je bloquais, je proposais des pistes intéressantes, et je ne me suis pas laissé abattre par la difficulté de l'exercice ni par l'étrangeté de la première indication (dont je me souviendrai toute ma vie). Leçons à retenir : -Faire confiance aux examinateurs, ils sont pour la majorité très compétents et savent reconnaître un élève méritant quand ils le voient. -Ne pas surestimer la performance attendue, il ne faut pas absolument finir tout ce qu'on vous donne ou répondre à la majorité correctement pour avoir une bonne note. La preuve : je n'ai répondu à aucune question en autonomie et j'ai eu 15.

Énoncé 17

Soit E un espace euclidien munit d'une norme euclidienne, soit $p \in L(E)$ une projection orthogonale.

1. Résoudre dans $L(E)$: $ph - hp = h$
2. On considère G l'ensemble des projections orthogonales de $L(E)$ de rang r , trouver l'espace tangent à G au point p et déterminer sa dimension.

Déroulement : 12 / 20

C'était mon premier oral de maths. J'avais déjà très mal passé deux épreuves, de physique et de chimie, donc je misais tout sur les maths. Avant d'entrer, une dame est venue m'informer que j'aurais une spectatrice.

L'oral commence calmement. Je passe à une matrice que j'aime : j'ai orthogonalisé, dans une base, la matrice de p qui reste sous forme de J_r , et je passe aux coefficients des diagonales qui me fournissent directement le résultat. Il me regarde droit dans les yeux et me dit qu'il ne comprenait pas. Je lui ai expliqué très clairement mes étapes de raisonnement ; il ne dit rien puis m'a dit que mon tableau était en désordre. Je l'efface et je réécris exactement les mêmes choses ; cette fois il me dit de passer.

Il me dicte la deuxième question. Un petit frisson me parcourt : je détestais le calcul différentiel et encore plus les projections. J'énonçai la définition d'une projection et le théorème de cours qui consistait à écrire

$$G = \{x \in F \mid g(x) = 0\}.$$

Mais avec g une fonction de classe $C^1(E, E)$. Là j'avais trois contraintes : je l'ai informé de l'existence d'un théorème plus fort, hors programme, concernant les extrémums liés à un nombre quelconque de contraintes.

À ce stade je ne voyais pas comment appliquer le théorème. Il m'a demandé ce que je savais sur les projections orthogonales ; je répondis $p^2 = p$, $p^* = p$. La première contrainte est non linéaire, par contre la seconde l'est. J'ai réduit le rang au calcul de la trace, qui semblait déjà assez maniable. Mais je bloquai ; il me laissa beaucoup de temps (25 min) seul sans rien dire. Il semblait aussi pressé de sortir : il rangeait ses affaires depuis mon entrée (j'étais le dernier à passer ce jour-là), ce qui me troubla.

Il me posa ensuite l'ensemble H des projections orthogonales h telles que $hp + ph = h$ et me demanda d'en calculer la dimension. Je commençai à chercher des conditions sur h , j'orthogonalisai et me retrouvai avec une expression que je savais comment simplifier ; il me dit de conjecturer le résultat. Je répondis que ce serait soit r^2 , soit $(n - r)^2$, soit $r(n - r)$. L'oral était terminé.

J'avais la haine en sortant : je pensais que j'aurais 8 ou 9, car je n'avais pas fait grand-chose, mais il m'a finalement mis 12.

Déroulement 15/20

Avant l'épreuve, une responsable des oraux est venue avec une étudiante en prépa et m'a dit qu'elle allait assister à mon oral. L'examineur était neutre, il m'a posé la première question oralement, que j'ai fait immédiatement. Quand il m'a posé la deuxième question, il m'a suggéré de travailler avec des matrices, j'ai proposé de considérer sans perte de généralité que $p = I_k$ et de travailler avec des matrices par blocs, chose qu'il a apprécié. Ensuite j'ai conjecturé l'espace tangent en prenant une matrice A dans G et en montrant qu'elle vérifie l'égalité de la première question (j'ai remarqué que l'exercice ressemblait à un exercice que j'ai vu en TD de M.Chabchi où il fallait faire un développement limité de la courbe C^1 au voisinage de 0). Il me restait 20 minutes quand il a annoncé qu'on passait à l'exercice 2. J'ai rapidement justifié l'existence de la série, puis j'ai utilisé le théorème de convergence dominée pour montrer que la limite vaut 0. Ensuite, vu qu'un ami avait eu cet exo à l'oral 1 ou 2h avant moi (voir ci-dessus, on partageait les exos des oraux dans un groupe whatsapp) et qu'on en a discuté, je savais qu'il fallait discuter selon $\alpha < -1$, $\alpha = -1$ et $\alpha > -1$ mais on n'a pas parlé des détails. J'ai juste dit à l'examineur que ça dépend de α et traité le cas $\alpha < -1$ car très facile. Ensuite il m'a dit dans les 5 minutes qui restent de traiter le cas $\alpha = -1$. J'ai fait une décomposition en éléments simples pour aboutir à la somme

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

, mais il ne restait plus de temps, il m'a demandé de dire qualitativement l'équivalent. J'ai répondu que ça me rappelait la série harmonique et que

$$\frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \approx \ln(n) - \ln(n+x) \approx -\ln(x)$$

mais le signe $-$ me gênait. Il m'a dit que c'était effectivement $\frac{\ln(x)}{x}$ et que l'oral est fini.

Énoncé 18

Soit $A \in \mathbb{N}^*$, $P(t) = t^2 + t + A$ tq
 $\forall n \in \{1, \dots, N-2\}$, $P(n)$ est premier.
 Montrer que pour $0 < k < N-1$

$$P(A+k) \text{ est premier} \Leftrightarrow k+1 \text{ n'est pas un carré parfait}$$

Déroulement 9/20

C'était mon premier oral de la semaine, et j'étais très stressée. En entrant dans la salle, l'examineur était installé dans un coin. Après m'avoir dicté l'énoncé, il est resté silencieux à sa place. Je me suis installée et j'ai proposé de commencer par l'implication directe, qui paraissait accessible si l'on empruntait la bonne démarche. L'idée était de calculer $P(t)P(t-1)$ et de l'exprimer sous la forme $P(x)$. Bien que cela constitue une indication implicite, cette approche simplifiait fortement le problème, et j'ai pu mener cette partie à terme. L'examineur étant très éloigné, il m'était difficile de savoir s'il était satisfait ou non. J'ai ensuite abordé la réciproque, qui s'est révélée plus délicate. Plusieurs pistes n'ont pas abouti, et j'ai finalement tenté un raisonnement par l'absurde. Après quelques minutes, l'examineur m'a donné sa première indication explicite : considérer le plus petit facteur premier de $P(A+k)$ et montrer que $p \geq A$. Je me suis alors engagée dans les calculs, mais l'examineur semblait très fatigué et peu attentif. Il me demandait parfois de réexpliquer des points déjà abordés et sortait même de la salle pendant quelques minutes. L'ensemble de ces éléments a accru mon stress, d'autant plus qu'il s'agissait de mon premier oral. Je n'ai pas réussi à terminer le raisonnement avant la fin du temps imparti. J'ai obtenu la note de 9, ce à quoi je m'attendais compte tenu de mes difficultés à avancer sans indications. Néanmoins, cet oral a constitué une expérience formatrice, qui m'a permis de mieux gérer les oraux suivants, notamment lorsque l'attitude de l'examineur est perturbante.

Énoncé 19

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, et $D \in \mathbb{N}$. Soient $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^d$, avec $p_0 = 0$.
 On dit que $\{p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$ s'il existe $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{R}^D$ tels que

$$\forall i, j \in \{0, \dots, m\}, \quad \|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|.$$

1. On suppose que $p_0, \dots, p_m$ se plongent isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels des p_i . Montrer que $\{p, p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$.
2. On suppose que $\|p_i - p_j\| \in \mathbb{Q}$ pour tous i, j . Montrer que $\{p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4D}$.

On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que

$$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Déroulement 14/20

L'épreuve a eu lieu samedi 17h30, après un horrible oral de physique le matin. L'examineur était plutôt sympathique, il m'a dit en souriant au début qu'il allait chercher son café après avoir énoncé la première question de l'exercice. Quand il est venu, j'ai proposé de considérer sans perte de généralité que $p = 0$, chose qui m'a demandé d'expliquer, puis j'ai fini la question sans problème. La deuxième question avait l'air trop difficile, j'avais aucune idée d'où pourrait venir le $4D$, chose que j'ai fait remarquer à l'examineur. Après un moment de silence où j'essayais de faire une récurrence, il m'a donné une indication : tout entier se décompose en somme de 4 carrés parfaits, il m'a demandé d'utiliser ce résultat pour traiter des cas particuliers, tout en me posant des questions générales sur les espaces vectoriels. Le temps s'est écoulé sans que je puisse finir l'exercice (j'avais proposé à la fin de faire une récurrence et de m'inspirer de ma résolution des cas particuliers, chose qu'il a approuvée, mais c'était quand même difficile). À la fin, je n'avais pas l'impression d'avoir fait grand-chose, mais deux de mes amis qui ont passé le même oral au même moment m'ont dit que la deuxième question était difficile. Il fallait juste être rigoureux et cohérent et proposer des démarches même non fructueuses mais raisonnables pour avoir une note correcte.

Énoncé 20

On pose :

$$U_n = \text{Card} \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a^2 + b^2 = n \right\}$$

Trouver un équivalent en $+\infty$ de :

$$\frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n}$$

Déroulement 6/20

Je rentre dans la salle, tellement stressé que ça se voyait dans l'écriture de l'énoncé, à première vue l'exercice me fait penser à utiliser quelque part la moyenne de Cesàro chose qui s'avère complètement fausse. Environ 7 ou 8 minutes sont passées et je retrouve la bonne piste, j'énonce mon idée au jury qui reste sans réaction jusqu'au moment où je me coince dans une étape de calcul et me fait la remarque qu'il faut prendre le tout et non pas partiellement (j'ai transformé le cardinal en somme de 1 sauf qu'on ne peut pas calculer et qu'il fallait prendre somme(de somme)) la moitié du temps s'est écoulée et je me retrouve avec une expression avec une partie entière, or pour calculer la limite y'avait rien d'autre à faire qu'encadrer la partie entière.

C'est ici que vient la deuxième intervention de l'examineur et me dit que oui c'est correct tout ça (avec un ton précipité) mais je veux que tu le fasses géométriquement chose qui me bloque, il essaya pour sa troisième et dernière indication de me dire de dessiner un cercle pour voir où ça mènera mais le temps s'est écoulé. Bon je pensais que l'oral c'était pas mal passé mais la note disait autrement. Le jury était respectueux mais peu interactif.

1.2 Exercices sans déroulements

Énoncé 21

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire.

- θ racine de P avec $\theta > 1$.
- $\text{Rac}(P) = \{\theta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Pour tout $x \in \text{Rac}(P) \setminus \{0\}$, on a

$$|x| < 1, \quad x \neq \frac{1}{\theta}, \quad x \neq 0.$$

On pose

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right), \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Montrer que f est D.S.E.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{Z}$ et $R = \frac{1}{\theta}$ est le rayon de convergence.

2 Maths U

Énoncé 22

Soient n, m deux entiers tq $n \geq m \geq 1$

On note $P_{n,m}$ l'ensemble :

$$\{P \in \mathbb{C}[X]_{\leq n} \mid X^m \mid P \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^*, P(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1\}$$

Trouver $\inf \{|z| \mid \text{tq } z \in \mathbb{C}^* \text{ et } \exists f \in P_{n,m} \text{ tq } f'(z) = 0\}$

Déroulement 12/20

Comme la majorité des oraux maths U cette année, l'examineur était quasiment muet lors des 40 premières minutes de l'oral. Je justifie l'existence de l'inf, je traite les cas triviaux $n = m$ et $n = 2, m = 1$.

Après cela j'ai dit à l'examineur que l'inf est peut être n/m mais ce serait trop facile. Finalement c'était bien cela.

Vers la fin j'ai pu aboutir au résultat, même si j'ai perdu beaucoup de temps avant de penser à une inégalité triangulaire.

Finalement, l'exercice était plus facile que ce à quoi je m'attendais pour un maths U et ce préjugé a affecté négativement ma manière de penser.

Énoncé 23

Soit $G_n = \{V \text{ tel que } V \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^n\}$.

Soit $\phi : G_n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall U, V \in G_n \quad \phi(U \cap V) + \phi(U + V) \leq \phi(U) + \phi(V)$$

Montrer qu'il existe un unique sous espace vectoriel v_0 de dimension maximale tel que:

$$\inf_{V \in G_n \setminus \{0\}} \frac{\phi(V)}{\dim V} = \frac{\phi(V_0)}{\dim V_0}$$

Déroulement 13/20

Dès mon entrée, le jury m'a annoncé : « C'est un oral d'Ulm, on ne parle pas. » Il m'a simplement donné l'énoncé sur une feuille. C'était un exercice d'algèbre, ce que j'ai beaucoup apprécié.

J'ai commencé par étudier des cas particuliers pour analyser les propriétés de la fonction (ce qui, de manière surprenante, n'apportait pas beaucoup d'informations). J'ai ensuite pensé à fixer une base, ce qui était la bonne idée. J'ai montré l'existence de l'infimum en le minorant par des quantités ne dépendant que de la base. L'idée était correcte, mais pas celle attendue par le jury.

Il a vérifié mes raisonnements ligne par ligne, affirmant que cela paraissait juste mais « bizarre », et que ce n'était pas la méthode espérée. Après réflexion, il a accepté mon approche et m'a demandé de continuer. Pour l'unicité, il suffisait de montrer la stabilité par addition, ce que j'ai établi par une double inégalité. Là encore, ce n'était pas la méthode attendue et nous avons passé beaucoup de temps à tout vérifier.

Pour l'existence de V_0 , j'ai envisagé une approche par suites, ce qui était bien l'idée souhaitée,

mais je n'ai pas eu le temps de la développer. Le jury m'a semblé à la fois sympathique et sceptique.

Énoncé 24

Soit f définie sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre:

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$
2. $\sum a_n \text{ ACV} \implies \sum f(a_n) \text{ ACV}$
3. $\sum a_n \text{ ACV} \implies \sum f(a_n) \text{ CV}$

Déroulement 14/20

Je n'avais pas d'attente par rapport à cet oral, je savais que c'était le plus dur, donc mal le passer ne voudrait rien dire. J'avais même hâte de voir l'exo que j'aurais. L'examineur me lit l'énoncé puis me dit qu'il va me laisser réfléchir et ne pas intervenir. Je me perds beaucoup au début (j'étais très proche du tableau et il n'y avait pas d'espace pour reculer). Je commence par le sens évident $1 \Rightarrow 3$, ensuite j'entame les deux sens restants, qui sont moins évidents. Je commence par $3 \Rightarrow 2$: l'idée est claire, la rédaction l'est moins. Il faut partitionner, créer une nouvelle série, bref, je rédige comme je peux ; l'examineur est finalement d'accord. Depuis qu'il m'a donné l'énoncé, il était silencieux et n'est intervenu qu'une fois pour me poser une question sur un passage qui relevait du cours, ce qui m'a étonné.

J'essaie alors de montrer le sens restant, $2 \Rightarrow 1$. J'écris la définition de ce que je veux montrer, et je commence à tâtonner. Après plusieurs tentatives en vain, je commence à donner des réflexions très floues et abstraites en essayant d'expliquer ce qui m'empêchait d'avancer, espérant que ma compréhension serait appréciée. Je me retourne vers l'examineur, qui grimace en essayant de comprendre ce que j'écrivais, ce qui ne me met absolument pas en confiance. Je décide de changer de piste, d'essayer d'utiliser le chapitre sur l'EVN. Il faut donc montrer qu'une application est continue, et ça impliquerait la compacité de l'ensemble d'arrivée, ce qui me manquait pour résoudre l'exercice. Mais la fonction que je définis semble trop tirée par les cheveux : trop d'indices, trop de dépendances, encore un truc trop compliqué, dans la continuité de ce que j'avais proposé avant. Le prof m'interroge sur un compact que j'avais donné ; je lui dis que je comprenais où il voulait en venir, qu'il avait raison et que je m'étais trompé. J'abandonne alors cette piste et je reviens à l'énoncé. Je n'arrive plus à avancer, et toujours aucune indication de l'examineur depuis le début de l'oral. Il parle enfin, mais pour me dire que le temps est écoulé.

Je n'espérais pas de bonne note ; la moyenne serait, à mon avis, méritée, puisque je n'ai rien montré qui soit vraiment difficile et que je n'ai pas avancé dans la preuve du cœur de l'exercice. Finalement, je suis agréablement surpris par un 14 : peut-être que tout l'effort fourni et le niveau d'abstraction atteint ont plu à l'examineur !

Énoncé 25

Trouver toutes les fonctions harmoniques et alpha homogènes à deux variables réelles.

Déroulement 10/20

L'oral de MATHS U est assez particulier dans la mesure où l'examineur ne vous parle qu'après au moins une trentaine de minutes. Durant cette période j'ai essayé d'utiliser une formule d'Euler par rapport aux fonctions homogènes et je suis passé aux complexes en posant x comme une partie réelle et y une partie imaginaire. Je n'ai pas pu en tirer grand chose. L'examineur intervient à 10 minutes de la fin et me demande quelle intuition j'ai pu développer durant la phase précédente. Je dis que j'ai utilisé les complexes et que le principe du maximum me permettrait éventuellement de déterminer la fonction sur un disque puis de généraliser par homogénéité. L'examineur ne réagit pas. L'oral se termine et j'obtiens la note de 10/20.

3 Maths L

Énoncé 26

Soit $f \in C^0$ et

$$f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_1^2 f(r) t^k dt \right| \leq C.$$

Montrer que $f \equiv 0$ sur $[1, 2]$.

Déroulement 12 / 20

L'examineur me donne le problème sans aucune question et me demande ce que j'en pense. Je dis que la fonction serait nulle. J'avais déjà vu le problème avec $C = 0$. Je me lance dans la démonstration avec l'approximation de Weierstrass. Ça marche uniquement dans ce cas particulier. On m'indique que pour le cas général j'aurais besoin d'une autre approximation. Je raisonne par absurde en supposant que la fonction est non nulle sur un intervalle $[a, b]$ mais je ne trouve pas l'approximation. L'examineur me demande pourquoi on intègre de 1 à 2 et pas de 0 à 1. Je dis qu'alors des fonctions non nulles seront solution. Il me demande un exemple de fonction qui n'est pas solution, je démontre alors que toutes les fonctions continues vérifient la propriété. Il me donne alors une suite de fonctions qui tend vers l'indicatrice de mon intervalle.

Je propose de la développer en série entière en 0 et d'utiliser l'inégalité. Je commence à développer les inégalités et à justifier les convergences, il ne reste pas beaucoup de temps l'examineur me demande de donner ma démarche. J'explique brièvement et l'oral se termine.

Énoncé 27

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des V.A i.i.d de $\mathbb{Z}^d$ tq $\mathbb{P}(X_1 = e_j) = \mathbb{P}(X_1 = -e_j) = \frac{1}{2d}$, où on note : e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Soit $p_d = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } S_n = 0)$.

On admet que $p_3 < 1$.

Montrer que $p_d \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0$.

Déroulement 11/20

Je prends quelques minutes pour bien m'approprier l'exercice qui, à première vue, m'a paru vraiment difficile (spoiler : c'est effectivement difficile). En regardant le résultat admis, je pense tout d'abord à une récurrence, en essayant de trouver une relation entre p_d et p_{d+1} , sachant que $p_3 < 1$, peut-être que ça donnerait quelque chose. Après plusieurs essais et face à un examinateur toujours silencieux, je change d'approche. Toujours pour pouvoir utiliser l'information sur p_3 , je propose de regrouper les variables aléatoires trois par trois et de travailler avec des variables aléatoires dans $(\mathbb{Z}^d)^3$. L'examineur intervient enfin en disant que c'est une bonne idée, mais qu'il faut créer ces variables aléatoires tout en restant dans le cadre de marches

aléatoires. C'est seulement vers les dernières minutes que je parviens à comprendre ce qu'il a voulu dire par là et que je propose la bonne suite de variables aléatoires. L'examineur annonce alors la fin de l'oral. Même si je n'ai concrètement pas fait grand chose j'étais quand même assez content d'avoir été actif tout au long de l'oral.

Énoncé 28

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que $\forall i, j \quad a_{ij} \in \{-1, 1\}$

On considère également deux vecteurs $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ de $\{-1, 1\}^n$.

1. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ (indépendante de n) tel que:

$$\forall A \in \{-1, 1\}^{n+n} \quad \exists X, Y \in \{-1, 1\}^n \quad \text{Tr}(A.(XY^T)^T) \leq cn^{\frac{3}{2}}$$

(on pourra chercher à contourner la contrainte d'indépendance entre X et Y)

2. Les suites X et Y réalisant ce minimum (ou maximum) sont-elles uniques? Existe-t-il une constante universelle $K > 0$ telle que:

$$\forall A \in \{-1, 1\}^{n+n} \quad \max_{x_i, y_i \in \{-1, 1\}} \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \leq K n^{\frac{3}{2}}$$

Cette borne est-elle optimale?!

Déroulement 11/20

L'épreuve était assez difficile. L'interrogateur m'a clairement fait comprendre qu'il n'interviendrait pas au cours de l'exercice. Après plusieurs pistes erronées, j'ai fini par trouver une approche pertinente (un raisonnement probabiliste), ce qui m'a permis de résoudre la première question et d'avancer un peu sur la deuxième. Malheureusement, je n'ai pas eu le temps d'aller plus loin.

Énoncé 29

Soient $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ et $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (avec $\|\cdot\|$ la norme 2).

Soit $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S} \text{ continue tel que } \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$.

Montrer que $\exists \theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $\forall t \in [0, 1] \quad \gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$.

2. Soit $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2$.

On dit que γ_1 et γ_2 sont homotopiques si et seulement si $\exists h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue tel que:

- $\forall t \in [0, 1] \quad h(t, \cdot) \in \Gamma$.
- $h(0, \cdot) = \gamma_1$.
- $h(1, \cdot) = \gamma_2$.

Est-ce que $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2(t) = e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$ sont homotopiques?

3. Existe-t-il $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{S}$ continue tel que $F(x) = x$ pour $x \in \mathbb{S}$?
4. Soit $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ continue.
Montrer que f admet un point fixe.

Déroulement 19/20

L'oral dure 45 minutes. Le jury commence par rappeler que l'intérêt de l'oral est de communiquer, de s'exprimer et de montrer ses idées, même si l'on ne connaît pas forcément la réponse exacte (ce qui était bien le cas pour cet oral, contrairement à ceux de l'X). On définit les deux ensembles classiques B et S , ainsi que l'ensemble Γ .

La première question avait déjà été abordée en classe, mais dans le cas $f \in C^1$ (théorème de prélèvement faible), ce que j'ai démontré d'abord. J'ai ensuite proposé d'étudier ce cas simple, puis de généraliser au cas f continue par approximation avec des fonctions C^1 appartenant à Γ . Le jury m'a interrompu en disant que c'était une bonne réflexion mais que ce n'était pas l'intérêt de l'oral, et m'a demandé de passer à la question suivante.

La deuxième question m'a posé davantage de difficultés. J'ai affirmé que les deux objets en question étaient homotopiques, mais en tentant de le démontrer, j'ai compris que la notion était liée au nombre de « chemins » parcourus pour aller de 0 à 1 en revenant au point de départ. Dans notre cas, les deux chemins — rester immobile ou faire un tour — n'avaient pas le même nombre de tours, ce qui reflète bien une absence d'homotopie. C'est ce que j'ai expliqué, puis j'ai démontré que les deux fonctions n'étaient pas homotopiques en raisonnant sur la variation de θ de 0 à 2π . Le jury a apprécié cette réflexion et m'a donné une troisième question, que j'ai rapidement résolue par intuition en posant la bonne fonction.

Il m'a ensuite proposé une quatrième question que je n'ai pas su relier directement à l'énoncé, mais j'ai décrit quelques pistes possibles. En conclusion, il m'a présenté l'idée clé : raisonner par l'absurde en considérant l'intersection de la demi-droite reliant x et $f(x)$ avec la sphère unité, montrer que cette intersection est continue et coïncide avec l'identité sur S . On termine alors en appliquant la troisième question.

En résumé, le jury était très bienveillant et cherchait surtout à savoir si l'on avait des idées pertinentes, même si la méthode exacte n'était pas trouvée immédiatement. C'était un oral très amusant et instructif, à l'inverse de ceux de l'X qui semblent en général plus déprimants.

Énoncé 30

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ tel que χ_A est irréductible et soit $B \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $B^{-1}AB$ commute avec A mais B ne commute pas avec A .

Montrer que B^2 est scalaire.

Déroulement 13/20

C'était mon tout premier oral, et j'étais évidemment très stressé. Le moment était venu d'entrer dans la salle : l'examineur a appelé mon nom, puis il a fermé la porte derrière moi. Ensuite, il a lu un petit texte disant quelque chose comme : « L'oral n'est pas forcément simple ; ce n'est pas grave si tu n'arrives pas à résoudre le problème seul, je te donnerai des indications au fur et à mesure. »

Puis il m'a demandé d'écrire l'énoncé au tableau. Au début, j'étais tellement stressé que je

ne savais même pas par où commencer. Ensuite, j'ai commencé à manipuler deux matrices, et au bout d'un moment j'ai compris que le résultat revenait à montrer que $\text{Tr}(B) = 0$. Je l'ai dit à l'examineur, mais il m'a répondu que cela ne lui paraissait pas correct. Après un moment de discussion, j'ai réussi à lui démontrer que si, mais il m'a dit que cela ne me servirait probablement pas beaucoup et que je ferais mieux de changer de méthode.

Il m'a alors donné un indice, et à partir de là ça a été très difficile ; j'ai vraiment eu du mal. Je voulais tellement ENS de Lyon que je me suis dit que j'allais avoir une mauvaise note. Mais au final, ce n'était pas si terrible que ça.

Énoncé 31

Soit $(r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Soit

$$p_{i,j} = \begin{cases} r_i & \text{si } j = i - 1, \\ 1 - r_i & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\forall i_0 \in \mathbb{N}$, soit $(X_k^{i_0})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.d telle que $X_0^{i_0} = i_0$ et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m \{X_k^{i_0} = i_k\}\right) = \prod_{k=1}^m p_{i_{k-1}, i_k}, \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$T_i^j = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k^i = j\}.$$

Soit $b \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq b$, on définit

$$\hat{p}_i = \mathbb{P}(T_i^0 < T_i^b).$$

1. Calculer $\hat{p}_i$ en fonction de $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec

$$\gamma_k = \prod_{j=1}^k \frac{1 - r_j}{r_j}.$$

2. Donner une C.N.S. sur $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pour que

$$\mathbb{P}(T_i^0 < +\infty) = 1.$$

Déroulement 17/20

J'ai pris un peu de temps pour comprendre l'énoncé et les notations en essayant de prendre des exemples, mais l'examineur m'a demandé de me lancer dans le calcul de $\hat{p}_i$. J'ai trouvé une somme et j'ai commencé à lui expliquer que les termes non nuls sont ceux pour lesquels $i_1 = i - 1$ ou $i_1 = i + 1$. Il m'a proposé de trouver une relation de récurrence, ce que j'ai fait, puis j'ai calculé $\hat{p}_0$ et $\hat{p}_b$ pour obtenir $\hat{p}_i$ après deux télescopes. Pour la deuxième question, j'ai proposé de faire tendre b vers $+\infty$, et le temps s'est écoulé.

Énoncé 32

Soit $n \in \mathbf{N}^*$

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\text{rg}(AB - BA) = 1$

Montrer que A et B sont co-trigonalisables.

Déroulement 11/20

Une preuve que même pour les ENS, il peut y avoir des exercices classiques! Je n'avais jamais vu cette exercice mais apparemment il est connu. J'arrive à la salle en avance et l'examineur me fait rentrer car le candidat qui passait avant moi ne s'était pas présenté. Il choisit un exercice d'une liste d'exercices qu'il avait sur son ordinateur (je ne sais si c'est une mise en scène mais il a parcouru tous les exercices pour tomber sur celui-là comme si c'était par hasard alors qu'en principe les examinateurs se mettent d'accord sur l'exercice à donner pour les candidats d'un même créneau) et me donne l'énoncé. Je trigonalise A et souhaite trouver une base convenable pour trigonaliser B , en écrivant en blocs, je souhaite trouver des relations pour trouver P , sauf que ne trouve rien. 15 minutes étaient passées et l'examineur me dit enfin de penser à la démonstration dans le cas où le rang est 0. Je m'oriente donc vers un raisonnement par récurrence tout en trouvant un espace stable sauf que je bloque vraiment et que je prends vraiment du temps à trouver les deux candidats possibles suivant deux cas qui se présentent (je ne me rappelle plus vraiment de ma résolution). Bon, je passe à la récurrence et je conclus difficilement grâce à l'aide de l'examineur. Je finis en avance (être entré avant mon heure de passage ne m'a pas aidé au final) et l'examineur m'invite à sortir. Lorsque je suis sorti, et malgré les difficultés, j'étais satisfait car j'avais pu trouver de moi-même les deux cas qui se présentaient.

4 Maths SR

Énoncé 33

On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

1. Explicitez F_n
2. Montrer que $F_{p+q} = F_p F_{q-1} + F_q F_{p+1}$
3. Calculer $\text{pgcd}(F_n, F_m)$

Déroulement 10 / 20

Exo classique, examinateur sympa. Il me demande de temps à autre de justifier ce que je fais (algorithme d'Euclide, suite récurrente d'ordre deux). Je pense avoir perdu des points à cause de la rapidité d'exécution, j'ai pris deux nom différents pour la même variable ce qui a ralenti ma progression.

Énoncé 34

1. Démontrer le théorème de Borel-Lebesgue.
2. Soit une collection de boules, montrer qu'il existe une sous-collection disjointes tel qu'en triplant leurs rayons, elles recouvrent l'ensemble des boules.
3. 3 autres questions

Déroulement 6/20

Il faut savoir qu'il faut aller de Montrouge à l'ENS Paris-Saclay pour cet oral. J'arrive à l'université 1h30 avant l'oral et mon téléphone étant déchargé, je me suis occupé en me promenant dans les infrastructures de l'ENS Paris-Saclay qui étaient bien plus jolies que celles d'ULM. J'ai même discuté avec des Normaliens qui étaient vraiment cools. Cette attitude de touriste s'est reflétée dans ma note à cette épreuve haha qui est en principe la plus simple de celles des ENS. Je peux d'abord me défendre en disant que l'énoncé était vraiment farfelu. Je pourrais aussi dire que l'examinateur m'agaçait avec des définitions simples et sur des passages simples que j'effectuais. Je pourrais aussi dire qu'un examinateur qui ne note rien et qui vous fixe constamment vous stresse. Mais je ne dirai rien... car je suis de bonne foi (non haha). Bref, la première question était vraiment du charabia, des boules par ci des collections par là. Alors que l'examinateur me laisse 5 à 10 min pour penser à l'exercice, il revient sans que je n'ai rien écrit, il me dit ce qui me posait problème et je lui répondis que je n'arrivais pas à formaliser l'énoncé, il me laissa plus de temps avant de m'expliquer davantage ce que voulait dire l'énoncé. Je compris alors qu'il s'agissait de démontrer le théorème de Borel-Lebesgue et je pris alors pas mal de temps à me rappeler de la démonstration complète (je déconseille de vouloir impérativement se rappeler d'une démonstration lors d'un oral). Il me restait 20 minutes pour la deuxième question qui me paraissait incorrecte. J'essayais alors de formaliser l'énoncé pour que les idées soient plus claires sauf que je n'aboutissais à rien. Pendant les dernières minutes de l'oral j'essayais seulement de convaincre l'examinateur que l'énoncé était faux sans que cela ne soit concluant. Bref, si je peux retenir quelque chose de cet oral c'est

qu'il m'a permis d'avoir un premier aperçu du plateau de Saclay mdr.

Énoncé 35

1. Déterminer le sens de convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$, $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$, et $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$
2. Montrer que pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $N \geq 1$, il existe des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

3. En déduire le sens de convergence de $\sum \frac{1}{n \sin(n)}$

Déroulement 16/20

C'était l'oral le plus facile que j'ai passé, très classique, mais il était ponctué de questions de l'examineur sur le cours. J'ai terminé pile dans le temps imparti et j'ai pu lui montrer que j'étais réellement un bon candidat, ce qui se reflète clairement dans la note que j'ai obtenue.

5 Maths ULSR

Énoncé 36

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec $f(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)).$$

1. Montrer que f^* est convexe.
2. Si f est convexe et $f \in D^1(\mathbb{R})$, montrer que $f^{**} = f$.
3. Si f est strictement convexe et $f \in \mathcal{C}^2$, montrer que f^* est dérivable et que

$$y' = f(x) \iff y = (f^*)'(x).$$

Déroulement 13/20

Examinateur silencieux. Je perds un peu de temps au début, le temps qu'il cherche un feutre pour le tableau. Il me dicte l'énoncé oralement. Au départ, j'étais déstabilisé par une définition assez étrange, et surtout intrigué par les points où f est infinie.

La première question est facile : je la résous rapidement. Ensuite, pour la deuxième question, j'ai immédiatement reconnu qu'il s'agissait d'établir une double inégalité. Je lui expose mon idée, mais il reste inerte.

Après pas mal d'essais au tableau, j'ai tenté d'utiliser la convexité dans le sens $f^{**} \leq f$. Ce n'était pas vraiment nécessaire et cela m'a fait perdre pas mal de temps. Finalement, il me demande précisément de montrer $f^{**} \leq f$. Je le regarde en mode : « C'est ce que j'essaie de faire depuis le début... »

Sans aucune indication donnée, je finis par résoudre cette question après quelques manipulations algébriques. Il me propose la troisième question à cinq minutes de la fin. Je conjecture alors

$$f^{**}(y) = yf'(y) - f^*(f'(y)),$$

et l'oral s'achève là.

Si cela avait été un oral de l'X plutôt que de l'ENS, j'estimerai l'avoir plutôt bien réussi. Mais j'ai très peu communiqué avec l'examinateur. Bref : un oral moyen, du point de vue de l'ENS.

Énoncé 37

Soient A, B deux probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$

$$d(A, B) = \max_{s \in E} |A(s) - B(s)|$$

1. Montrer que

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |A(x) - B(x)|.$$

2. Soient $X \sim A$ et $Y \sim B$.

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \geq d(A, B).$$

3. Montrer qu'il existe un couplage (X, Y) de A et B tel que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = d(A, B).$$

Déroulement: 14/20

L'oral se déroule dans un petit bureau sous la canicule et l'examineur me demande si cela ne me dérange pas qu'il allume le ventilateur. Puis il me demande la définition d'une probabilité. Il pose l'exercice. Je considère l'ensemble des événements où $A(x) < B(x)$ et son complémentaire. Je montre une première inégalité et je conclus que la seconde n'est pas absurde.

Pour la seconde question, je tente d'exprimer $\mathbb{P}(X \neq Y)$ en espérant utiliser la relation de la question précédente. L'examineur me demande alors de schématiser ce que cela signifie en termes d'ensembles pour revenir à la définition initiale. En prenant un sous-ensemble inclus dans $\{X \neq Y\}$, cela fonctionne.

Pour la dernière question, je reprends ma majoration et cherche la condition d'égalité. L'examineur me demande plutôt de vérifier avec des lois usuelles. Pour des lois de Bernoulli, j'obtiens $p = 1$ ou 0 , mais je n'ai plus assez de temps pour tenter d'autres pistes.

Déroulement 15/20

Je suis entré dans la petite salle, et il a commencé par des questions de cours que j'avais apparemment ratées (j'avais oublié une condition dans la définition de probabilité). La première question était facile, je l'ai faite rapidement. Pour la deuxième, j'ai reçu tellement d'aide de sa part que je n'arrivais plus à visualiser clairement la question. Pour la troisième, j'ai essayé de traiter quelques cas particuliers que nous avons discutés ensemble, et le temps est passé. Je pensais que j'allais avoir un 12 ou quelque chose comme ça... mais j'ai eu 15!

Énoncé 38

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

On définit

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{cond}(M) = |||M||| \cdot |||M^{-1}|||$$

1. Calculer $\text{cond}(M)$ pour $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\text{cond}(M) > 1$ pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $\text{cond}(M) = \text{cond}(M^T)$.
3. Montrer que

$$\forall (A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2 \quad \text{cond}(A + B) \leq \max(\text{cond}(A), \text{cond}(B)).$$

Déroulement 12/20

L'oral s'était plutôt bien passé. Les deux premières questions étaient simples. Pour la troisième, il fallait travailler sur la norme triple et établir des résultats classiques à son sujet. Enfin, pour la dernière question, l'examineur a refusé de donner une indication, et il semblait

clair que la solution passait par la formule de Fisher.

Énoncé 39

Soit $f \in D^2([0, 1])$ non nulle telle que

$$f'' + af' + bf = 0,$$

où $a, b \in C^0(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Soient $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $a > b$. On considère des solutions $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ non nulles des équations :

$$\begin{cases} f'' + af = 0, \\ g'' + bg = 0. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $t_0, t_1 \in [0, 1]$ tels que $g(t_0) = g(t_1) = 0$. Montrer qu'il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $f(t_2) = 0$.

3. Soit $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f_λ l'unique solution de

$$\begin{cases} f_\lambda'' + (p(t) + \lambda)f_\lambda = 0, \\ f_\lambda(0) = 0, \\ f_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$$

On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de f_λ dans $[0, 1]$.

- Montrer que $N(\lambda)$ est strictement croissant en λ .
- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} N(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} N(\lambda)$.

4. On pose :

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f_\lambda(1) = 0\}.$$

Montrer que $S = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite strictement croissante. On admet que $(\lambda, t) \mapsto f_\lambda(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Déroulement 16/20

C'était ma première épreuve orale en France, et je tombe directement sur un sujet d'équations différentielles : un début exigeant, mais cohérent pour un oral à l'ENS. J'étais pourtant très confiant, bien préparé, et donc pas stressé. La première question était extrêmement classique : un résultat qu'on voit généralement plusieurs fois en cours et en TD. En quelques minutes, j'avais rédigé une solution propre et j'ai pu l'expliquer clairement au jury. La suite m'a semblé moins évidente : il s'agissait de comparer les solutions de deux équations différentielles « proches ». J'ai hésité avant d'introduire le Wronskien, car il s'applique en principe à deux solutions d'une même équation, mais comme les équations étaient très similaires, j'ai expliqué au jury que cet outil pouvait tout de même nous aider à avancer. Cette prise d'initiative a été

bien accueillie, et c'est d'ailleurs un conseil que je retiens : discuter avec le jury, rendre son raisonnement vivant, permet de montrer une véritable intuition mathématique et d'éviter que le jury pense qu'on récite une solution apprise, même si ce n'est pas le cas. Après quelques développements, j'ai obtenu le résultat attendu.

Pour la suite, j'ai été bloqué un instant, notamment concernant le comportement de la solution quand λ tend vers moins l'infini. J'ai commencé par un raisonnement qualitatif basé sur la forme de l'équation : comme $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$, et que f'' est positif au voisinage de 0, j'ai tracé un schéma pour décrire l'allure de la solution. Le jury a apprécié cet argument géométrique, qui donne une vision claire du phénomène avant d'entrer dans la justification rigoureuse. Pour la limite quand λ tend vers plus l'infini, j'étais à nouveau bloqué ; le jury m'a suggéré de commencer par un cas particulier simple. J'ai alors pris la fonction p constante, car dans ce cas on peut obtenir une expression explicite de f_λ . Après avoir résolu cette situation, j'ai retrouvé le résultat général en m'appuyant sur ce cas simple et sur la question précédente. Pour la dernière partie, il ne restait qu'une dizaine de minutes. La question n'était pas évidente, et je ne voyais pas comment utiliser l'indication donnée. J'ai exploré plusieurs pistes sans aboutir, et le jury n'a pas ajouté d'indices. L'épreuve s'est terminée ainsi. Je suis tout de même ressorti satisfait de ma performance, d'autant plus que j'ai rencontré ensuite un élève de Ginette qui, lui, était resté bloqué dès la deuxième question.

Énoncé 40

1. Montrer que $f : x \rightarrow \int_0^l \exp(ixt + i\frac{t^3}{3}) dt$ est de classe C^2 pour $l > 0$.
2. Montrer que $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(ixt + i\frac{t^3}{3}) dt$ est de classe C^2 .
3. Montrer que f définie dans la question précédente est à valeurs réelles.

Déroulement 10/20

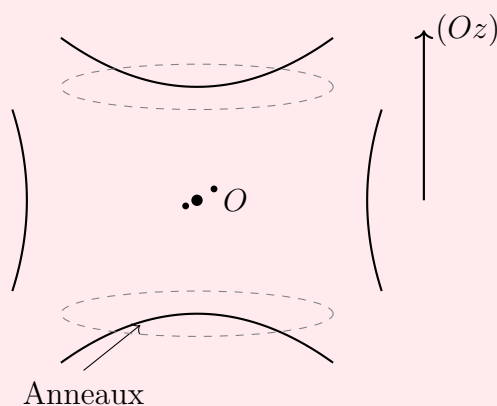
Mon premier "vrai" oral tous concours confondus, j'arrive très tôt à l'ENS Ulm et j'attends même un peu trop. Au final, mon oral est déplacé de 20 minutes à cause d'une salle qui ne s'ouvrait pas. Bref, je rentre stressé mais l'examinateur, sympathique (comme tous les examinateurs des ENS d'ailleurs) me rassurait que l'on allait commencer par des questions simples et que la difficulté allait graduellement augmenter. Et en effet, la première question est d'une simplicité déconcertante. L'examinateur me donne alors la deuxième question qui est moins facile. Je commence, pour montrer que l'intégrale est bien définie tout d'abord par vouloir développer la forme exponentielle, sauf que l'examinateur m'affirme que cela n'allait mener nulle part et que l'expression à l'intérieur du "cosinus" ou du "sinus" est bien trop compliquée. Il me propose de faire apparaître une décroissance. J'effectue alors une intégration par partie en multipliant et divisant par la dérivée de ce qui est à l'intérieur de l'exponentielle. Il encourage cette idée et je parviens à montrer que f est bien définie et par la même occasion qu'elle est continue. Je tombe sur une expression de f sous forme d'une somme (si je me rappelle bien), un membre qui se comporte bien et un autre sur lequel j'étudie le fait qu'il soit C^2 . A ce niveau, les calculs sont horribles mais je tiens bon et je conclus alors qu'il reste 5min à l'oral. L'examinateur me donne la dernière question. Je dis directement qu'il faudrait trouver une équation différentielle vérifiée par f et je vois les calculs de la question précédente en disant qu'ils étaient beaucoup trop moches pour qu'on tombe sur quelque chose de correct. L'examinateur note ce que je dis et m'indique que l'oral était terminée. Franchement, je

savais que je n'avais pas été nul mais qu'en même temps je pouvais faire plus. Bref, un bon entraînement pour les autres concours qui suivaient.

6 Physique U

6.1 Exercices avec déroulement

Énoncé 1



Au voisinage de O , le potentiel est donné par :

$$V = \frac{V_0}{4d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

Question : Comment peut-on piéger un électron (e^-) ?

Déroulement 14.5 / 20

C'était mon premier oral mais je n'étais pas très stressé en fait, comme par exemple avant mon oral de physique à l'X. En entrant dans la salle, le schéma était déjà tracé sur le tableau, l'examinatrice m'a donné l'énoncé et m'a laissé un peu de temps pour réfléchir. J'avais l'impression d'avoir déjà vu l'exo mais j'avais oublié, donc ce n'était pas un avantage du tout et cela s'est confirmé après. Pour gagner plus de temps sans pour autant donner l'impression que je bloque, je commence par écrire le PFD sur un électron soumis à l'effet de la force électrostatique dérivant du potentiel V . J'en déduis que le confinement n'est pas possible parce que V_0 étant constant donne lieu à une équation différentielle à solution divergente sur au moins une coordonnée. Je propose alors, et cela m'a fait perdre du temps, de considérer le même potentiel, sauf qu'au lieu de V_0 , on considère plutôt une fonction sinusoïdale qui alterne de signe, dont je vais essayer de trouver par exemple une contrainte sur la période de telle sorte que ce changement de signe confine l'électron. J'ai dit cela mais l'examinatrice ne me semble pas convaincue. Là, j'ai réfléchi un peu à une autre méthode de confinement et j'ai eu l'idée d'introduire un champ B uniforme et je me suis rappelé du fait que le champ fait tourner l'électron autour de sa droite d'action et donc cela peut marcher si on combine les deux champs. L'examinatrice semble cette fois convaincue mais il faut faire des calculs bien sûr. J'ai dit que la direction de B dépend du signe de V_0 . Je prends $V_0 > 0$, et je continue les calculs. En fait il y avait un problème d'une valeur maximale de B à trouver. J'ai évalué cela en donnant des ordres de grandeur. L'examinatrice me pose alors des questions sur le champ magnétique terrestre et son ordre de grandeur, celui-ci pouvait perturber l'électron. Et l'oral s'est terminé. La note me semble correcte vu que je maîtrise très bien l'électromagnétisme, mais quand même l'exo n'était pas très difficile pour aspirer à une excellente note. D'ailleurs l'examinatrice était très sympa.

Énoncé 2

On considère une plaque à induction sur laquelle est posée une casserole qui contient 1 litre d'eau.
Calculer le temps d'ébullition.

Déroulement 8.5 / 20

Assis dans la salle d'attente avec d'autres personnes, une responsable de l'organisation des oraux m'informe que trois personnes souhaitent assister à l'oral (elles sont d'ailleurs assises à côté de moi). Elle me demande si je donne mon accord, et je réponds que oui.

Aux oraux de l'ENS, on vous demande (normalement) votre accord. À l'X, ce n'est pas certain. Si vous ne visez pas les ENS, je vous recommande d'accepter la présence de spectateurs : cela vous évitera peut-être de trop stresser à l'X.

Lorsque j'entre dans la salle, l'examinatrice me donne les consignes : l'oral dure une cinquantaine de minutes et le candidat a le droit de rester silencieux ; aucun silence ne sera sanctionné. Cette dernière consigne est, à mon avis, assez trompeuse : si vous ne parlez pas, l'examineur ne peut pas savoir à quoi vous pensez. Si vous réussissez l'exercice, tant mieux ; mais dans le cas contraire, il ne saura pas quelles pistes de réflexion vous avez explorées. C'est précisément ce qui m'est arrivé durant cet oral, où je n'ai presque pas parlé.

Je vois qu'il s'agit d'induction. Je pense à la loi d'Ohm dans la casserole et à la détermination du champ électrique grâce à la formule de Maxwell-Faraday. (Je n'écris rien pour l'instant, je réfléchis seulement aux étapes de résolution du problème.)

Ensuite, je me tourne vers l'aspect thermique et je pense à l'équation de la diffusion, que j'écris cette fois au tableau, sans rien dire. Je me demande comment je vais l'utiliser, sa résolution étant quasi impossible sans simplification. Je reste bloqué assez longtemps là-dessus. J'envisage d'appliquer le premier principe au système eau + casserole, mais je me dis que la température n'est a priori pas uniforme. J'écarte donc cette piste et je n'ai pas l'idée de faire cette hypothèse (sûrement à cause du stress : on répète toujours, durant la préparation aux oraux, que les exercices de Physique U sont impossibles à résoudre, et cela tétanise le jour J. En réalité, ceux qui se permettent de dire ça ne sont même pas admissibles).

L'examinatrice me demande alors de proposer une expression pour le champ magnétique et me fait clairement comprendre qu'il fallait l'écrire depuis le début. J'écris donc le champ sinusoïdal et je calcule le champ électrique.

Ensuite, elle m'indique que la diffusion ne nous intéresse pas. Je pars donc sur l'hypothèse d'une température uniforme, puis j'utilise le premier principe de la thermodynamique pour déterminer le temps d'ébullition.

J'étais assez déçu du déroulement, mais paradoxalement content d'avoir commis l'erreur de ne pas intégrer : je savais ainsi que je ne la reproduirais pas dans les prochaines épreuves.

J'ai eu 8,5/20. C'est la pire note que j'ai eue à l'oral (avec Maths L). Et ce sont d'ailleurs les seules épreuves où je n'ai quasiment pas interagi avec le jury. Peu importe l'exercice qu'on vous donne, rester silencieux pendant la majeure partie de l'oral est, je pense, la pire erreur que vous puissiez commettre.

Énoncé 3

On considère une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Le vide est-il dispersif vis à vis de l'onde?
 Quelle est la vitesse de propagation de l'énergie?

Déroulement 7.5/20

Oral très calculatoire. Il y avait 4 SUPs qui étaient venus assister à l'oral. J'ai perdu beaucoup de temps avant de retrouver la formule vectorielle de $\text{div}(\text{div}(\cdot))$.
 Le coup de grâce était d'avoir confondu vitesse de groupe et vitesse de phase, erreur si grave que l'examinatrice, pourtant très active durant tout l'oral, a subitement changé d'attitude. Je n'ai malheureusement réalisé cette erreur qu'en sortant de la salle. Ce genre d'incident peut arriver avec le stress, mais cela m'a poussé à être plus vigilant pour les oraux qui ont suivi.

Énoncé 4

Un champ électrique E (OPPH) traverse une cavité de longueur L où règne un champ magnétique B uniforme stationnaire transverse polarisé. Montrer que le champ E n'est plus une OPPH à la sortie de la cavité.

Déroulement 11.5/20

C'était un oral d'électromagnétisme, assez similaire à des exercices vus pendant l'année. J'ai commencé par expliquer qualitativement ce qui se passe au niveau des électrons à la surface de contact. J'ai appliqué le PFD, une démarche plus abordable que l'utilisation directe des équations de Maxwell. Le jury a confirmé que c'était la bonne méthode.

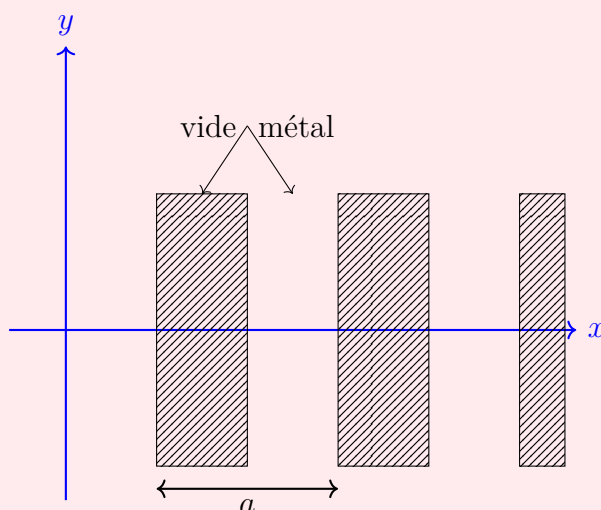
J'ai obtenu un système d'équations couplées vérifiées par E et j . Après résolution avec les nombres complexes, en supposant une forme pour E , on aboutit à une contradiction avec la forme OPPH. On en déduit que le champ ne peut pas être une OPPH.

C'était la fin de l'oral, et le jury semblait avoir validé ma méthode. Je pensais donc avoir une bonne note, bien supérieure au 11,5 que j'ai finalement eu.

Énoncé 5

On considère un micro-ondes dans lequel règne un champ électrique uniforme de fréquence $f = 2,5 \text{ GHz}$. On modélise la porte du micro-ondes par une grille métallique de période a (une répétition de tiges métalliques de largeur $a/2$ et de vide de largeur $a/2$), infinie suivant y .
 On admet que le champ à la sortie du micro-ondes est orienté suivant y .

Question : Quantifier le champ qui « s'échappe » du micro-ondes.



$\vec{E}(z = 0^+)$ suivant $\vec{u}_y$

Déroulement 17.5/20

L'examineur était très sympathique. Il m'accueille avec un grand sourire, me félicite pour mon admissibilité et me lit quelques règles générales à propos de l'oral, dont la plus importante était de suivre ses indications, qui ne seraient en aucun cas une fausse piste, mais auraient uniquement pour but de m'aider et d'évaluer mes connaissances.

Après son long discours, il commence à me citer l'énoncé, toujours souriant, allant même jusqu'à plaisanter. Il me demande si j'avais en tête l'image de la porte d'un micro-ondes. Je réponds que non, puisque je n'en ai jamais eu. Il m'explique alors qu'elle contient plein de petits trous, que l'on va modéliser par des barres pour des raisons de simplicité, puis il lance le chronomètre.

Je prends d'abord une ou deux minutes pour bien comprendre les données, essayer de deviner la réponse attendue et le chapitre correspondant, avant de commencer à parler. Je sais qu'il ne faut pas que je me laisse guider par l'examineur : bien qu'il soit fort sympathique, ses indications me coûteraient des points précieux. Je commence donc à parler.

Il me pose la question : « Que se passera-t-il physiquement ? » Pour ne pas prendre le risque de dire des bêtises, je procède par élimination. Je commence par éliminer la diffraction, en le justifiant par la direction du champ. Et c'est la seule piste qui m'apparaît. L'examineur insiste en me posant la même question, à laquelle je n'ai pas de réponse, et je le dis.

Ces premières dix minutes ont été marquées par de longues phases de silence, qui, petit à petit, effaçaient le sourire de l'examineur — du moins à mes yeux — ce qui me stressait encore plus. Je propose des pistes tant bien que mal, dont je me dissuade moi-même.

L'examineur décide alors de me donner la première indication : utiliser les symétries du problème (ce qui aurait dû être un réflexe pour quelqu'un qui avait bien préparé ses oraux). Je donne les symétries classiques, puis la périodicité, ce qui nous permet d'étudier un seul mode grâce aux séries de Fourier. Je vois que cela lui redonne le sourire.

Il m'aide à trouver l'expression du champ en fonction de x et de z , puis me demande ce qu'il faut faire par la suite. Je bloque encore. Je parle d'une méthode énergétique ; il me dit que c'est intéressant mais que l'on le fera à la fin. Puis je dis finalement qu'il est temps d'utiliser l'équation de d'Alembert.

C'est là que j'accélère vraiment, puisque c'est classique. Je trouve la condition des modes propagatifs, puis l'application numérique montre qu'aucun mode ne peut être propagatif, ce qui

signifie que l'onde est évanescence. Il me dit alors qu'un bon quantificateur de l'« échappement » serait la distance caractéristique d'atténuation. Je propose de calculer une moyenne, mais il me dit que le mode fondamental suffira.

Ensuite, il me pose des questions sur l'aspect énergétique, ce qui ne me pose aucun problème : il suffisait de savoir faire les calculs montrant qu'une onde évanescence ne transporte pas d'énergie.

Puis il me repose la fameuse question qu'il a posée tant de fois durant l'oral : « Que s'est-il passé physiquement ? Quel est le nom du phénomène ? »

Je n'ai toujours pas de réponse, et je pense que cela a peut-être joué en ma faveur, car l'examineur est alors sûr que je n'ai jamais vu l'exercice avant. Il me dit que c'est de la polarisation. Je réponds « ah oui, c'est vrai », comme si cela allait changer quelque chose, puis l'oral se termine.

Je sors soulagé que cet oral soit fini, mais très déçu de ma prestation. Je me dis qu'un 12 serait généreux de la part de l'examineur, dont la sympathie m'a fait douter encore plus. Finalement, je me retrouve avec un 17,5, très agréablement surpris.

Leçon à retenir

Bien que ces concours soient très exigeants, ils ne demandent pas de performance surhumaine. Il faut garder son sang-froid, discuter honnêtement et naturellement le contenu scientifique de l'exercice, et ne pas chercher à trop montrer qu'on maîtrise.

Je me rappelle avoir questionné à plusieurs reprises mes choix et ce que j'écrivais, même lorsque l'examineur me disait que c'était correct. Le réflexe serait de passer vite pour ne pas « se tirer d'ennuis », mais je préfère comprendre totalement chaque étape et essayer, le plus honnêtement possible, de résoudre l'exercice, plutôt que de tenter de gagner des points en faisant semblant de comprendre. Et finalement mon expérience montre qu'on peut avoir une bonne note, même sans être en maîtrise totale. Les examinateurs sont très compétents et savent, à mon avis, parfaitement distinguer quelqu'un qui joue un rôle de quelqu'un qui réfléchit réellement.

6.2 Exercices sans déroulement

Énoncé 6

Donner le rayon minimal pour qu'un astre soit sphérique

Donné : $\Delta_{fus}H(\text{SiO}_2)$

Énoncé 7

On considère une planète de forme sphérique, de rayon total R . Sa structure interne est divisée en deux zones distinctes :

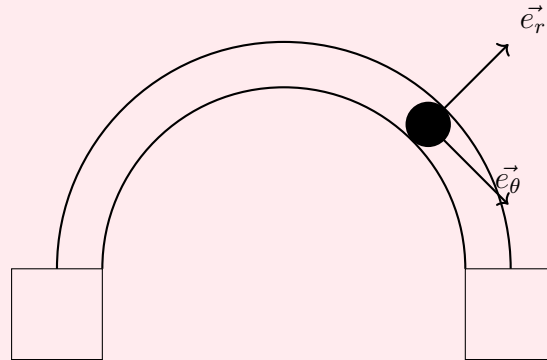
- Un cœur central de rayon R_m (où $0 \leq r < R_m$).
- Une enveloppe sphérique située entre les rayons R_m et R (où $R_m \leq r \leq R$). La radioactivité produit une puissance massique p dans la deuxième partie de la sphère.

Déterminer l'expression du profil de température $T(r)$.

7 Physique LSR

7.1 Exercices avec déroulement

Énoncé 8



Question: étudier les positions d'équilibre; trouver le nombre de position d'équilibre en fonction de la température. Si on note $\theta(T)$ la position d'équilibre non nulle lorsqu'elle existe tracer l'allure du graphe de $\theta(T)$, exprimer $\theta(T)$ au voisinage de la température critique T_c .

Déroulement 10.3/20

Au début j'ai essayé une méthode énergétique mais j'ai vite changer de méthode. Lors de l'application du PFD j'ai essayé de calculer les forces pressantes avec des intégrales ce qui est infaisable dans le temps imparti, l'examinatrice m'a donc proposé si je peux deviner l'expression sans calcul et de même pour le calcul du volume, elle me demandait souvent de ne pas se perdre dans les calculs et prioriser des méthodes physiques et graphiques. Elle m'a signalé aussi qu'en essayant de faire vite j'ai fait plusieurs erreurs de calcul (ce qui explique la note).

Énoncé 9

Une bille de masse M glisse sans frottement dans un cylindre qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante ; position initiale $r = r_0$; vitesse initiale v_0 . Déterminer le temps nécessaire pour que la bille quitte le cylindre. Même question, mais on suppose maintenant l'existence d'un ressort lié au point O , extrémité du cylindre, et à la bille, avec une longueur à vide égale à $2r_0$.

Déroulement 10.6/20

C'était mon dernier oral de la semaine. J'ai attendu dans la salle d'attente, puis l'examineur est venu me conduire à la salle d'oral et m'a donné la feuille du problème. C'était un problème de mécanique du point. J'ai commencé par modéliser le système, dessiner des schémas et poser quelques questions à l'examineur pour mieux comprendre le système. Ensuite, j'ai écrit le PFD dans le référentiel tournant du cylindre et fait les calculs (avec quelques erreurs). Après cela, il a commencé à poser d'autres questions, notamment qualitatives. Il m'a ensuite demandé de considérer un frottement solide. J'ai réécrit l'équation du mouvement dans ce cas et répondu aux mêmes questions. L'exercice était plutôt facile, mais l'important était de savoir

répondre aux questions qualitatives, ce que je n'ai pas vraiment su faire, pour montrer que l'on a du sens physique.

Énoncé 10

On considère l'interaction entre une onde lumineuse décrite par le champ électrique :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

et les électrons de la couche externe d'un atome. On modélise le système par le modèle de l'électron élastiquement lié.

1. Équation différentielle du mouvement

En admettant que :

- la force due au champ électrique sur une particule de charge q est

$$\vec{F}_e = q\vec{E},$$

- l'électron est rappelé vers le centre O de l'atome par une force

$$\vec{f} = -k \vec{OM},$$

- et qu'il subit une force de frottement proportionnelle à sa vitesse :

$$\vec{f}_r = -h\vec{v},$$

établir l'équation différentielle régissant son mouvement. On exprimera le résultat en fonction du **facteur de qualité** Q et de la **pulsation propre** ω_0 de l'oscillateur harmonique.

2. Direction de l'oscillation

Montrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à $\vec{E}_0$. On notera $x(t)$ son élongation.

3. Accélération complexe

On s'intéresse à la réponse en accélération $x''(t)$ de l'électron. Établir l'expression de l'accélération complexe.

4. Cas de la lumière blanche

L'atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes de pulsations comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet).

En supposant que $\omega \ll \omega_0$ et que $Q \gg 1$, montrer que dans ces conditions l'accélération est proportionnelle à ω^2 .

5. Couleur du ciel

On admet qu'une charge oscillant à une fréquence ω rayonne une onde lumineuse de la même fréquence, et que la puissance lumineuse rayonnée est proportionnelle au **carré de l'accélération**.

Expliquer pourquoi le ciel apparaît **bleu**.

Déroulement 14/20

Il s'agit d'un exercice très classique que j'ai vu passer plusieurs fois.

C'est un exercice calculatoire et il n'y a pas vraiment de difficulté, à part se rappeler de l'expression du facteur de qualité, et de ne pas se tromper dans l'équation différentielle et sa résolution.

J'ai terminé l'exercice dans les temps. L'examineur m'avait ensuite demandé d'expliquer pourquoi on peut adopter un modèle élastique (alors que la force de Coulomb est en $1/r^2$). En fait, il s'agit d'un DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle effective au voisinage de l'équilibre (cf. cours des forces centrales).

Vous trouverez la correction de cet exercice en cliquant sur https://cpge-paradise.com/pdf/exo-oscillateur_amorti-complet.pdf (exercice 8).

Énoncé 11

On modélise l'atome d'hydrogène par un proton placé en O et un électron initialement à l'abscisse a .

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique constant suivant l'axe z .

On travaille en mécanique classique.

Quels sont les mouvements possibles ?

Déroulement 7.2/20

C'était un oral de mécanique/électromagnétisme, ce que j'ai bien apprécié car je maîtrise ces domaines. Le jury commence par rappeler que l'objectif est de communiquer et de montrer un esprit physique et critique.

J'ai donc commencé par expliquer qualitativement la situation, en décrivant à la fois l'effet du champ électrique et du champ magnétique, avec l'hypothèse que le proton reste au centre car il est plus massif. J'ai également montré que le mouvement est plan, ce qui permet de travailler en coordonnées polaires.

Ensuite, j'ai entamé les calculs en précisant que l'on pouvait raisonner énergétiquement puisque la force magnétique ne travaille pas, mais j'ai choisi d'utiliser le PFD. Une fois les calculs effectués, j'ai obtenu les équations du mouvement, pas assez claires à mon goût ; j'ai donc proposé une approche énergétique par analogie avec les forces centrales, ce qui permet

d'introduire une énergie potentielle effective et de discuter en fonction de l'énergie mécanique.

Je croyais avoir bien mené mon oral : je n'ai reçu aucune indication du jury, qui me disait régulièrement « très bien », « oui ». Pourtant, ma note (7,2) m'a complètement surpris, je m'attendais au moins à 14 ou 15.

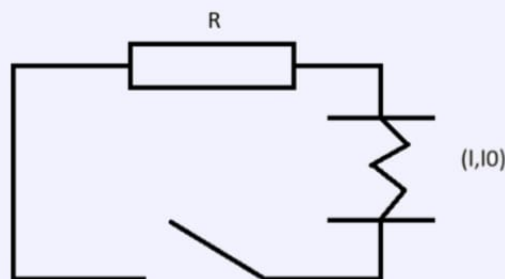
Déroulement 5.5/20

C'était mon premier oral de physique. J'étais encore secoué par une prestation catastrophique à mon premier oral de mathématiques, que j'avais passé le matin même. Je rentre dans la salle, l'examineur m'accueille et me donne l'exercice. J'ai immédiatement les mauvais réflexes : je commence par parler de particule fictive, de travail dans le référentiel du proton... sans me rendre compte des bêtises que je disais, encouragé par le sourire et les hochements de tête de l'examineur, qui semblait très intéressé, voire impressionné, par ce que j'écrivais. Après m'être bloqué dans les calculs, et m'être rendu compte de la bêtise dans laquelle je m'étais engouffré, je me force à réfléchir réellement et à oublier l'examineur. Je dis alors que le proton, plus massif, reste au centre, puis j'entame les calculs. Je bloque à plusieurs reprises, fais de multiples erreurs, puis, à l'aide de l'examineur, qui me pousse à réfléchir dans le cadre des forces centrales, démarche que j'avais complètement zappée, aussi évidente soit-elle, ce qui montre à quel point j'étais perturbé, j'arrive à établir les équations du mouvement. J'essaie ensuite de les simplifier à l'aide de développements limités, tout aussi catastrophiques, puisque je me suis trompé sur la position d'équilibre. Bref, note totalement méritée, oral à oublier... ce que j'ai réussi à faire.

Ce que j'en retiens: Cette expérience montre l'importance de passer les oraux de l'ENS, qui constituent un véritable entraînement psychologique avant ceux de l'X. Je n'étais pas convaincu de cette idée moi-même : je disais même que je préférais passer une semaine supplémentaire au Lydex à continuer de préparer les oraux de l'X plutôt que d'aller passer ceux de l'ENS, tant j'étais convaincu de ne pas être assez prêt. Cela souligne à quel point l'état d'esprit est crucial durant cette phase décisive. Si je ne m'étais pas ressaisi après ces deux claques reçues le premier jour, la fin de mes oraux aurait probablement été tout aussi catastrophique.

Énoncé 12

On considère le circuit suivant :



On ferme circuit à $t=0$, que se passe-t-il ?

Déroulement 19.8/20

Tout l'intérêt de l'exercice repose sur le ressort (non conducteur, bien sûr) qui relie les deux armatures du condensateur, libres de translater selon un axe.

Je commence par établir une équation électrique issue de la loi des mailles, en veillant à expliciter et démontrer la formule qui lie la capacité du condensateur plan à la distance entre les armatures.

J'établis ensuite une deuxième équation mécanique issue du PFD appliqué à chaque plaque. Je m'embrouille un peu sur les indices des plaques, mais je m'en sors.

L'examinatrice intervient pour me demander de justifier rigoureusement pourquoi les valeurs absolues de la charge portée par chacune des armatures sont égales. Cette question m'a un peu bloqué, mais je m'en sors avec un peu d'aide.

À la fin, j'obtiens deux équations différentielles couplées en $d(t)$, la distance entre les plaques, et en $Q(t)$, la charge portée par une plaque. En voulant injecter une équation dans l'autre, je me rends compte que cela conduit à une équation différentielle d'ordre 5. Je lui dis que cela fait beaucoup trop de calculs et que le résultat ne sera pas forcément intéressant.

Elle rigole, et les dernières minutes de l'oral se transforment en une discussion autour du système obtenu : comment le résoudre numériquement, quels sont les aspects énergétiques et comment les expliciter à travers les équations différentielles, et enfin l'équilibre du système.

C'était un oral où il fallait être assez organisé et rapide, tout en ayant de bons réflexes.

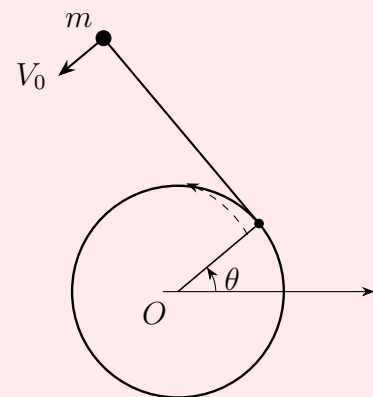
Énoncé 13

Une masse ponctuelle m est attachée à une corde inextensible de masse négligeable de longueur L .

On lâche la masse avec une vitesse initiale V_0 . Elle s'enroule autour d'une poulie de rayon R .

On néglige la pesanteur.

- Loi de $\theta(t)$?
- Durée de l'enroulement ?

**Déroulement: 9 / 20**

L'examineur m'a donné l'énoncé sur une feuille. Il m'a expliqué que le dispositif était disposé à l'horizontale ; j'ai commencé par écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD).

J'ai défini θ_{finale} qui marque la fin de l'enroulement et, par analogie, j'ai lié $\theta(t)$ à $l(t)$, la longueur restant à s'enrouler. J'obtiens

$$L - l(t) = R\theta(t)$$

et je commets l'erreur du siècle en écrivant $l(t) = R\theta(t) - L$: une erreur de signe qui m'a valu beaucoup de calculs inutiles.

Il a commencé à me poser des questions du type « est-ce que la force travaille? ». Je n'ai pas réussi à me mettre les idées en place et j'ai répondu que oui

(spoiler : c'est faux). Il m'a expliqué que le problème est assimilable à un pendule simple plan.

Par analogie avec la force de tension, j'ai alors dit que la force ne travaille finalement pas. Il m'a signalé mon erreur de signe ; après avoir corrigé mes nombreux calculs, j'ai fini par trouver une relation entre θ et t :

$$\theta^2 - \frac{2L}{R} \theta - \frac{2L v_0}{R^2} t = 0.$$

Je lui ai dit qu'on pouvait trouver $\theta(t)$ en résolvant cette équation du second degré. Il m'a interrompu et m'a demandé de fournir la durée de l'enroulement ; connaissant θ_{finale} , je l'ai déduite. Il m'a demandé de commenter le fait que cette durée ne dépend pas de la masse : je lui ai expliqué que, comme pour le pendule simple, la durée (ou la période assimilée) est indépendante de la masse (c'est une intégrale bien connue).

L'examineur est resté silencieux et n'intervient que lorsqu'on commence à s'égarer, j'ai beaucoup apprécié notre discussion tout au long de l'oral.

Bref, un oral qui aurait pu mieux se passer si ce n'avait été l'erreur de signe qui m'a coûté cher, mais elle m'a appris à être plus vigilant pour les oraux à venir.

Déroulement: 14.8 / 20

Je commence par poser les hypothèses : corde tendue inextensible. . . Je m'étonne qu'on néglige le poids, L'examineur m'explique que le dispositif n'est pas tenu verticalement mais posé sur une table puis je passe à la démarche classique. En calculant l'accélération, je fais une erreur car je n'ai pas utilisé la relation entre theta et la longueur enroulée, l'examineur me laisse faire jusqu'à ce que j'arrive à un résultat inattendu (theta seconde constante), je m'en rend compte et je reviens corriger l'erreur. Je continue jusqu'à obtenir une équation de second degré en theta. Plus assez de temps pour finir, l'examineur me dit que la durée de l'enroulement ne dépend pas de la masse, et me demande si ça m'étonne, je prend l'exemple de la chute libre, l'examineur dit que c'est un problème de cinématique.

Énoncé 14

Voir Physique-SI 2003

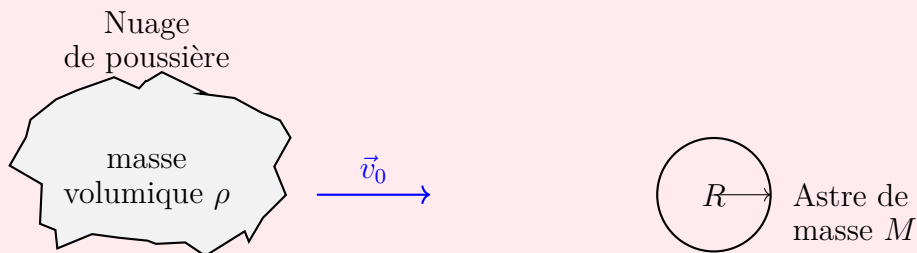
Déroulement: 12.2 / 20

Mon oral traitait d'un sujet classique que j'avais déjà travaillé. Pendant un certain temps, je ne faisais que dérouler les calculs en établissant l'équation de diffusion et la définition du temps de diffusion ainsi qu'en introduisant d'autres grandeurs utiles au problème. Dans ce genre d'oral où l'énoncé est classique, et surtout à ce niveau d'exigence, on attend, je crois, une autonomie quant à l'introduction de tout ce qui nous semble utile à la résolution du problème et de faire le maximum pour le résoudre. Mes calculs étaient interrompus par des questions qualitatives auxquelles je répondis partiellement ou totalement, sauf à une qui ne me paraissait pas du tout intuitive à laquelle je ne répondis pas du tout (Si l'on prend une plaque métallique chaude, pourquoi la surface reste chaude même dans un frigo ? (Je ne sais pas si c'est réellement ce que j'ai entendu)) et l'examinatrice me dit de passer à autre chose. Je fis une erreur au niveau des conditions aux limites et aussi au niveau d'un signe et je pense que cela

a montré que je ne maîtrisais pas vraiment ce que je faisais. L'examinatrice a sûrement dû en tenir rigueur. Lorsque je m'apprêtais à conclure, elle m'arrêta pour me dire de revenir sur la question que j'avais laissé en suspens. Je commençai à dire n'importe quoi avant que l'oral ne se termine brutalement. J'étais assez satisfait à la sortie de cet oral car je pensais que les questions qualitatives posées n'étaient pas évidentes et que j'ai su me tirer d'affaire. Malgré cela, il ne m'a été d'aucune aide pour la préparation des oraux de physique qui allaient arriver par la suite.

7.2 Exercices sans déroulement

Énoncé 15

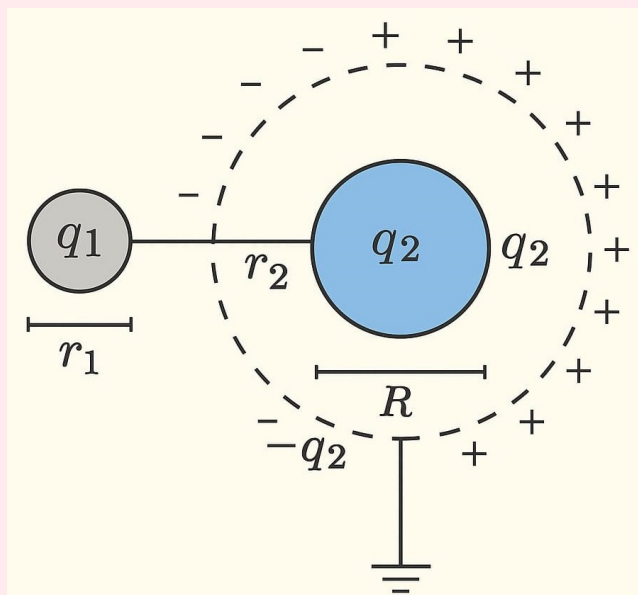


Question

Calculer la masse de poussière déposée sur l'astre.

Énoncé 16

- Deux sphères conductrices, de rayons respectifs r_1 et r_2 , connectées par un **fil conducteur très long** ($L \rightarrow \infty$).
- La **seconde sphère** (rayon r_2) est entourée d'une **coque conductrice creuse** (rayon $R > r_2$) qui ne touche pas la sphère. Un **isolant** entre les deux empêche le contact électrique (mais permet l'induction).
- Le fil **entre les deux sphères** permet l'équilibre électrostatique.
- À $t = 0$, une **charge Q** est injectée **uniquement dans la 2e sphère**.
Donner la distribution de charges à l'équilibre.



8 Physique X

8.1 Exercices avec déroulement

Énoncé 17

Données

- **Schéma des couches de la Terre** (sans indication de distances).
- **Présentation de deux types d'ondes** :
 - Une onde qui se propage uniquement dans les couches solides.
 - Une autre qui se propage dans les couches solides et liquides.
- **Graphique** contenant les vitesses de propagation de chaque type d'onde en fonction de la profondeur.

Questions

1. Culture générale :

- Comment se déclenche un séisme ?
 - Quels sont leurs types et leurs vitesses ?
 - Exemples de séismes forts (majeurs).
 - Nature et profondeur des différentes couches de la Terre.
2. Un séisme se déclenche à la surface : quelle est la durée nécessaire pour qu'il atteigne le centre de la Terre ?
 3. Quelle est la proportion de la Terre (en volume) atteinte si les ondes se propagent rectilignement ?
 4. Même question, mais en considérant que la propagation n'est pas rectiligne.

Déroulement 12 / 20

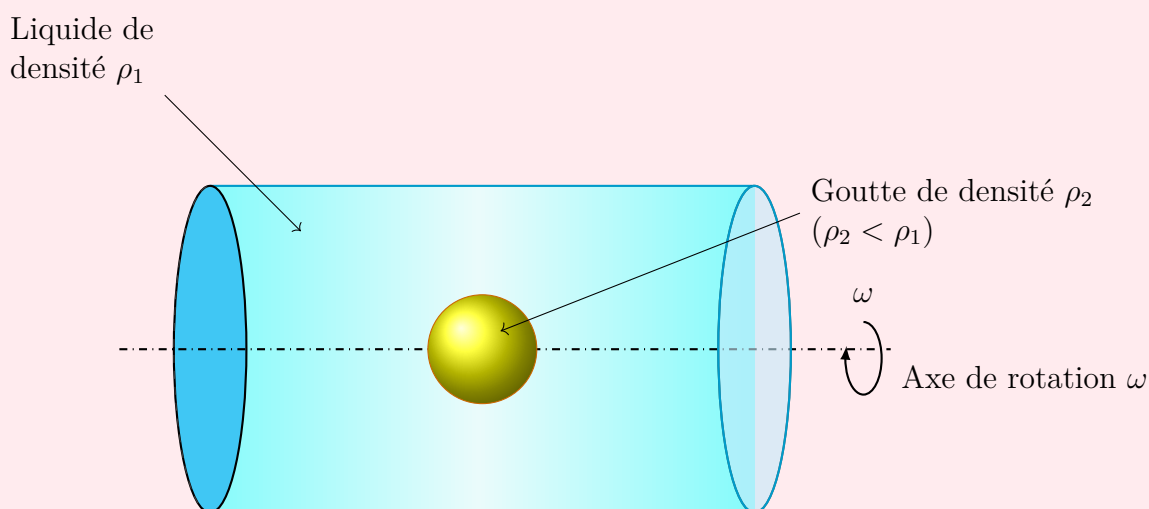
La première question est simple. La seconde demandait plus de réflexion, l'examineur précise que je dois absolument utiliser le produit scalaire défini précédemment, ce qui me bloque un peu car l'expression ne m'inspire rien, on me donne la première indication que je démontre sans grande difficulté. Pour conclure, je propose un raisonnement par récurrence sur la dimension, je rencontre un problème pour garder l'antisymétrie de n à $n-1$. Dès mon entrée en salle, l'examineur me remet deux pages d'énoncé puis sort pendant 3 à 5 minutes afin de me laisser le temps de lire. Ce qui m'a semblé assez atypique, c'était la longueur du texte, car j'avais en tête les autres énoncés, qui eux étaient courts. Quoi qu'il en soit, dès son retour, il engagea l'échange avec des questions de culture générale, auxquelles je répondis non sans peine.

Il me laissa ensuite récapituler l'énoncé et le mettre en situation avec des schémas, puis je commençai à répondre à la première (véritable) question. Le calcul de la durée était simple, étant donné les vitesses de propagation et les distances, mais il me reprocha de ne pas avoir de calculatrice sur moi. Il se contenta finalement d'un ordre de grandeur.

La deuxième question relevait davantage d'un calcul de volume. En utilisant quelques formules vues au lycée ainsi qu'une intégration avec des volumes élémentaires, on aboutissait à la formule demandée. Cette fois-ci, je donnai directement l'ordre de grandeur, sans faire référence à la calculatrice.

Concernant la troisième question, je n'ai répondu que qualitativement. Par analogie avec l'optique géométrique, j'ai considéré les surfaces séparant les différentes couches comme des dioptries, et j'ai défini les "indices" comme le rapport des vitesses air/couche. L'approche semblait avoir plu à l'examinateur, qui posa alors des questions dans le prolongement de cette idée.

Énoncé 18



On définit γ "la tension interfaciale entre deux liquides" par le coût énergétique par unité de surface entre deux liquides.

Comment peut-on mesurer γ avec ce dispositif ?

Déroulement 8 / 20

Je suis entré dans la salle. J'ai fait le schéma et il m'a dicté la phrase qui définit γ . Après, il m'a demandé de poser une question si je ne comprends pas, ce que je n'ai pas fait. Franchement, je n'ai rien compris au début et donc j'ai essayé juste d'écrire l'équation de l'hydrostatique avec la force d'inertie d'entraînement, pas très utile. Je lui ai dit que je n'ai pas encore entamé la résolution et il m'a répondu que c'est bien de toujours commencer par quelque chose de général mais après il faut revenir à l'exo. Le stress m'a joué des tours. Il me posait toujours la question : " Qu'est-ce qui est favorable ? " Au début, j'ai répondu : "Favorable = possible ?" Lui : "Si vous voulez, tout est possible, mais qu'est-ce qui est favorable ?" C'était hyper difficile mentalement, vu le coefficient de la physique. Il répétait toujours la même question parce que je donnai toujours la même réponse. La réponse c'était que ce qui est lourd se met à côté, mais j'ai déjà dit ça, sauf qu'il ne m'a pas entendu. Après, il y avait d'autres questions et je n'ai pas répondu correctement à beaucoup d'entre elles. C'était juste à la fin que j'ai commencé un peu à comprendre ce qui se passe, il m'a demandé c'est quoi la forme finale de la goutte. En

gros, la goutte va s'allonger tout au long de l'axe comme un cylindre. Après, il me dit d'écrire $E = \gamma.S$ (c'est la définition) et d'exprimer E le coût énergétique en fonction du rayon a . J'ai pu le faire directement avec la conservation du volume. Il fallait ensuite minimiser la somme de la variation de l'énergie de rotation et du coût énergétique pour répondre à l'exo (j'ai compris que c'est à cause de la variation du moment mais le temps c'est écoulé). La note me semble logique. Je mettais beaucoup de temps à répondre. C'est vrai l'exercice n'est pas très difficile. Mais bon :/

Énoncé 19

Exo 1

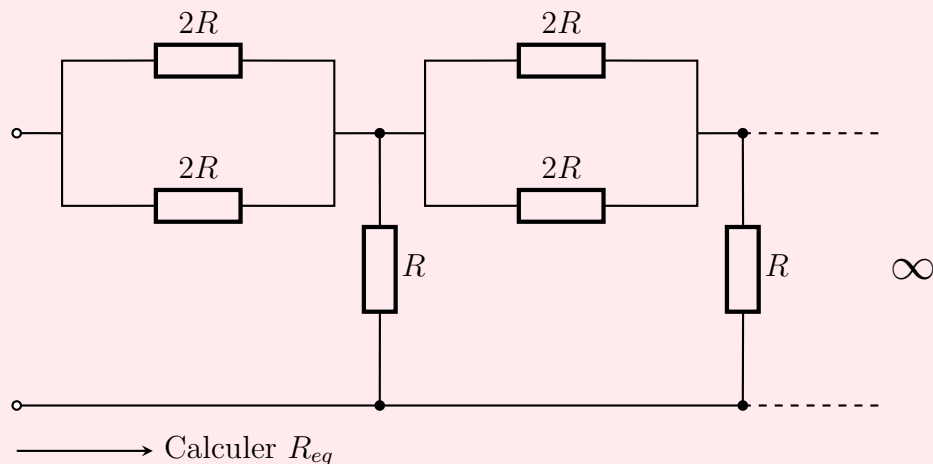
1. C'est quoi le diagramme de Clapeyron ? Dessine-le.
2. Quel serait un profil en spirale sur ce diagramme ?

Soit une masse m d'eau qui subit le cycle suivant :

- $A \rightarrow B$: Échauffement du liquide ($T_1 \rightarrow T_2$) # État Condensé
 - $B \rightarrow D$: Vaporisation isobare
 - $D \rightarrow E$: Détente adiabatique réversible
 - $E \rightarrow A$: Liquéfaction complète
3. Tracer le cycle.
 4. Calculer l'efficacité de la machine et dans quelles conditions elle est maximale

Exo 2

On considère le circuit suivant



Dérroulement 13 / 20

Tout était calme et serein dans le couloir d'attente. J'étais le deuxième à passer l'oral de physique le matin. Subitement la porte s'ouvrit et le premier candidat sort affligé, larmes aux yeux. Ceci m'a bouleversé un instant mais je me suis recentré et reconcentré rapidement. En effet, un examinateur flegmatique et tranquille et sympa à vrai dire. Primo, il débutait l'oral par des questions de cours portant sur les machines thermiques et les changements d'état, des chapitres de SUP que l'on ne s'attend pas à avoir surtout dans un oral de l'X. D'ailleurs, j'ai répondu immédiatement à ces questions sauf une inhérente à un cycle assez bizarre mais j'ai fait de mon mieux pour donner des commentaires physiques sur ce cycle sous réserve d'existence factuelle.

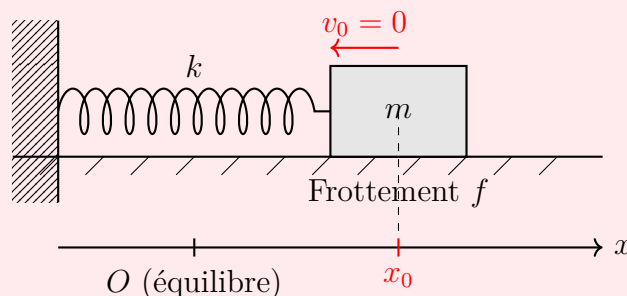
Après, il m'a dicté l'exercice avec ses quatre étapes de transformations. Je n'hésitais pas à lui demander de me relire telle ou telle partie de l'énoncé. S'en est suivi un bel échange avec le jury, ce qui m'a permis de résoudre l'exo avec plus de sept minutes avant la fin du temps imparti, chose qui m'a fortement motivé. Ainsi, il m'ajouta une question dont le raisonnement m'est évident du fait que c'est un exo que j'avais eu aux olympiades de physique au lycée. En effet, j'ai procédé à établir la relation de récurrence qui régit les n cellules résistives. Pour expliquer la convergence de la suite, je me suis appuyé sur le principe de mesurabilité de la grandeur qui lui garantit sa finitude, et rapidement je trouvai la valeur de la limite qui n'est autre que la résistance équivalente cherchée.

Franchement, une fois sorti j'étais hyper satisfait de ma prestation qui valait, à mon avis, à minima 15. Or, l'examineur m'a donné 13 ! Note que j'ai trouvée décevante.

Conseils : Assurez-vous de garder une bonne posture au cours de l'oral, écrivez tout en parlant à haute voix pour garder l'examineur attentionné, et révisez tous vos cours avant les oraux et n'hésitez pas à commenter physiquement, chose qui est amplement apprécié aussi à l'écrit qu'à l'oral.

Énoncé 20

Un solide de masse m est posé sur un plan horizontal rugueux avec un coefficient de frottement solide f . Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est fixée à un mur. On repère la position du solide par son abscisse x mesurée depuis la position d'équilibre du ressort ($x = 0$). À $t = 0$, le solide est lâché sans vitesse initiale depuis la position $x_0 > 0$. Étudier le mouvement.



Dérroulement 12 / 20

L'examineur m'énonce le problème et me demande d'étudier le mouvement. Je commence par établir le PFD en supposant que le solide glisse. Je trouve les expressions de $v(t)$ et $x(t)$

et j'en déduis la condition sur x_0 nécessaire pour que le solide démarre. L'examineur me demande ce qui se passe si elle n'est pas vérifiée, je réponds qu'il y a adhérence.

Je cherche ensuite la position du premier arrêt et j'établis les équations pour la phase de retour (vitesse en sens opposé, donc la force de frottement $\vec{T}$ change de sens). En résolvant, je fais une erreur de calcul qui me mène à un résultat illogique où le solide oscille indéfiniment malgré le frottement. Je signale cette incohérence physique à l'examineur.

Il me demande alors de calculer la puissance dissipée. Je donne l'expression théorique ($\vec{T} \cdot \vec{v}$). En revérifiant mes calculs précédents à la lumière de cette question, je repère mon erreur. Je trouve alors la condition correcte pour que le solide entame une deuxième oscillation. L'examineur me demande de généraliser pour n oscillations, ce que je fais par récurrence, pour finalement donner le nombre total d'oscillations possibles en fonction de x_0 .

Enfin, il propose une variante où le solide est remplacé par un disque. Je dis que pour la même condition initiale, il y aura mise en mouvement avec glissement et roulement. Je précise que je garde le PFD pour le centre de masse et que j'ajoute l'équation du TMC pour la rotation. L'oral s'arrête là.

Énoncé 21

Tu disposes d'un générateur qui délivre une tension continue sinusoïdale, d'une infinité de condensateurs et de résistances. Propose un montage pour visualiser deux tensions en quadrature de phase et puis visualise-les.

Déroulement 13 / 20

J'ai été surpris par le thème de l'exercice qu'est l'électricité car je n'ai jamais rencontré un oral de l'X en électricité auparavant et que je n'avais pas révisé ce cours ni pour l'écrit ni pour l'oral. Heureusement que je me rappelais bien des formules et des techniques. Au début, je n'avais pas en tête une stratégie claire pour aborder l'exo, du coup j'ai commencé à tenter des trucs genre calculer l'impédance des différentes combinaisons des condensateurs et résistances. Ceci a plu à l'examineur mais n'a rien servi à mon avancement. Je me suis dit que sous contrainte de temps, il faut que je commence à tâtonner des montages. J'ai suggéré le montage **RC en parallèle** mais j'ai commis une grave erreur de cours en confondant pont diviseur de courant et de tension. L'examineur m'a signalé l'erreur puis j'ai essayé avec le montage **RC série** et ça a marché. L'examineur m'a posé ensuite des questions technique type épreuve TP de centrale et m'a demandé ensuite de visualiser les différentes tensions sur le même graphe. Cet oral est inhabituel pour le concours X et je pense que mon initiative et ma réactivité m'ont permis de décrocher une note correcte. Enfin, je vous conseille de ne pas privilégier certains chapitres au détriment des autres.

Conseils pour préparer l'oral physique de l'X :

- Il faut s'assurer de la **maitrise de tous les cours** sans exception et donc il faut faire une relecture des cours surtout ceux où vous aviez des problèmes durant l'année.
- Ensuite, il faut s'entraîner sur des **anciens oraux** et en faire le max pour acquérir et assimiler les raisonnements classiques et ne pas rester bloqué au tableau. Vous pouvez trouver ces oraux soit dans des livres soit dans des anciens témoignages et je vous recommande de travailler en équipe surtout pour les exos dont on ne dispose pas de solution.

- Enfin, je vous conseille de faire des **simulations d'oraux** pour améliorer votre réactivité, votre gestion du temps et du stress, et vos techniques d'expression et de communication.

Déroulement 8.5 / 20

L'épreuve a eu lieu samedi à 9h20. Quand je suis entré dans la salle, l'examineur m'a donné l'énoncé sur papier, puis il m'a informé que je pouvais poser des questions si j'en avais, à condition qu'elles ne soient pas bêtes. Il a ensuite quitté la salle pendant dix minutes. J'ai rapidement lu l'énoncé qui était facile à comprendre, par contre la deuxième question avait l'air étrange car triviale. J'ai commencé en essayant de me rappeler des montages classiques que je connaissais. La première chose qui me vint à l'esprit fut le circuit RC: je l'ai rapidement dessiné et j'ai écrit la fonction de transfert. C'est à ce moment-là que l'examineur est revenu. Pour rompre le silence, j'ai essayé de présenter ma démarche : je pars d'un circuit RC et j'essaie d'ajouter une deuxième branche pour obtenir le déphasage. Il n'avait pas l'air satisfait et m'a demandé (sans jamais me regarder dans les yeux) où se trouvaient les tensions U_1 et U_2 souhaitées. J'ai répondu que j'étais justement en train de présenter ma démarche (il fallait effectivement commencer par un circuit RC).

Il n'avait pas l'air convaincu et m'a répété qu'il voulait simplement voir où se situaient les tensions U_1 et U_2 . Comme je ne connaissais pas encore le circuit solution, j'ai ajouté au hasard une nouvelle branche en parallèle, avec une R et un C (de même valeur que dans la première branche). J'ai nommé les deux nœuds de sortie A et B, de potentiels V_A et V_B par rapport à la masse, puis j'ai essayé de vérifier si le circuit correspondait bien. Il m'a demandé de changer la notation de V_A et V_B et de mettre au lieu U_A et U_B , car sinon je risquait d'avoir des confusions (il avait l'air de se moquer). Lorsque j'ai voulu vérifier si le circuit convenait, j'ai utilisé le théorème de Millman pour gagner du temps (c'était uniquement du brouillon pour vérifier), mais l'examineur m'en a empêché en disant que c'était hors programme. C'est après cela qu'il m'a donné une indication : "Pensez à la symétrie". J'ai trouvé cela étrange, car le circuit peut être orienté n'importe comment. A ce moment-là, il ne restait plus que 10min. J'ai tâtonné sur le circuit et il m'a finalement dit que c'était bon. Il s'est alors mis à effacer le tableau tout en me demandant de trouver une condition sur R et C. J'ai essayé d'écrire au tableau deux relations issues du pont diviseur de tension, mais il les a effacées et m'a demandé de répondre oralement. J'ai donc rapidement évoqué l'expression complexe des deux tensions et le fait que le module de leur quotient devait être égal à 1, soit $RC\omega = 1$. J'ai enfin ajouté brièvement que la deuxième question correspondait simplement à deux sinusoïdes de même amplitude et déphasées de $\pi/2$, mais il m'a dit que c'était terminé.

Commentaire et conseils: L'examineur était trop ferme et ne me regardait même pas, il lançait aussi parfois des remarques pour me déstabiliser, je savais que c'était normal et j'essayais de me concentrer sur l'exercice (même s'il m'empêchait parfois de travailler par exemple en me disant de changer V_A et V_B en U_A et U_B parce que cela "risquait de me déstabiliser"???). L'exercice était relativement simple, mais comme il s'agissait d'un oral de l'X, je m'attendais à des idées plus tordues (En fait je pense que le jury s'attendait à ce que je commence par un circuit RC, puis que je simplifie le terme gênant dans le dénominateur de la fonction de transfert en ajoutant un circuit RC en parallèle). Cette anticipation excessive a été une erreur : un exercice peut être simple, même à l'oral de l'X (en vrai il faut être capable d'estimer la difficulté d'un exercice en lisant l'énoncé, cela s'apprend avec l'expérience. Dans mon cas, il s'agissait d'un exercice d'électrocinétique type X que j'avais rarement rencontré, ce qui m'a conduit à surinterpréter sa difficulté.

Énoncé 22

On considère un faisceau d'électrons qui rentre en interaction avec un volume gazeux. Montrer que la quantité d'électrons qui émergent est indépendante de l'énergie cinétique du faisceau.

Déroulement 6.5/20

Contrairement à l'exercice, l'examineur m'a demandé, avant d'entamer l'épreuve, de lui rappeler ce qu'est un puits fini. Je lui ai donc présenté un schéma accompagné d'explications, en introduisant les notions d'énergie E et de potentiel V .

Il m'a ensuite demandé de calculer la fonction d'onde en fonction de la valeur de E , ce que j'ai fait. Cependant, à un certain moment, je me suis bloquée ; je me suis retournée pour lui expliquer ce que j'allais faire, mais il ne m'a pas répondu. J'ai donc décidé de poursuivre ma démonstration et de commencer le calcul du coefficient de transfert, ce qui m'a pris beaucoup de temps. L'oral de physique est ainsi devenu pûrement calculatoire, et je n'ai pas pu le terminer. Il est alors intervenu pour me demander d'arrêter et m'a demandé si l'on pouvait utiliser ce que je venais de faire pour l'exercice demandé, ce à quoi j'ai répondu que oui.

Nous sommes ensuite passés au second exercice, cette fois-ci de manière entièrement orale. Il m'a demandé si je connaissais le théorème de Wien, ce à quoi j'ai répondu que oui. Il m'a alors demandé si je pouvais le démontrer, ce que j'ai expliqué oralement, puis il m'a demandé de donner un exemple d'utilisation. L'oral s'est terminé ainsi.

Déroulement 11/20

L'examineur m'a dicté un énoncé très court et m'a laissé proposer des idées. J'ai suggéré différentes méthodes pour aborder le problème, en passant par la statistique, en présentant la température du gaz et l'énergie cinétique. Je pensais pouvoir calculer la probabilité d'existence dans un état permettant à une particule de s'échapper du gaz, mais cela n'a mené à nulle part. J'ai ensuite tenté de transformer le problème en un problème de mécanique classique, en modélisant un électron et en proposant un modèle d'interaction, notamment en introduisant une énergie potentielle d'interaction, mais ce fut également un échec. Je me suis alors tourné vers une approche reliant mécanique classique et mécanique quantique — l'examineur m'a confirmé que c'était la bonne direction, ce qui m'a redonné confiance. Il m'a alors demandé ce que je connaissais à propos des puits de potentiel. Je lui ai expliqué qu'avec notre modèle, on pouvait considérer l'énergie cinétique E traversant une région de gaz modélisée par un potentiel V . Ainsi, en calculant le coefficient de transmission, si celui-ci se révélait indépendant de E , nous aurions résolu l'exercice.

À ce moment-là, 15 minutes s'étaient déjà écoulées. Le reste de l'épreuve — environ 35 minutes — a consisté en des calculs intensifs, dépourvus d'élégance physique, pour résoudre une équation linéaire à 5 inconnues. Je dois avouer qu'au cours de cette résolution, je ressentais une grande frustration : je voyais le temps défilé sans pouvoir y faire grand-chose, condamné à effectuer sans relâche des calculs laborieux. J'ai dû effacer à deux reprises les deux tableaux que j'utilisais (l'un au feutre, l'autre à la craie, tous deux de la taille d'un tableau de salle de cours du Lydex).

Cela dit, j'ai tout de même essayé, tout en écrivant mes étapes de calcul, de formuler quelques remarques sur la mécanique quantique et sur ce à quoi on pouvait s'attendre. Avant même de retrouver le résultat j'ai énoncé qu'il fallait notamment effectuer un développement limité du coefficient de transmission car j'ai estimé que $E \ll V$.

J'ai finalement obtenu la note de 11, ce qui m'a permis d'amortir le choc : je m'attendais à un 8, car je n'avais quasiment pas fait de physique, uniquement des mathématiques peu élégantes et sans réelle saveur. Cet oral comptait beaucoup pour moi, d'autant que c'était mon premier oral critique de la semaine.

Dieu merci, j'ai été admis. Je pense que cela est en partie dû au fait que j'ai réussi à créer un lien avec l'examineur, notamment grâce à de petites interactions simples, comme lui demander « puis-je effacer le tableau ? » au lieu de le faire brusquement — chose qu'il a beaucoup apprécié. Soyez donc tenaces, ne vous tournez pas vers lui pour dire que « les calculs ne sont pas intéressants » : certains examinateurs perçoivent mal ce genre de remarques. N'hésitez pas non plus à communiquer vos pensées à voix haute, tant qu'elles sont un minimum pertinentes : c'est surtout cela qui est évalué.

Déroulement 14 / 20

L'examineur a commencé par présenter le contexte sous la forme « on veut montrer que... », ce qui laissait entendre qu'il n'attendait pas une démarche immédiate. Il m'a ensuite demandé de rappeler le modèle du puits carré fini, bien que ce ne soit pas explicitement au programme. J'ai interprété cela comme l'écriture des équations de la fonction d'onde et j'ai commencé par l'équation de Schrödinger stationnaire, accompagnée d'un schéma du puits. Il m'a alors demandé d'où venait cette équation et m'a demandé d'écrire l'équation de Schrödinger complète, même si elle n'était pas au programme. J'ai ensuite proposé de traiter les deux cas $E > V$ et $E < V$, sans obtenir de réponse de sa part. Je me suis lancée dans des calculs longs et infinis entre conditions aux limites, raccordement des solutions, dans un silence lourd de l'examineur, ce qui était assez déstabilisant. J'ai veillé à expliquer mon raisonnement en même temps que j'écrivais. J'ai finalement obtenu les solutions et calculé le coefficient de transmission, puis commencé l'interprétation physique, lorsque l'examineur a annoncé que le temps était écoulé et que je peux effacer le tableau... J'ai néanmoins obtenu 14, probablement grâce à la clarté du raisonnement, aux explications spontanées et continues et à la prise d'initiative malgré l'absence d'indications et de réactions. Ce que je peux conseiller à quelqu'un qui passe un oral avec un examinateur comme ça c'est de ne pas attendre une réponse ou une indication de sa part, oser proposer des pistes et ayez confiance en vos connaissances.

Énoncé 23

On considère un cristal dans lequel se propage une onde acoustique de fréquence f_a et de vitesse v_a . Un faisceau laser, de fréquence f_l , est en incidence normale sur une face du cristal.

On constate que le faisceau laser est dévié à la sortie du cristal d'un angle $D = 2\theta$.

Calculer θ en utilisant une approche corpusculaire : la lumière est un flux de photons, l'onde acoustique est un flux de phonons.

Déroulement 12 / 20

C'est un dimanche, l'oral commence à 9H20 et je suis convoqué à 9H05. Assis devant la salle, j'entends que ça parle de photons et d'absorption. Je me rappelle d'un exercice du livret de l'édition 2024 qui porte sur ce thème-là, et c'est, je crois, l'exercice le plus farfelu que j'ai jamais vu en physique. Le stress monte.

L'examineur sort deux minutes avant, j'aperçois que le candidat avant moi est toujours en train de ranger ses affaires. Pas de bonjour de sa part, il me demande de me préparer, il n'a pas l'air très content. J'entre, toujours pas de bonjour de sa part. Je lui donne mon passeport, il le regarde, regarde ma photo, puis tourne la page et regarde ma photo du VISA. Et là il me sort : « Tu t'es pas rasé la moustache ? Je ne te reconnais pas ».

Ça me fait rire un moment. Il s'assoit et me dicte l'énoncé.

Je prends bien le temps de tout écrire, et je n'hésite pas à lui demander de me redicter certains passages.

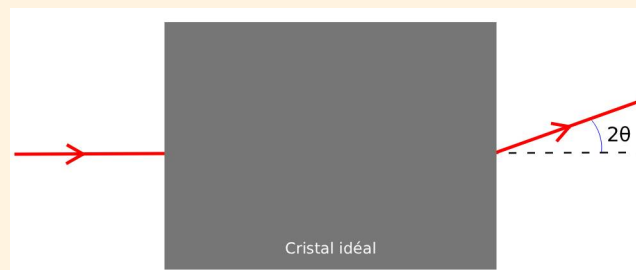
Une fois l'énoncé écrit, je l'informe que je vais relire l'énoncé à haute voix pour être sûr que j'ai tout bien noté. Je remarque qu'il ne me regarde pas mais ça ne me perturbe pas. Bien au contraire, ça me met à l'aise.

Sa première question est : « Quelles sont les particules qui composent la lumière ? »

Je dis que ce sont les photons, et il acquiesce. Il me dit ensuite que l'onde acoustique est, quant à elle, un flux de phonons, et que l'exercice porte sur de l'optoacoustique.

Ces notions sont totalement nouvelles pour moi.

Je prends le temps de bien lire l'énoncé et je fais le schéma suivant au tableau :



Je lui demande ensuite comment est créée cette onde acoustique. L'examineur réfléchit un instant et évoque des causes thermiques.

J'écris ensuite l'équation de d'Alembert qui concerne l'onde acoustique au sein du cristal. J'écris la version OPP dans le vide et ne me préoccupe pas de termes supplémentaires, j'écris la solution générale en faisant apparaître une pulsation temporelle et un nombre d'onde.

Il intervient à ce moment-là et me dit qu'on ne s'intéresse pas à la nature ondulatoire dans cet exercice.

Je lui réponds que je vais m'inspirer de la dualité onde-corpuscule de la lumière (onde EM) pour établir celle de l'onde acoustique (onde mécanique progressive). Il ne dit rien, je continue.

Je pense rapidement à un détail : Quelle relation de dispersion pour les phonons ? Je me dis que je vais éventuellement utiliser la relation la plus simple : $\lambda_{\text{phonon}} f_a = v_a$

J'écris, pour les phonons :

$$E_{\text{photon}} = h\nu_{\text{photon}}$$

Je dis que, par analogie, on considère une nouvelle constante, notée $\tilde{h}$, qui *à priori* n'a pas la même valeur que la constante de Planck. On écrit :

$$E_{\text{phonon}} = \tilde{h}\nu_{\text{phonon}}$$

Il intervient et me demande : « Que peut-on dire de $\tilde{h}$? »

Je réfléchis un instant; là il veut me faire dire qu'on va considérer que $\tilde{h} = h$. Je réponds que, d'abord ces deux constantes ont même dimension, puis qu'elles seront peut-être du même ordre de grandeur, et je conclus finalement qu'on va considérer qu'elles sont égales.

Ensuite, j'écris :

- Pour les photons : $E_{\text{photon}} = hf_l$

- Pour les phonons : $E_{\text{phonon}} = hf_a$

Il me demande ensuite de m'intéresser aux impulsions.

J'écris, toujours en utilisant l'analogie avec les photons et en utilisant les relations simples de dispersion :

- Pour les photons : $p_{\text{photon}} = h \frac{f_l}{c}$
- Pour les phonons : $p_{\text{phonon}} = h \frac{f_a}{v_a}$

Là j'ai de la matière, je sens que j'ai toutes les relations dont j'aurais besoin.

Je dois maintenant comprendre puis expliquer pourquoi le faisceau laser dévie.

Comme on s'intéresse à l'aspect corpusculaire, je pense à des collisions entre les phonons et les photons. Un phonon entre en collision avec un photon, ce dernier voit son énergie augmenter puisqu'il « absorbe le phonon ».

Je le dis à l'examineur, il ne me regarde pas. Il tient son stylo et regarde son carnet mais n'écrit rien, il est totalement immobile. Cette scène m'avait vraiment donné envie de rire.

Je poursuis en considérant un système initial (avant choc) $\{\text{phonon} + \text{photon}_1\}$ qui devient $\{\text{photon}_2\}$ (après choc).

Je considère que l'ensemble est isolé et j'écris :

$$\vec{p}_{\text{phonon}} + \vec{p}_{\text{photon}_1} = \vec{p}_{\text{photon}_2} \quad (1)$$

Je considère aussi que le photon absorbe toute l'énergie du phonon et j'écris :

$$E_{\text{phonon}} + E_{\text{photon}_1} = E_{\text{photon}_2} \quad (2)$$

En injectant les expressions des énergies dans l'égalité (2) j'obtiens :

$$f_a + f_{l,1} = f_{l,2} \quad (3)$$

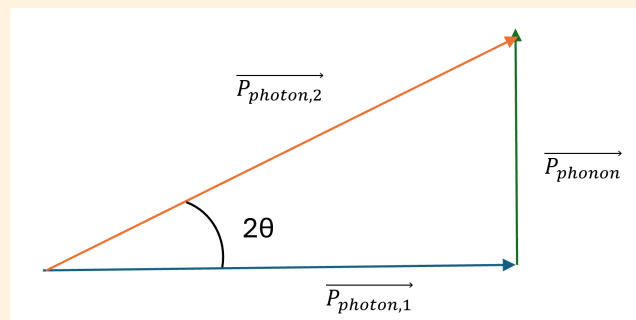
L'examineur intervient et me demande de donner l'ordre de grandeur des fréquences pour la lumière (10^{14}Hz) et des ondes mécaniques (pas plus que 10^4Hz en général).

Donc l'égalité (3) devient :

$$f_{l,1} = f_{l,2} \quad (4)$$

L'égalité (4) signifie, entre autres, que le laser ne change pas de couleur après sortie du cristal. (Je n'ai pas dit ce commentaire lors de l'oral).

L'examineur me demande de faire un schéma où je montre les vecteurs quantité de mouvement, dans le cas particulier où le triangle est rectangle :



Dans ce cas particulier, on trouve :

$$\tan(2\theta) = \frac{c}{v_a} \frac{f_a}{f_l}$$

Le cas général peut se traiter à l'aide du théorème d'Al-Kāshī, mais il ne m'a pas été demandé lors de l'oral.

Après avoir noté cette relation dans son carnet, l'examineur me dit qu'une autre interprétation serait de dire que l'onde acoustique déforme la structure cristalline du solide ce qui fait que l'indice de réfraction change localement, d'où la déviation en sortie.

Il me demande ensuite d'effacer le tableau.

Lorsque je m'apprête à sortir, il se lève, et revient vers ce que j'avais dit au début de l'oral, lorsque j'avais introduit la constante $\tilde{h}$ et que j'avais mentionné *qu'à priori* elle n'est pas égale à la constante de Planck.

Il me dit que c'est intéressant de se poser cette question et m'informe qu'en fait la constante de Planck est universelle, mais que ça dépasse largement ce qu'on fait en prépa.

Ensuite il me laisse sortir, et là je réalise que je suis sorti 7 minutes avant l'heure. Ce qui est assez surprenant.

J'étais satisfait du déroulement de l'oral. Mais je trouvais quelques points assez bizarres : notamment pourquoi il ne m'a pas demandé de traiter le cas général et pourquoi il m'a fait sortir avant l'heure (il aurait pu poser d'autres questions).

Je m'attendais à au moins 15, mais finalement j'ai eu 12/20, ce qui est certes loin de ce que j'attendais, mais cela reste une note correcte.

Il semble que la note absolue n'intervienne pas dans le classement final. Je vous invite à consulter la notice pour comprendre comment sont classés les candidats.

Déroulement 13/20

L'énoncé de l'exercice était perturbant au début, j'ai eu du mal à modéliser la situation, ensuite il me dit d'utiliser une approche corpusculaire. J'ai considéré un photon et j'ai listé ses caractéristiques, ensuite l'examineur me dit qu'il y a une particule analogue au photon qui s'appelle phonon et puis il a resté silencieux. Après quelques minutes j'ai fait l'analogie entre les deux (relation de Broglie...). Ensuite j'ai proposé d'utiliser la conservation de la quantité de mouvement et d'énergie mais il y avait trop d'inconnus, car je ne savais pas que le phonon va disparaître, lorsqu'il me le dit j'ai fait les calculs et j'ai trouvé une expression compliquée de $\cos(D)$ sous forme de fraction, il me dit "on est dans un oral de physique", j'ai compris qu'il faut faire des approximations mais j'avais pas beaucoup d'ordres de grandeur en tête. Après qu'il m'a aidé pour donner les ordres de grandeur j'ai trouvé une expression simple de D et l'oral s'est terminé.

Énoncé 24

On considère une plaque de dimensions $L \times \ell \times a$, placée dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\mathbf{B}_0$ dirigé suivant l'axe z , supposé constant et uniforme.

On suppose qu'un courant I traverse la plaque selon l'axe x et que l'on travaille dans un régime stationnaire. On note n_e la densité volumique des porteurs de charge négative.

1. Déterminer la différence de potentiel

$$\Delta V = V(y = \ell) - V(y = 0),$$

et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\Delta V = R_H \cdot I.$$

Exprimer alors la constante R_H en fonction des paramètres du problème.

2. Pour un champ magnétique B_0 intense et une température T suffisamment faible, on observe des effets quantiques. Montrer dans ce cas que le champ B_0 est quantifié.

Indication : Étudier le mouvement des électrons en orbite circulaire, en particulier dans le cas de l'atome d'hydrogène.

Déroulement 13 / 20

C'était un autre oral d'électromagnétisme, après deux autres aux ENS, sur le même chapitre. J'étais donc bien préparé.

Après une première lecture, j'ai naturellement relié l'exercice à l'effet Hall. J'ai expliqué le principe : déplacement des charges et création d'un champ de Hall. J'ai ensuite repris presque les mêmes calculs que d'habitude, adaptés aux données de l'énoncé, avec l'ajout du courant i qui permet d'obtenir j et la densité de charge, en appliquant le PFD. Tout se passait bien, puis le jury m'a donné une deuxième question, beaucoup plus étrange.

Je me suis demandé quelle équation permettrait de faire intervenir des effets quantiques dans ce cadre généralement classique. La seule indication donnée fut : « Étudiez le mouvement circulaire des électrons », ce qui m'a paru surprenant au début. J'ai exprimé le rayon de courbure en fonction du champ B en appliquant les relations de Fresnel.

Le jury m'a ensuite posé plusieurs questions de cours, plus ou moins indépendantes de l'énoncé. Puis, à titre de culture générale, il m'a demandé si je connaissais des exemples d'effets quantiques liés à ce mouvement. J'ai parlé de la quantification du moment cinétique, ce qui était exactement la réponse attendue. On obtient alors une relation reliant B à n , représentant le niveau d'énergie quantifié.

Un point m'a semblé incohérent : nous avons traité le mouvement comme purement circulaire, alors qu'il y avait aussi un champ électrique dans l'énoncé. Le jury est resté totalement silencieux sur cette remarque.

Au final, c'était un bon oral de mon point de vue, je m'attendais à 15 voire 17. Mais j'ai eu 13, ce qui reste correct, et bien meilleur que dans certains jurys qui, malheureusement, mettent systématiquement 6 à tout le monde.

Énoncé 25

1. Quelle est la distance Terre–Lune ?
2. Définir le pouvoir de résolution de l'œil.
3. Quel est le rayon minimal d'un cratère lunaire observable depuis la Terre ?
4. On veut observer un cratère sur la Lune de rayon cinq fois plus petit ($r_{\min}/5$) que ce

rayon minimal. Proposer un instrument permettant cela.

On demande ici un schéma accompagné d'un calcul du grossissement.

Déroulement 12 / 20

Le début de l'oral était assez calme : je connaissais les ordres de grandeur et j'ai retrouvé la distance Terre-Lune via la troisième loi de Kepler. C'est pour déterminer le rayon minimal que les choses se sont compliquées. J'ai essayé de tracer des schémas (la craie n'aide pas vraiment) en considérant que la Lune se trouvait à l'infini.

L'examineur, en voulant m'aider, me posait des questions assez vagues qui m'ont fait perdre le fil. Me voyant confus, il m'a dit qu'il avait bien remarqué que je ne comprenais pas et que c'était pour cela qu'il me parlait.

À un moment, il m'a demandé pourquoi les cratères visibles sur la Lune sont plus nombreux que ceux observables sur Terre, question qui m'a semblé sans grand intérêt dans le contexte de l'exercice. Après une trentaine de minutes passées sur ce problème, et avec l'aide de l'examineur, je suis parvenu au résultat attendu.

Pour la dernière question, j'ai proposé un schéma basé sur deux lentilles convergentes. Il m'a demandé une condition sur les distances focales et pourquoi il est préférable que le système soit afocal. J'ai dessiné le trajet d'un rayon provenant de la Lune. Alors que je présentais la formule du grossissement, le temps imparti s'est écoulé.

Je suis sorti assez déçu de ma prestation et m'attendais à un 8. En tout cas, il ne faut rien négliger en physique, pas même l'optique géométrique.

Énoncé 26

On souhaite créer une pesanteur artificielle dans une navette spatiales ou en général dans des conditions d'apesanteur. On dispose d'un pendule de masse (m) attaché à une tige qui fait un mouvement circulaire.

Déroulement 11/20

C'était ma première épreuve orale de la semaine. Lorsque l'examineur me donna l'énoncé, je voulus m'assurer que j'avais bien saisi l'enjeu de l'exercice (j'ai pris cinq secondes pour avoir une idée approximative de ce qu'il demandait). J'ai donc reformulé, à ma façon, ce que j'avais compris en réalisant un schéma au tableau ; il hocha la tête pour confirmer et ajouta quelques précisions. C'est à ce moment-là que j'ai été sûr d'avoir bien compris l'énoncé, et je me suis immédiatement lancé dans la résolution.

Au bout de trois minutes, je compris qu'il fallait raisonner dans le référentiel non galiléen du bout de la tige tournante (plus tard, j'ai réalisé que l'examineur s'attendait à ce que j'aie ce réflexe sans trop m'attarder sur des constats physiques superflus). J'ai défini les forces en jeu et j'ai poursuivi naturellement l'exercice.

L'examineur me fit alors une remarque assez vague pour attirer mon attention sur une incohérence entre le schéma tracé et les expressions des forces. Je rectifiai aussitôt, mais, à travers le changement d'attitude de l'examineur, je compris que j'avais probablement perdu des points à ce stade. J'essayai de me rattraper et terminai rapidement l'exercice. L'examineur me posa quelques questions de contrôle pour vérifier ma compréhension du résultat ; il fut en accord avec mes réponses et l'oral se termina.

En sortant, je me rendis compte que c'était un exercice relativement simple : il ne fallait

ni hésiter ni commettre d'erreurs d'inattention. J'en conclus surtout qu'on attendait une résolution fluide et une démarche élégante.

Énoncé 27

Un cristal est en contact avec un thermostat à la température T . Il contient N sites et N' interstices. Le système à l'état fondamental, possède une énergie E_0 . Chaque fois qu'un atome migre vers un interstice, l'énergie augmente de ε_0 .

1. Calculer la probabilité pour que le système ait une énergie E .
2. Déterminer l'énergie la plus probable.
3. Calculer l'énergie moyenne du cristal.

Déroulement 13/20

Je suis entré dans la salle un peu stressé. C'était mon dernier oral de la semaine, l'examineur a vérifié mon identité et m'a demandé de signer ma présence, puis il a commencé à me lire l'énoncé. Au moment où j'ai entendu le mot « cristal », mon cœur s'est un peu serré : je croyais que c'était un problème d'optique (je déteste tout ce qui touche à l'optique). Mais dès qu'il a dit « probabilité », j'ai compris que c'était de la statistique, et en fait j'étais super content parce que c'est essentiellement des maths.

Ensuite, il m'a montré sur son ordinateur une image du système et j'ai commencé à travailler sur la première question. J'ai remarqué qu'il faisait ses calculs sur papier en même temps que moi. En fait, j'avais un peu d'adrénaline, donc je n'étais pas totalement concentré, et j'ai d'abord essayé de prendre les probabilités pour chaque atome et de les combiner, en oubliant qu'elles étaient fortement liées. Après ça, j'ai écrit directement la distribution de Boltzmann pour tout le système, mais il fallait déterminer la dégénérescence. Là, c'est devenu un problème de combinatoire : ça a été un peu du tâtonnement puisque je ne comprenais pas exactement le système au début, mais c'était plutôt une conversation avec l'examineur. Une fois que j'ai compris, j'ai trouvé que c'était le produit de deux coefficients binomiaux.

Je suis passé à la deuxième question et j'ai immédiatement transformé le problème en appliquant le logarithme. L'examineur avait l'air content, donc j'ai continué et j'ai commencé à appliquer l'approximation de Stirling partout où c'était possible, en justifiant évidemment mes approximations devant le jury. J'ai pris un peu de retard parce que j'ai fait quelques erreurs de calcul.

Après avoir trouvé cette énergie, je suis passé à la dernière question où j'ai dit directement qu'on pouvait l'approximer par l'énergie la plus probable. Il a un peu souri et m'a demandé : « Pouvez-vous justifier pourquoi ? » J'ai essayé de justifier et nous avons travaillé dessus ensemble. Mais avant de finir, le temps s'est écoulé.

L'examineur était super sympa et la note finale est juste, car j'ai pris du retard sur quelques petites choses simples. C'était l'oral le plus chanceux que j'ai passé.

Énoncé 28

La loi de Hubble: La vitesse d'une galaxie à distance D de la Terre est $V = H \times D$.

$H = 70 \text{ km} \times (\text{s} \times \text{Mpc})^{-1}$ (Méga parsec).

1 parsec c'est la distance entre la Terre et un astre dans une direction perpendiculaire au plan écliptique, telle que l'astre semblerait décrire un cercle angulaire d'une seconde d'arc pendant une année.

- **Question 1** : Calculer 1 parsec en mètre puis en année lumière.
- **Question 2** : Calculer l'âge de l'univers.
- **Question 3** : On observe par un microscope une étoile de distance d et de vitesse v , calculer la vitesse de cette étoile à l'instant où on a observé dans le microscope.

Déroulement 12/20

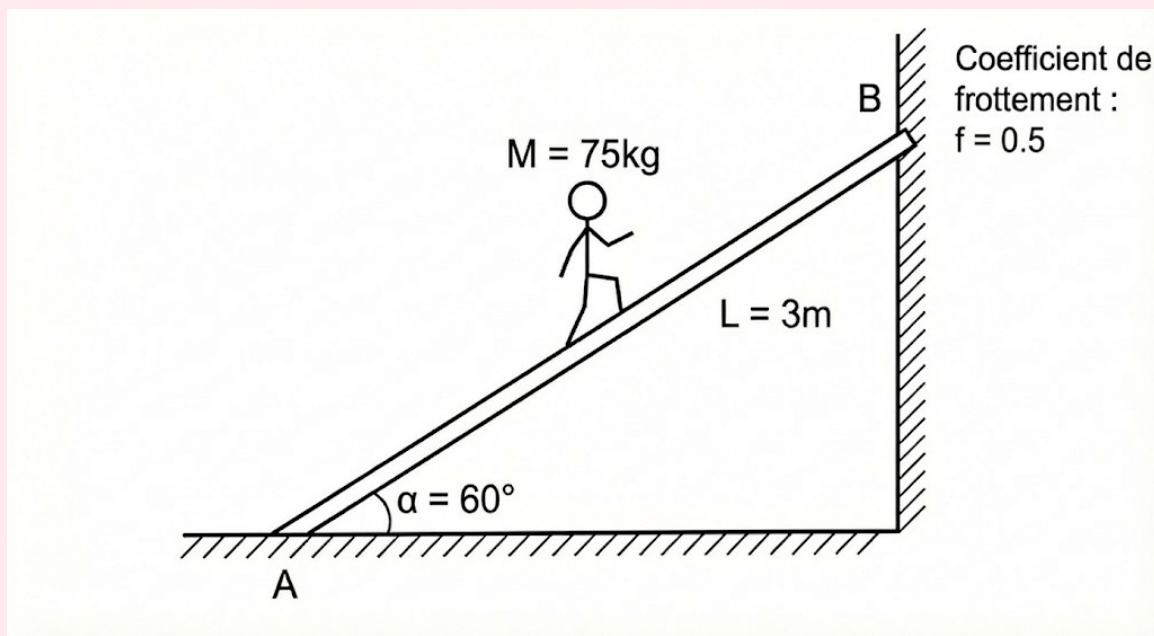
Lorsque je suis entré dans la salle, j'avais un peu peur car j'avais oublié mon passeport qui devait servir de justificatif d'identité. Je lui ai donc donné ma carte nationale marocaine et ma carte bancaire, en priant pour qu'il ne dise rien.

Après m'avoir donné l'exercice, j'étais un peu étonné et inquiet car c'était la première fois que j'entendais parler de ces notions. La première question était facile, sauf que j'avais oublié la valeur d'une seconde d'arc. Il m'a alors demandé ce qu'était une minute d'arc, ce que j'avais aussi oublié, alors qu'on l'a vu dans plusieurs TP d'optique. Je crois que cette ignorance m'a coûté des points car c'est une unité avec laquelle on travaille beaucoup en optique. Ensuite, ce n'était qu'une histoire de calcul pour trouver la réponse, mais comme je n'avais pas droit à la calculatrice, c'était un peu difficile.

Pour la deuxième question, j'ai un peu détourné ma réponse. Il fallait en fait tomber sur une équation différentielle qui découle directement de la loi de Hubble, puis la résoudre et discuter de la croissance lente du logarithme. C'était encore un long calcul. Pour la troisième question, il ne restait plus de temps. Je lui ai dit qu'on allait faire à peu près la même chose qu'à la question 2 ; il a répondu "oui" et l'oral s'est terminé.

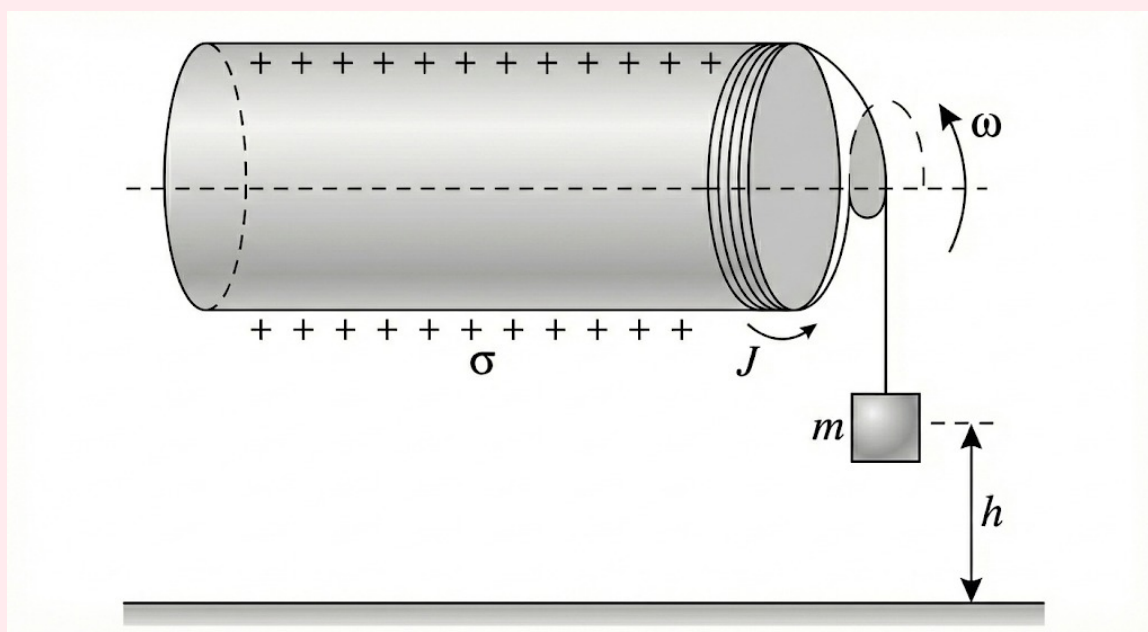
Énoncé 29

Exercice 1



Une échelle de 3 m de masse 10kg s'appuie sur un mur avec un angle de 30° . Le coefficient de frottement est le même avec le sol et avec le mur et vaut 0,5. Un homme de 75 kg veut monter à l'échelle. Quelle distance peut-il monter avant que l'échelle ne glisse ?

Exercice 2



On considère un cylindre creux de longueur L et de rayon R , pouvant tourner sans frottement autour d'un axe horizontal fixe. Ce cylindre possède un moment d'inertie mécanique J et porte une charge électrique répartie en surface avec une densité surfacique σ . Un fil de masse négligeable est enroulé autour du cylindre. À l'extrémité libre du fil est attachée une masse m .

Le système est initialement au repos. On lâche la masse m et on la laisse chuter d'une hauteur $h = 10\text{ m}$.

Trouver : La durée de la chute, l'expression de la vitesse et de l'énergie cinétique juste avant la fin de la chute.

Déroulement: 16 / 20

J'étais extrêmement stressé avant cet oral. Je croyais avoir totalement raté mes oraux précédents et je n'avais plus le droit à l'erreur. C'était le premier oral de l'après-midi. L'examineur, clairement en pleine phase de digestion, me cite l'énoncé puis s'affale dans sa chaise.

Je vois immédiatement qu'il s'agit d'un exercice facile, dans un domaine que je maîtrise et que j'ai beaucoup travaillé. Je me dis alors que je dois le finir le plus vite possible afin de garantir au moins une note correcte, puis essayer d'obtenir une très bonne note. De plus, avant de me citer l'énoncé, il a dit : « on commence par cet exercice », ce qui suggérait qu'il s'agissait d'un exercice préliminaire.

Je commence par décrire la démarche que je vais suivre, ce qui ne semble pas intéresser l'examineur, qui paraît presque somnolent. Je décide donc de l'oublier, de me concentrer sur le tableau et de réfléchir simplement à voix haute. Je fais le bilan des forces, puis je commence les calculs.

J'ai effectué toutes les erreurs possibles et imaginables dans ces calculs : je me trompais d'indices, les grandeurs étaient tantôt algébriques, tantôt positives... Bref, les fautes étaient si nombreuses que j'ai fini par demander à l'examineur d'effacer un tableau entier pour recommencer. Il a hoché la tête en guise de « oui ».

Le seul point positif est que je corrigeais mes fautes en totale autonomie, simplement parce que je validais physiquement chaque expression que je trouvais : les proportionnalités, les signes, les cas limites... Cela a dû être apprécié par l'examineur, au vu de la note finale.

J'arrive finalement à l'expression attendue, ce qui réveille enfin l'examineur. Il décide alors de discuter un peu la réponse pour voir si elle est logique. Je lui dis que ma paramétrisation n'était pas idéale et que l'on pouvait faire plus simple, ce à quoi il répond oui, puis me demande d'effacer le tableau.

Je jette un coup d'œil à ma montre : 40 minutes. Je me dis que je dois vraiment sortir le grand jeu si je veux sauver cet oral. Je me ressaisis, puis me retourne pour écouter l'énoncé du deuxième exercice.

Les charges me perturbent : je ne vois pas leur intérêt et je n'arrive pas à anticiper leur effet. Je décide donc de les négliger dans un premier temps et je me lance dans les calculs — bien sûr faciles, puisque l'exercice devient alors de niveau lycée. L'examineur me laisse perdre mon temps à effectuer ces calculs, à l'issue desquels il me reste environ sept minutes.

Il m'indique alors que j'ai négligé la présence des charges et me demande ce qui va se passer physiquement. Je commence enfin à réfléchir sérieusement et je pense à l'induction. Je commence alors à décrire le phénomène ; l'examineur paraît satisfait. J'enchaîne immédiatement en expliquant la démarche à suivre pour obtenir la réponse, sachant que je n'ai plus le temps de faire les calculs. L'examineur approuve et m'indique que le temps est écoulé.

J'espérais un 12 ou un 13 après cet oral, jugeant que j'avais commis trop de fautes et passé trop de temps sur le premier exercice. J'étais frustré, car j'étais capable de terminer les deux exercices, ce qui, pensais-je, m'aurait garanti au moins un 16. Finalement, je me retrouve avec un 16, malgré cette performance que je considérais comme moyenne.

Je pense que cette note s'explique par l'autonomie et l'esprit critique que j'ai su laisser transparaître durant l'oral. Le fait d'avoir corrigé mes erreurs dans le premier exercice en les

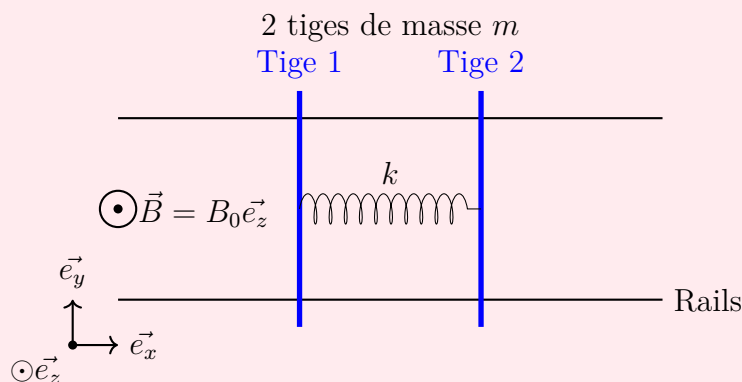
discutant physiquement, ainsi que ma capacité à identifier la démarche à suivre dans l'exercice d'induction, ont, à mon avis, constitué mes principaux points forts. Un autre point important que j'ai appris est que les examinateurs ne s'attendent pas à des performances incroyables pour donner de bonnes notes. J'avais entendu, et j'étais persuadé, que pour obtenir un 16 il fallait finir un exercice difficile sans aucune aide de l'examineur, ce qui, finalement, n'était pas du tout le cas. Un peu de bon sens et une maîtrise des chapitres en question ont suffi pour camoufler un stress apparent.

8.2 Exercices sans déroulement

Énoncé 30

On considère un miroir convexe petit et un autre concave grand situés sur le même axe. Quelle est la distance entre les deux pour que l'image d'un objet à l'infini soit dans la surface du miroir concave ?

Énoncé 31



- Étudier le mouvement.
- Montrer que pour une durée suffisamment longue, le mouvement des deux tiges est sinusoïdal et donner la pulsation.
- Que peut-on dire sur l'énergie ?

Énoncé 32

Soit deux spires parallèles de rayon a . On suppose qu'un film de liquide (savon par exemple) est maintenu entre elles.

Trouver l'équation de la surface (rayon du film en fonction de x).

Donnée : L'énergie E est proportionnelle à la surface.

Énoncé 33

On considère deux plaques : l'une des deux se déplace avec une vitesse V , l'autre est fixe. Calculer la force qui s'applique sur une couche d'air contenue entre les deux plaques.

Énoncé 34

Montrer qu'il est plus facile de fluidifier la base d'une montagne plus grande.

9 Analyse de documents scientifiques (ADS)

9.1 ADS PC

Déroulement 12 / 20

Mon ADS portait globalement sur la lumière. Le premier document est un texte scientifique récent tandis que le second était un manuscrit datant de 16xx. Je ne me souviens plus du contenu exact des documents, cependant la préparation était comme suit: J'ai commencé par recueillir linéairement toutes les données qui me semblaient importantes, ainsi que tous les résultats non démontrés. J'ai passé une partie conséquente du temps de préparation à fournir des corrections à ce qui a été présenté dans le document manuscrit, plusieurs résultats étaient faux vu l'avancée de la science depuis. J'ai surtout fait le lien avec l'ondulatoire qui n'a été que très peu abordé dans les deux ressources. Finalement j'ai vite fait défini trois axes et rédigé les slides. La présentation a été faite dans les normes en terme de temps, l'examineur posait d'abord des questions de culture générale à propos de la lumière et quelques distances de l'échelle astronomique (terre lune, terre soleil, taille du système solaire). Sa série de question s'est arrêtée dès que je n'ai pas su répondre à la question portant sur la taille du système solaire. Il a ensuite enchaîné sur des questions sur le contenu de la présentation, en particulier sur la validité des modèles présentés dans le manuscrit. Finalement, la réelle difficulté que j'ai rencontrée était le manque de temps de préparation, fallait mieux le gérer.

Déroulement 13 / 20

La préparation à l'épreuve se passe dans une salle avec les autres candidats. Le texte est présenté dans une tablette que l'on doit rendre à l'examineur. Pour l'ADS physique la synthèse est présentée sur les feuilles en format paysage comme pour une présentation PPT avec page de garde (titre + problématique) et un sommaire, qui ne suit pas forcément l'ordre des documents à synthétiser. On place les feuilles devant un appareil qui projette leur contenu avec un datashow. Dans mon cas, le tableau ou c'était projeté était près de la porte tandis que mes feuilles étaient à l'autre bout de la salle il fallait donc prendre en compte le déplacement pour changer de feuilles afin de ne pas laisser de blanc. Les documents portaient sur les façons de calculer la distance Terre-Lune. Les ordres de grandeurs sont très appréciés, les démos des résultats donnés dans le texte. L'examineur était un vieil homme sympathique mais il n'articulait pas bien et parlait très bas. J'ai dû lui demander de se répéter une ou deux fois mais uniquement lorsque je ne comprenais vraiment rien à ce qu'il disait. Il me posait des questions de compréhension, me demandai de refaire les démos et m'as posé des questions sur une partie que je n'avais pas mise au propre par manque de temps.

Déroulement 12 / 20

L'ADS était l'épreuve pour laquelle j'étais le moins préparé après les EPS. Heureusement, j'ai eu 12, qui est en fait une note correcte, et sachez que c'était l'avant-dernier oral dimanche matin et que cette matinée, en fait, beaucoup d'élèves étaient malheureusement éliminés parce qu'il y avait eu des 6 pour des élèves qui ont cru avoir très bien passé l'épreuve et qui méritaient d'intégrer l'X, parfois même ayant des 15 à l'oral en maths à l'X. Donc c'est une épreuve qui doit être prise au sérieux (coeff 15) parce que vous ne savez pas quelle épreuve vous donnera votre

place à l'X. Moi par exemple, j'ai eu un très très mauvais départ en physique, coeff 20. Pour les maths, la chimie, ça allait mais pas top, j'attendais des 11/12 et donc cette épreuve était déterminante. Parlons du sujet. Le sujet portait sur la physique bien sûr, précisément sur la constante de gravitation et sa détermination avec l'expérience de Cavendish. Mais à la fin, il y avait une partie sur la gravitation, une sorte de rectification du modèle qui stipule que la vitesse $v(r)$ est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{r}}$. En gros, il y avait deux volets au sujet. J'ai parlé au début vaguement de relations physiques dans des situations différentes qui contiennent toutes G. Puis j'ai parlé de la gravitation universelle et de l'expérience de Cavendish. Malheureusement l'application du TMC dans l'expérience débouchait sur des calculs fastidieux et je n'ai pas pu faire des approximations. L'examineur m'a dit après qu'il fallait interpréter ça comme des oscillations forcées par le mouvement de la main de l'opérateur qui peuvent être modélisées par une fonction du temps (c'était à la fin de l'oral qu'il m'a demandé de réécrire le PFD et le temps s'est écoulé). L'examineur était très attentif et prenait des notes sans m'interrompre tout au long de la présentation. Après, j'ai fait un schéma pour démontrer la relation entre l'angle de rotation du support et l'angle de rotation du miroir qui n'était pas donné à l'aide des lois de Descartes pour montrer comment on trouve l'angle $\theta(t)$ (il y a un facteur 2 entre les deux). À la fin de la présentation, de mémoire, j'ai parlé de la défaillance du modèle de gravitation primitif et j'ai utilisé pour cela le graphe que j'ai recopié. J'ai oublié les détails maintenant que j'écris ce déroulement. Ma présentation terminée, il me pose des questions pour approfondir des points dans mon analyse. Au début, il attire mon attention sur la phrase qui dit que "toute la force gravitationnelle ne peut faire tomber un aimant collé à un réfrigérateur". Je dis que la force exercée par le réfrigérateur sur l'aimant est plus forte que le poids. Pour la trouver, j'écris $F_m = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$ et je dis que l'énergie potentielle se déduit du champ qui lui-même est proportionnel à l'inverse de r (c'était une erreur parce que cela n'est un fil mais plutôt un dipôle, donc c'était en l'inverse de r au cube si je me rappelle bien). Je trouve après un r élevé à une puissance importante au dénominateur, ce qui domine le poids à courte distance. La deuxième question concernait une relation dans le sujet que je ne pensais pas être capable de démontrer au moment de la préparation. L'examineur m'a demandé de démontrer la relation, j'ai galéré un peu mais j'ai fini par trouver l'expression d'un certain a_0 . La dernière question était sur les oscillations forcées, j'ai juste écrit au tableau la force générale de l'équation différentielle. Mon conseil pour réussir cette épreuve est d'essayer de cultiver une culture générale en physique et de ne pas hésiter à modéliser les phénomènes et surtout les exemples cités dans le texte, c'est votre valeur ajoutée et n'allez pas loin, le programme est largement suffisant pour modéliser.

Déroulement 17 / 20

Pour préparer l'épreuve d'ADS (physique), je regardais principalement, tout au long de l'année, les chaînes (par ordre décroissant de temps de visionnage) :

- ScienceEtonnante
- Veritasium
- ScienceClic
- The Action Lab
- Steve Mould

J'essayais d'avoir un minimum de connaissances sur la plupart des « grands axes » de la physique.

Tout ce que vous regardez/lisez peut vous être utile le jour J, même les infos historiques ! Pourvu que cela soit lié à votre présentation, et que ce soit assez bref et concis.

Exemple : j'avais regardé entre la Sup et la Spé https://youtu.be/RST_ylwVrUw?si=Y4VTHc-N1aKzm3BQ, et j'avais utilisé la même intro dans ma synthèse (en la modifiant légèrement) et ça a beaucoup plu à l'examineur (il me l'a dit à la fin de ma présentation). (Et j'ai eu 17/20).

J'avais créé durant la période de préparation un fichier où je résumais (presque) chaque vidéo regardée, en ajoutant des notes, des screens pris directement de la vidéo, des recherches Wiki et autres. J'essayais de creuser relativement loin en me limitant au qualitatif. Je ne m'intéressais pas au quantitatif car j'ai toujours pensé que si jamais il y avait une formule HP que je devais utiliser, on me la fournirait à coup sûr en annexe. Ce n'est pas le cas pour le qualitatif ! On attend de vous des explications qualitatives, illustrés éventuellement par des arguments quantitatifs basés sur le programme et sur les annexes.

En ce qui concerne le déroulement de l'ADS^a, vous avez 2H de préparation, on vous donne des feuilles (de couleur, jaunes pour ma part), une tablette sur laquelle est affiché l'article avec une courte présentation et la consigne, et après l'article est ajoutée une annexe qui contient des infos à priori HP.

Attention : vous êtes censés employer tout ce qui vous est donné. Lisez le rapport pour plus de détails.

https://drive.google.com/file/d/1c2SK0Va1Vc4WN58qNgp4b29Basgajs_8/view?usp=drive_link est l'article qui m'a été fourni, il était particulièrement court, mais portait sur une notion totalement HP : la tension superficielle. On s'attardait à l'effet Marangoni (que je ne connaissais pas) et à d'autres phénomènes. Je savais vaguement en quoi consistait la tension superficielle, mais j'ignorais tout l'aspect quantitatif. On m'avait fourni le coût énergétique (un travail) ce qui m'a permis de remonter à la force, et honnêtement cette force débloquent l'extrême majorité des explications, donc il était vraiment crucial de l'obtenir.

J'ai fait une première lecture qui m'a permis de dresser un plan grossier, puis une seconde qui m'a permis de m'attarder en détails sur les différentes notions, que j'ai dû donc expliquer une à une. En ce qui concerne la forme de la présentation :

- **Écrivez en mode paysage :** vous allez utiliser un visualiseur configuré en mode paysage.
- **1^{ère} page :** mettez un titre à votre exposé, dressez le plan (grands et petits axes).
- **Écrivez assez grand, et gras !** Sinon l'examineur aura du mal à suivre avec vous !
- Utilisez beaucoup de couleurs, des flèches. Bref, soyez le plus explicite possible.
- Faites beaucoup de schémas !
- **Dernière page :** n'oubliez pas la conclusion ! C'est très important.

^aVoir rapport de jury en premier.

Déroulement 8 / 20

Mon sujet d'ADS portait sur les guitares classiques et électriques, ainsi que sur leur principe de fonctionnement. Les documents fournis n'étaient pas trop chargés : il s'agissait principalement de descriptions qualitatives qu'il fallait ensuite traduire en équations. L'étude reposait sur une analyse classique des ondes mécaniques, telle qu'on la retrouve dans le programme de PSI, et prenait essentiellement la forme d'une comparaison entre les deux types de guitares.

J'ai commencé par une première lecture attentive des documents, puis j'ai rédigé mes diapositives. J'ai cherché à privilégier les schémas, en limitant le contenu à au maximum deux relations

par diapositive. Le temps imparti était largement suffisant pour mener cette préparation à bien. Au début de l'oral, j'ai introduit le contexte : où et pourquoi on utilise la guitare électrique plutôt que la guitare classique. J'ai ensuite énoncé la problématique avant de dérouler ma présentation. L'examineur était très attentif et prenait des notes en permanence.

À l'issue de l'exposé, il a posé plusieurs questions. Il m'a notamment demandé de démontrer l'équation de propagation des ondes et d'interpréter chacun de ses termes, en insistant sur la nécessité de réaliser un schéma explicatif. Il m'a ensuite interrogé sur le principe de fonctionnement des micros utilisés dans les guitares électriques ; je me suis appuyé sur la description du texte pour répondre. Il m'a également demandé de citer d'autres dispositifs classiques de microphones.

Puis, il s'est intéressé à la dernière partie de l'article que je n'avais pas traitée lors de ma présentation, car elle ne constituait qu'une ouverture. Il a posé quelques questions afin de vérifier ma compréhension des textes. Enfin, il a conclu l'oral en me demandant de proposer des ordres de grandeur pour les courants et tensions utilisés pour alimenter les guitares électriques. En résumé, la préparation comme le passage à l'oral se sont très bien déroulés. L'examineur est resté très concentré, malgré le fait que l'épreuve ait eu lieu le dimanche après-midi, dernier jour des oraux de la semaine.

Déroulement 13.5 / 20

Le sujet d'ADS portait sur les mesures de la constante gravitationnelle G et sur les moyens de minimiser les incertitudes associées. Il faisait environ six pages, un article de taille raisonnable, aux idées claires et faciles à comprendre. On y retrouvait notamment l'expérience de Cavendish, déjà étudiée en classe, à laquelle j'ai consacré une bonne partie de ma présentation, ainsi qu'une annexe davantage orientée vers des calculs utilisant des opérateurs du type laplacien.

J'ai fait ma présentation en 15 minutes, exactement comme prévu. La phase de questions a alors commencé.

Première remarque du jury : « Tu n'as pas parlé de Cavendish. » Je me suis dit : *wtf* ? Je lui ai réexpliqué exactement comme dans ma présentation, et il a fini par être satisfait.

Deuxième remarque : « L'intérêt des mesures de G et les difficultés rencontrées. » C'était justement le premier axe de ma présentation, donc j'ai expliqué à nouveau. Sa seule réaction : « Tu n'as absolument rien compris. »

Sans transition, il me demande : « Qu'est-ce qu'une orbite circulaire ? » J'ai répondu en raisonnant à partir du repère de Fresnel, ce qui était bien la bonne réponse d'après mes camarades qui avaient eu le même sujet. Sa réaction : « Ce n'est surtout pas cela », tout en consultant ses feuilles avec frustration.

Dernière remarque : il me demande la dimension d'une certaine grandeur, qui était clairement un champ gravitationnel d'après le contexte. J'ai répondu, mais il a immédiatement dit « non », sans réfléchir. J'étais persuadé que c'était un champ, mais face à sa tolérance zéro, il a rétorqué : « C'est une accélération » (qui, ironiquement, a la même dimension qu'un champ gravitationnel).

Il m'a alors demandé de quitter la salle, visiblement frustré, car je n'avais selon lui répondu correctement à aucune question.

C'était mon dernier oral, le seul que je ne devais pas rater pour être admis. Je suis sorti complètement détruit, et c'est bien la raison pour laquelle j'ai envisagé sérieusement les autres concours. Mais grâce à ce 13,5, j'ai finalement été admis.

9.2 ADS Maths

Déroulement 12 / 20

Le document portait sur une marche aléatoire en dimension 1, sujet que j'avais déjà rencontré dans des DM et des annales, mais que je ne maîtrisais pas parfaitement. Le contenu était court (12 pages) et simple par rapport aux ADS que nous avons traitées durant les simulations au Lydex.

J'ai pris le temps de refaire les preuves en les schématisant et en donnant des exemples. Je n'ai présenté aucun résultat qui ne figurait pas dans le document et, de plus, je ne me souvenais pas de grand-chose concernant le sujet.

Lors de ma présentation, j'avais l'impression que l'examineur ne me suivait pas. À la fin, il m'a demandé de refaire certaines preuves, puis il a posé une seule question sur les marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$, à laquelle j'ai répondu.

La note de 12 est correcte, étant donné que le sujet était facile et que je n'ai pas apporté de valeur ajoutée.

Déroulement 13 / 20

J'étais très stressé avant cette épreuve. Je ne me sentais pas suffisamment préparé : je n'avais fait que deux simulations pendant la phase de préparation et, surtout, je n'étais satisfait d'aucun de mes oraux précédents. J'espérais donc beaucoup de cette épreuve avec laquelle je n'étais pas à l'aise, ce qui n'est évidemment pas le meilleur état d'esprit avant un oral.

J'espérais tomber sur un sujet original, plus axé sur la réflexion que sur une culture mathématique solide, que je n'avais pas honnêtement. Quand je découvre le titre du document — minimisation des fonctionnelles quadratiques — je comprends immédiatement que c'est du calcul différentiel, probablement mon pire chapitre. Sur le moment, je n'arrive même pas à y croire : je me prends la tête dans les mains et je ris nerveusement pendant deux bonnes minutes. Puis je finis par me calmer et me dire que, malgré tout, j'ai travaillé ce chapitre, et que je suis capable d'en faire quelque chose.

Le document ressemble à un cours : des rappels classiques, puis des résultats de plus en plus techniques, avant une partie sur les algorithmes de minimisation, et enfin quelques exercices. Je sais vite que je n'irai pas très loin dans la partie algorithmique. Je décide donc de me concentrer sur ce que je maîtrise le mieux : la théorie. Un théorème hors programme sur les multiplicateurs de Lagrange attire mon attention, avec une démonstration utilisant le théorème des fonctions implicites. Je me dis que c'est l'occasion de donner une démonstration dans le cadre du programme.

Je passe près de trente minutes à essayer de me souvenir précisément de la démonstration vue en cours, que j'avais déjà rencontrée plusieurs fois. Je finis par en retrouver l'essentiel et je poursuis. À la fin du temps de préparation, je n'ai qu'à peine abordé la méthode de descente de gradient et je n'ai traité aucun exercice, mais j'ai le sentiment d'avoir une présentation mathématiquement solide et j'espère pouvoir me rattraper lors des questions.

Lors de l'oral, je me rends rapidement compte que mon écriture est trop petite et difficilement lisible à l'écran. L'examinatrice semble déçue et décroche un peu, ce qui me pousse à accélérer. Vient alors la phase de questions : elle revient sur la démonstration des multiplicateurs de Lagrange et me demande de la refaire dans le cas d'un seul multiplicateur. Je m'exécute, mais je repère une erreur, que je corrige rapidement malgré le fait qu'elle voulait passer à autre chose. La correction lui convient et elle enchaîne sur des questions d'application et d'interprétation géométrique des théorèmes, sur lesquelles je m'en sors plutôt bien.

La note finale est légèrement supérieure à ce que j'attendais, ce qui confirme ce que j'avais entendu : en ADS de mathématiques, les questions finales jouent un rôle très important. Mon expérience en est une bonne preuve, car malgré une présentation peu lisible, l'échange avec l'examinatrice a clairement pesé en ma faveur.

Déroulement 13 / 20

Pour la préparation, j'avais 2 heures. J'ai commencé par prendre les feuilles horizontalement, puis j'ai lu les deux PDF dans leur intégralité. Ensuite, j'ai relu le sujet afin de comprendre chaque preuve. En réalité, la première partie était extraite de Math D 2018, donc je l'avais déjà vue. Quant à la deuxième partie, elle était classique. Après avoir compris chaque sous-partie, j'ai pris des notes sur papier de manière systématique, en écrivant uniquement les points importants ainsi que les idées essentielles des preuves les plus significatives.

Concernant le déroulement, je suis entré dans une salle où se trouvait déjà une examinatrice. Elle avait l'air en colère, donc j'ai pensé que c'était fini pour moi, surtout lorsqu'elle n'avait pas l'air satisfaite pendant que je présentais ce que j'avais écrit. Après avoir terminé ma présentation (je n'avais pas de montre, donc je ne savais pas si j'avais respecté le temps), elle a commencé à me poser des questions. J'y ai correctement répondu au début, mais elle ne semblait toujours pas contente. Pour la dernière question, elle m'a demandé de répondre uniquement par oui ou non et d'indiquer mon degré de certitude. J'ai répondu incorrectement. Je pensais alors que j'allais avoir 6 ou quelque chose de similaire, mais finalement j'ai obtenu 13.

Déroulement 8 / 20

Le sujet tournait autour des marches aléatoires, et j'étais hyper confiant : d'une part, j'aime la proba et tout ce qui est combinatoire ; d'autre part, j'avais littéralement fait un DM de Monsieur Chabchi sur le sujet.

Bref, j'étais prêt. La phase de préparation n'était pas une découverte du sujet : je le connaissais déjà en entier, même dans les détails. Il s'agissait surtout de bien gérer la présentation. J'ai aussi présenté des manières d'implémenter les fonctions et leurs complexités. J'ai également donné beaucoup d'« extras » sur l'ADS.

Bref, sur la phase de résolution, j'ai tout aussi bien répondu. Pour moi, c'était un 14 à minima, mais en sortant, j'ai été surpris par un 8 ! D'ailleurs, je trouve cette note totalement imméritée. À titre de comparaison, j'ai passé le même sujet avec un Marocain qui a eu 7 dans cet ADS et qui était admissible à l'ULM.

Bref, les critères de notation de cette épreuve restent, à mon sens, très mystérieux.

Le début de mon sujet est ici : https://www.normalesup.org/~mabboud/rennes_et_maths/exo_marches_aleatoires.pdf, j'imagine que c'est une concaténation de plusieurs sources pour l'occasion.

10 Chimie

Préparation & déroulement (16/20)

En Chimie, j'ai utilisé pour la préparations aux oraux les livres "SAVOIR & FAIRE EN PRÉPAS" de Sup et Spé pour avoir un cours bien résumé avec les différentes méthodes de résolution et quelques applications. Et j'ai complété avec les questions de cours (ultra intéressantes) et les exercices de "Les Mille et Une Questions en Prépa" de Chimie.

En ce qui concerne le déroulement de mon oral, l'exercice qu'on m'a donné portait sur l'oxydoréduction (n.o, diagramme E-pH, dosage). Il était assez accessible honnêtement, mais assez long, et il fallait déterminer plusieurs valeurs à partir du diagramme qui contenait plusieurs espèces.

Conseil important : Je vous conseille de retracer le diagramme au tableau et d'y mettre directement les espèces correspondant aux différentes zones. Je n'avais pas recopié le diagramme et cela me prenait du temps pour faire correspondre les chiffres romains aux espèces que j'avais trouvées à la première question. Il y avait une dizaine d'ions et ce n'était vraiment pas évident à gérer tout ça sur la feuille d'énoncé.

De plus, je me suis trompé sur un calcul (j'avais écrit 12 au lieu de 0,12) et ça m'a fait perdre de précieuses minutes. Vers la fin, il ne restait qu'environ trois minutes et l'examinatrice m'a demandé comment on pouvait déterminer une quantité de matière à partir du protocole proposé (il s'agissait en fait d'un dosage en retour). J'ai explicité le calcul et fait l'application numérique que je trouve heureusement correcte, ce qui a sauvé les meubles. J'ai eu 16/20.

Préparation & déroulement (11/20)

Avant d'entamer le déroulement de mon oral de chimie à l'X, j'aimerais préciser que j'avais bien travaillé la chimie dès la sup, et que mes résultats étaient révélateurs de cela (20 en chimie à l'écrit de Mines). Le problème avec mon oral à l'X est qu'il était complètement hors programme : un oral sur la chimie organique !

Avant cela, lors de la vérification de ma pièce d'identité, le jury ne voulait pas toucher mon passeport (première et dernière fois que cela m'arrive). Le jury n'avait absolument pas l'air sympathique, il ne me regardait même pas dans les yeux. Il me demande de prendre l'énoncé posé en haut d'une pile d'exercices. J'ai immédiatement remarqué les figures de composés organiques cycliques, ce qui m'a beaucoup perturbé. Ce qui m'a encore plus gêné, c'est que l'énoncé en dessous, de l'élève français qui venait de passer l'oral, portait sur des questions d'oxydo-réduction et de dosage très simples, que je maîtrisais bien.

La première question portait sur l'égalité à l'équivalence d'un dosage. Je l'ai écrite directement en respectant les coefficients stœchiométriques. Il m'a quand même dit que je l'avais posée parce que je l'avais apprise par cœur (alors que c'est très facile de la retrouver). Il me demande ensuite d'expliquer ce qu'est un dosage, de définir l'équivalence et de tracer le tableau d'avancement, ce qui m'a perturbé car je perdais du temps précieux sur une question triviale.

Ensuite, le sujet s'oriente directement et entièrement vers la chimie organique (ce n'est même pas ce que l'on faisait au lycée), et l'on me pose de nombreuses questions sur des termes que je n'avais jamais entendus, comme par exemple la dimérisation d'un alcène (je n'en avais, et je n'en ai toujours, aucune idée), ou encore pourquoi un composé cyclique (dont j'ai oublié le nom) est miscible dans un alcool, que j'ai également oublié, et pas dans l'eau. Je lui ai expliqué que l'eau est dipolaire et que cela a peut-être un effet sur la miscibilité. Il m'explique alors que ce n'est pas vrai pour tous les composés cycliques et que je dois connaître des caractéristiques

propres au composé proposé, mais je n'en avais absolument aucune idée.

Il me pose encore davantage de questions auxquelles je n'arrive absolument pas à répondre. L'oral se termine ; j'étais très déçu, car tous mes efforts en chimie pendant deux ans de prépa semblaient avoir été vains (au moins à l'X). Je conseille aux futurs admissibles de réviser un peu la chimie organique.

Un autre point important : je n'étais pas le seul à avoir de la chimie organique. Quasiment tous les élèves passés devant ce jury avaient les mêmes plaintes, que ce soit en termes de hors programme ou de comportement étrange du jury.

Je vous conseille vivement de réviser la chimie avant les écrits et les oraux à travers le résumé de Mr. Sondali (drive).

Préparation & déroulement (10/20)

Très insatisfait. La première question portait sur la représentation de Lewis d'une molécule relevant de la chimie organique. Quasiment impossible à trouver seul tellement la structure était complexe. Les questions qui s'ensuivent sur pourquoi telle structure et pas une autre étaient tout aussi indéchiffrables surtout quand l'argument de stabilité a été jugé insuffisant par l'examineur. Mis à part ce début déroutant le reste était indépendant, il abordait de l'électro-chimie avec les questions classiques qui vont avec.

11 TIPE ENS

11.1 TIPE MATHS

Déroulement 14.1 / 20

J'étais un peu stressé avant l'oral, mais assez rapidement le candidat qui me précédait est sorti et c'était à mon tour de passer. Avant d'entrer, une fille est venue me voir pour me demander si elle pouvait assister à mon oral. Je n'y voyais aucun problème, donc j'ai accepté.

Ensuite, je suis entré dans la salle d'oral où se trouvaient deux examinateurs. Ils m'ont demandé si je souhaitais avoir accès à la version PDF de ma présentation, mais je leur ai répondu que j'avais seulement besoin du tableau et de quelques craies, ce qu'ils m'ont bien évidemment fourni.

J'ai alors commencé à présenter, définition par définition, en démontrant au passage les lemmes, propositions et théorèmes. Nous avons discuté de tout ce que j'écrivais, notamment de démonstrations alternatives, etc. Les examinateurs étaient vraiment très gentils et m'ont aidé à avancer en simplifiant certaines preuves. Ils m'ont également posé des questions au fil de la présentation, par exemple sur des exemples, des contre-exemples, etc.

À la fin, je n'étais même pas proche d'avoir terminé, mais je pense avoir tout de même fait du bon travail.

Déroulement 5.2 / 20

Pour plus de contexte, mon sujet était un sujet de maths qui traitait de la progression arithmétique de Dirichlet. Première fois à Ulm, on m'envoie dans une salle du troisième étage. Avant l'oral, je stressais de malade, c'était mon premier oral ! Heureusement, et devant la salle, je parle avec une amie par message qui me rassure et avec qui je parle durant toute la durée d'attente et je l'en remercie. Juste avant le début de l'oral, deux SUP de LLG me demandent s'ils peuvent assister à l'oral et comme je ne sais pas dire non, j'accepte. Ils étaient tellement contents qu'on aurait dit qu'ils avaient eu que des refus avant moi. Les deux examinateurs m'accueillent en me disant que si jamais je disposais d'une clé USB, alors je pouvais l'utiliser pour projeter, je répondis que oui sauf qu'ils me disent de faire l'entiereté de ma présentation dans un tableau fait de verre ou je ne sais quel autre matériau transparent. Je donnai quelques définitions et propriétés sur les polynômes cyclotomiques et mes quatre spectateurs semblaient intéressés. Alors que j'allais passer au vif du sujet, les examinateurs me bloquent sur d'autres propriétés sur les polynômes cyclotomiques... Au final, je suis resté bloqué sans jamais arriver au coeur du sujet qui était bien plus compliqué et que je maîtrisais plus ou moins. C'est avec des sentiment de soulagement et d'humiliation que je sortis de ce premier oral, tout en ne me décourageant pas pour les oraux des ENS à venir.

11.2 TIPE PC

Déroulement 13 / 20

L'oral est mené par deux examinateurs. Malgré ce qui est indiqué sur la notice, ils ne semblait pas être au courant que je devait ramener le code Python. Ils commencent par me poser quelques questions générales sur ce qui m'a poussé à choisir ce sujet là et la répartition du travail

entre moi et mon binôme. Ensuite, je commence à présenter le rapport. Ils m'interrompent tout le long et posent des questions qui n'ont pas forcément de rapport avec ce que je dis et je dois aller chercher la partie en question dans le rapport. Le fait que ce ne soit pas linéaire peut être perturbant.

Déroulement 13 / 20

Le jury était composé de deux chercheurs qui avaient déjà lu attentivement mon rapport de TIPE et en avaient identifié les points faibles. L'un des deux restait plutôt silencieux et prenait des notes, tandis que l'autre posait énormément de questions.

Au début de l'épreuve, on m'a demandé d'émarger, puis le jury m'a fourni un ordinateur (très ancien !) sur lequel se trouvait mon rapport de TIPE. Le jury a ensuite pris la parole pour m'expliquer clairement qu'il ne s'agissait pas d'une présentation classique : ils connaissaient déjà le contenu du rapport et allaient simplement me demander de faire défiler les diapositives afin de poser leurs questions au moment opportun.

Avant cela, ils m'ont demandé de résumer brièvement l'idée générale du TIPE, d'exposer les principales étapes de mon travail, puis de préciser si le projet avait été réalisé seul ou en groupe. Une fois cette introduction terminée, ils m'ont immédiatement demandé d'aller à la dernière page : la bibliographie. Pour chaque référence citée, je devais expliquer pourquoi je l'avais choisie, comment je l'avais utilisée et à quel endroit précis du travail. Un court moment de panique s'est installé, car il est presque impossible de se souvenir du contenu exact de chaque référence. J'ai donc commencé par détailler celles dont je me souvenais le mieux, et pour les autres, je me suis contentée d'en reformuler l'idée principale à partir du titre. Cela leur a semblé suffisant : pour eux, le plus important était surtout de ne pas inventer.

Nous avons ensuite enchaîné sur le reste du TIPE sous la forme d'un échange questions-réponses. Par moments, ils me demandaient de redémontrer certaines relations que j'avais pourtant déjà mises en annexe. Il est donc essentiel de savoir redémontrer absolument tout ce qui figure dans les diapositives. Le jury a également exigé une explication détaillée du code Python, ligne par ligne, ainsi qu'une description très précise des étapes des expériences réalisées.

Vers la fin, je pensais que l'épreuve touchait à sa conclusion, mais le jury a posé une dernière question inattendue : « Qu'est-ce qui manque à ce travail ? » Je suis restée silencieuse quelques instants, car cette question me semblait plutôt destinée aux examinateurs qu'au candidat. J'ai finalement répondu que je ne savais pas. Leur réponse a été immédiate : les incertitudes de calcul, que je n'avais pas évaluées en raison de la complexité des formules.

En conclusion, ce déroulement est très représentatif du TIPE à l'ENS. C'est une expérience que j'ai trouvée extrêmement enrichissante, car elle confronte le candidat à de véritables chercheurs. Leurs questions donnent parfois l'impression de ne rien comprendre à son propre sujet, mais elles permettent aussi de valoriser les efforts fournis à la fin. Et surtout : si vous faites un TIPE de physique à l'ENS, CALCULEZ LES INCERTITUDES.

11.3 TIPE INFO

Déroulement 13 / 20 (avec un plot twist)

Arrivé devant la salle, je stresse un peu car, d'une part, l'heure de l'épreuve est arrivée mais la porte ne s'est toujours pas ouverte et, d'autre part, tous les candidats à mes côtés ont des papiers de leur TIPE en main avec des notes, etc.

Je rentre dans la salle et je vois deux femmes, probablement deux chercheuses. J'aperçois mon PDF projeté au tableau. Je présente ma pièce d'identité ; elles me demandent si j'ai des feuilles en main, je réponds que non et je commence.

Mon TIPE est axé sur les séries génératrices d'un point de vue algorithmique et informatique, le but étant le calcul rapide de séries génératrices résultant de produits, sommes, fractions et diverses autres opérations.

Elles me disent que je peux gérer mon temps à ma guise, c'est-à-dire sauter des démonstrations, etc. Malgré cela, je m'efforce de présenter les démonstrations au tableau. Elles m'arrêtent à plusieurs reprises pour que j'explique des passages (honnêtement, à un moment, je trouvais qu'elles ne comprenaient pas vraiment ce que je disais, mais bon...).

Je continue sur ma lancée : je présente des détails théoriques, des analyses de complexité et, à la fin, des applications sur des problèmes originaux que j'ai moi-même créés (j'avais de l'expérience dans la création de problèmes d'informatique). Le souci, c'est qu'à la fin, j'ai commencé à accélérer en voyant que le temps ne suffirait pas. Cela m'a forcé à présenter rapidement des détails jolis et intéressants, ce qui n'a pas été apprécié. Pour finir, elles m'ont posé des questions sur l'origine de mes problèmes ; j'ai expliqué que j'en avais rencontré certains dans des compétitions et que d'autres étaient de ma création.

Il faut savoir que je m'attendais à bien plus que 13, mais bon, cela reste correct. Cette erreur de gestion du temps vient du fait que je n'ai pas essayé de simuler le TIPE ENS avant. De plus, toute la phase de choix du sujet, rédaction et création de problèmes a été faite en un jour à cause du délai donné par les ENS après l'annonce de l'admissibilité.

PLOT TWIST : Après mon admission, en septembre j'ai rencontré l'une des examinatrices qui m'a reconnu, et il se trouve qu'elle était prof de prépa. Le sujet de ma note de TIPE est revenu sur le tapis et elle m'a expliqué que, parmi les éléments qui justifiaient ma note, il y avait le fait que je n'avais pas de documents d'aide en main (comme si c'était une règle non dite). Donc, un conseil pour les futurs candidats : munissez-vous de votre rapport de TIPE et de certaines notes, cela vous donne plus de crédibilité.

12 Oral Info ENS

Énoncé 35

On étudie, compte et range des classes d'équivalence de fonctions d'un ensemble fini N à n éléments dans un ensemble fini X à k éléments.

On s'intéresse à quatre relations d'équivalence pour les fonctions :

- l'égalité, notée **DD**,
- l'égalité à permutation des éléments de N près, notée **UD**,
- l'égalité à permutation des éléments de X près, notée **DU**,
- l'égalité à permutation des éléments de N et de X près, notée **UU**.

Lorsqu'on a une égalité à permutation près sur un ensemble, on peut considérer que les éléments de cet ensemble sont « indistinguables » (*Undistinguished*) pour la comparaison des fonctions, ce qui explique les notations U et D.

En outre, on s'intéresse à trois caractéristiques des fonctions qu'on étudie :

- les fonctions arbitraires (notées **A**),
- les fonctions injectives (notées **I**),
- les fonctions surjectives (notées **S**).

Cela définit 12 ($3 * 4$) problèmes de dénombrement, appelés *douze chemins* (twelvefold way), ou douze problèmes de Gian-Carlo Rota. Par exemple, le problème noté **IDU** consiste à dénombrer et décrire les classes d'équivalence de fonctions injectives à permutation de X près. Quand $j \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser $[1; j]$ pour désigner $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq j\}$.

- Dénombrer les classes des problèmes suivants :
 - **ADD**.
 - **IDD**.
 - **IUU**.
 - **SUD**.
- Pourquoi la caractéristique bijective n'est-elle pas étudiée ?
- Les problèmes des douze chemins admettent chacun au moins une représentation naturelle de leurs classes d'équivalence et un ordre lexicographique sur ces représentations.

Donner de telles représentations et ordres pour les problèmes de la première question.

Un *algorithme de déclassement* pour un problème des douze chemins est un algorithme qui prend en entrée un entier i et renvoie en sortie une représentation de la classe d'équivalence située à la $i + 1$ -ème place selon l'ordre lexicographique associée à ce problème.

- Donner des algorithmes de déclassement pour les problèmes de la première question.

Dans la suite, on s'intéresse uniquement au problème **SDU**.

- Donner une relation de récurrence décrivant le dénombrement des fonctions de **SDU**.

Ordre sur les ensembles

Soit A et B deux ensembles d'entiers naturels, on définit $A < B = (\min A \leq \min B)$.

Soit A et B deux ensembles, on note AB pour $\{x \in A \mid x \notin B\}$.

Soit A et B deux ensembles d'entiers naturels, on définit $\sqsubset$ ainsi :

$$A \sqsubset B \equiv \begin{cases} A = B \\ \text{ou } A \subset B \text{ et } \max A < \min(BA) \\ \text{ou } B \subset A \text{ et } \min(AB) < \max B \\ \text{ou } \min(AB) < \min(BA) \end{cases}$$

- Donner une représentation des classes de **SDU**, puis un ordre total sur ces classes.
- Donner les 10 premières fonctions, pour cet ordre, de **SDU** avec $n = 5$ et $k = 3$.
- Donner un algorithme de déclassement pour **SDU**.

Déroulement 13 / 20

Le sort semble vouloir que je ne réussisse jamais une épreuve d'informatique, bien que ce soit mon point fort ...

L'épreuve a débuté par 30 minutes de préparation, durant lesquelles j'ai tenté d'optimiser mon temps. Le sujet étant plus mathématique qu'informatique, j'ai tout de même pu terminer les quatre premières questions et entamer la cinquième.

Lors de la présentation orale, j'espérais devoir produire beaucoup de code, mais cela n'a malheureusement pas été le cas. L'essentiel de l'échange consistait à démontrer des assertions. Bien que je comprenne l'importance des preuves, je regrette l'absence d'analyse de complexité, hormis une brève remarque sur le nombre d'opérations.

J'ai néanmoins réussi à exposer ma préparation. L'examineur s'est montré bienveillant, comme souvent aux ENS, n'hésitant pas à m'encourager et à me signaler mes étourderies. En somme, une prestation moyenne pour une note cohérente.

13 TP Info ENS

Déroulement 19.8 / 20

Sans doute l'oral qui va le mieux avec ce que je sais faire : programmer sans rien prouver. C'était la première fois où je me rendais au Plateau de Saclay. J'avais déjà fini tous mes oraux à l'ENS et il ne me restait que cette épreuve de 4 h 10 d'info, dont je n'avais appris l'existence qu'en lisant ma convocation une semaine avant.

On me fait patienter dans une salle d'attente et un des surveillants me guide vers une salle qui contient à peu près 20 personnes. Je m'assois devant mon PC, je prends connaissance de mon environnement de travail et quand le coup de sifflet est donné, je commence.

La vérité, c'est que je n'ai même pas eu un seul problème dans la résolution des exercices : tout était simple pour moi et j'étais à peu près aux 5/6 du sujet à la moitié du temps. J'ai donc tout fini ; il me restait néanmoins une seule question sur la vingtaine où mon code ne voulait pas marcher, alors que j'étais certain de mon approche. Bref, à la fin du temps imparti, je lève la tête et je vois toutes les personnes de la salle à la moitié du sujet (j'étais assis au dernier rang), ce qui m'a donné un bon boost mental.

Après être entré en salle avec l'examineur pour l'exposé de 10 min, il semblait agréablement surpris de mon avancement. Il m'a posé des questions auxquelles je n'ai eu aucune difficulté à répondre ; j'ai même proposé une amélioration de complexité pour une question. Tout s'est bien passé, je suis sorti satisfait et la note reflétait bien ma prestation.

Conseil : il faut avoir une bonne maîtrise de la programmation dynamique c'était le thème dominant de mon TP.

14 Français

Déroulement 19 / 20

Le texte que j'ai reçu était de Hume. Il posait la question suivante : l'être humain peut-il imaginer ou comprendre autre chose que ce qu'il a vécu par l'expérience ?

Hume donne l'exemple de la montagne d'or : on ne peut l'imaginer que si l'on connaît déjà les termes « montagne » et « or » séparément. Il en déduit que toute l'imagination humaine, et tout ce que l'homme peut créer, vient nécessairement de l'expérience.

Pour répondre à cette problématique, j'ai utilisé un plan thèse-antithèse-synthèse. Dans la thèse, j'ai confirmé les propos de Hume : l'expérience limite effectivement l'imagination et la compréhension de l'homme. Dans l'antithèse, j'ai montré que ce n'était pas le cas, en affirmant que c'est plutôt la logique, notamment mathématique, qui borne techniquement l'imagination. Enfin, dans la synthèse, j'ai conclu que l'imagination est un mélange entre la logique et l'expérience. C'est ce qu'on appelle la modélisation. J'ai donné l'exemple de la mécanique quantique actuelle, dont les modèles ne sont issus ni à 100 % de l'expérience, ni à 100 % de la logique.

Je pense que deux points sont très importants pour l'oral de l'École polytechnique. Premièrement, la richesse de la culture générale. Il faut essayer de donner énormément d'exemples, de manière très diverse, que ce soit en histoire, géopolitique, mathématiques ou philosophie. Il faut vraiment faire de son mieux pour illustrer ses propos. De mon côté, j'avais cité de grands savants en mathématiques et physique, la figure du voyageur et des philosophes comme Descartes. Le deuxième point essentiel est de construire un raisonnement logique, qui doit être clair, intéressant et simple. Je pense que la meilleure méthode est d'utiliser le modèle thèse-antithèse-synthèse. C'est ce qui apporte le plus de richesse. Même si ce plan n'est pas apparent au premier abord, il faut essayer de l'appliquer, car cela donne un très bon résultat pour l'analyse.

Déroulement 17 / 20

Ce déroulement est là pour vous dire que vous pouvez avoir une bonne note en français. L'épreuve de français était la dernière, dimanche après-midi. J'étais épuisé mais je n'avais pas l'intention d'abandonner cette épreuve quoiqu'elle soit facultative. En fait, je n'étais pas très bien préparé pour cette épreuve, j'ai fait 2 simulations avec les profs et je connaissais la méthodologie mais à part ça rien d'extraordinaire. Je vous encourage fortement à croire en votre capacité à avoir une bonne note à l'oral de français à l'X surtout, parce que franchement vous l'avez même si comme moi vous ne vous estimez trop forts en cette matière, avec la volonté tout est possible. Mon sujet s'inscrit dans la thématique de la science, un sujet qui me passionne bien évidemment et donc en ce qui concerne le commentaire j'étais plutôt confiant. Par contre, le texte était extrait d'un dialogue ce qui ne m'a pas facilité trop la tâche de compréhension notamment savoir qui parle en chaque moment et d'ailleurs j'ai fait une erreur sur ce point là dans l'analyse mais cela ne m'a pas trop pénalisé parce que j'ai pu entretenir une discussion intéressante avec l'examineur ce qui a laissé une impression assez bonne chez lui. Ma stratégie avant d'entrer à la salle était d'orienter la discussion dans le commentaire vers des sujets que je maîtrise sans pour autant faire un hors sujet. Dans le texte, il y avait un personnage qui parlait entre autres des innovations que l'humanité a pu accomplir et donc je me suis penché sur ce point pour parler de la curiosité qui caractérise l'homme de par sa nature, j'ai donné aussi des exemples de gens qui ont marqué l'histoire et sur cela je veux signaler

que sur mon brouillon j'ai noté les noms de quelques personnages arabes et musulmans mais j'ai oublié de les mentionner et l'examineur que tu as pu mentionner ceux-là plutôt que les autres européens que tu as cités, donc faites attention à bien organiser votre brouillon.. Après cette première partie, j'ai évoqué l'utilisation de la science pour des fins comme la guerre, la domination.. J'ai donné l'exemple de l'Iran et son programme nucléaire ce qui a par la suite orienté notre discussion vers la géopolitique. Vers la fin de l'oral, l'examineur m'a même demandé est-ce que l'Iran a le droit de posséder l'arme nucléaire, je n'ai pas dit oui ou non, ma réponse était indirecte (parce que je savais qu'il ne cherchait pas à connaître ma position peu importante) mais l'examineur a souri en marquant la fin de l'oral. Enfin, je vous conseille d'être confiants en vous-même, de savoir la méthodologie et cela en faisant des simulations avec vos profs, essayer de suivre l'actualité et surtout à l'oral, au moment de la préparation, écrivez juste les grandes lignes à étoffer par la suite au moment du passage devant l'examineur.

Déroulement 15 / 20

De prime abord, la durée de préparation est largement suffisante pour l'oral de français de l'X pour pouvoir recenser ses idées et en retenir les plus pertinentes. En effet, il s'agissait d'un texte de Charles Baudelaire intitulé «À quoi bon la critique», un de mes écrivains préférés, je me rappelle bien de son recueil de poèmes qui m'était un livre de chevet durant mon enfance. De ce fait, l'auteur m'était intellectuellement un membre de famille, ce qui m'a amplement motivé lors de la préparation si bien que j'ai bien réussi l'oral. Bref, je disposais de toute une panoplie d'idées et de références philosophiques et culturelles, lesquels atouts j'ai veillé à les mettre en valeur avec une aisance orale louable et une cohérence dans les différentes transitions entre les rubriques constitutives de ma présentation orale, par conséquent, ma présentation a duré 21 minutes. Au bout du compte, c'était vraiment un échange culturel fructueux et très agréable avec l'examineur qui a fait preuve d'un émerveillement et d'une attention particulière aux idées percutantes. Conseils : Respectez scrupuleusement la méthodologie de l'oral, et puisez dans votre intellect pour meubler votre présentation dans le temps imparti.

Énoncé 36 "Source"

Livre de Sigmund FREUD : PSYCHOPATHOLOGIE DE LA VIE QUOTIDIENNE Lien vers le PDF, Chapitre : "Association de plusieurs actes manqués", pages 246-248 jusqu'à "lorsque je suis rentré pour prendre les lettres à côté desquelles il était déposé".

Déroulement 14 / 20

Je n'étais pas confiant, car mon français à l'oral était l'un de mes points faibles. En revanche, j'ai eu la chance d'avoir un sujet sur lequel j'avais beaucoup de connaissances. Durant les 45 minutes de préparation, j'ai lu le texte rapidement, puis je l'ai résumé, apporté une problématique et fait un plan de dissertation. Je n'ai pas eu le temps de finir toutes les parties de la dissertation, donc j'ai dû improviser. L'examineur était plutôt sympathique et curieux. Il n'avait pas l'air de me juger, et l'oral prenait plutôt la forme d'une conversation. J'avais plusieurs exemples en tête (par exemple, j'avais vu la série VSauce Mind Field sur YouTube). J'ai aussi évoqué mon TIPE, qui traitait de l'analyse des signaux du cerveau, ainsi que quelques aspects de la psychologie. Au final, même si j'avais des difficultés au niveau de l'expression,

j'ai respecté la consigne (voir rapport du jury) et j'ai pu me débrouiller avec les exemples que j'avais en tête.

15 Arabe

Déroulement 20 / 20

Source : <https://youtu.be/aoxj0dlzB1M>

كانت المدة الزمنية المخصصة كافيةً إلى حدٍّ بعيدٍ لحصر الأفكار المطروحة واستيعابها، ثم انتقاء أكثرها عمقاً وتأثيراً. وقد تعلّق الأمر بمقتطف سمعيٍّ بصريٍّ بثّته القناة التلفزيونية التونسية، تناول ظاهرة العنف المسلط على المرأة وما تحمله من أبعاد اجتماعية وإنسانية خطيرة.

ومنذ الوهلة الأولى، حرصتُ على الالتزام الصارم بالمنهجية المطلوبة، ملتزماً بخطواتها ومقتضياتها دون إخلال أو تجاوز، مع السعي إلى إبراز الأفكار الجوهرية التي استخلصتها في حلة لغوية أنيقة، وصياغة بيانية رفيعة، اتسمت بالفصاحة والبلاغة وحسن الأداء، بما يليق بجسامة الموضوع وأهميته

Déroulement 19 / 20

La méthodologie est plus que suffisante pour réussir cet oral. Une présentation structurée, consistante en terme de contenu et dans laquelle vous ne vous répétez pas mènera probablement à une bonne note meme avec un niveau de langue moyen. Mon texte portait sur la question suivante : l'IA est-elle sexiste envers les femmes? Que ce soit l'IA ou le féminisme, ces deux sujets sont assez récurrents donc j'avais pas mal d'arguments en tête. Je les ai adaptés au format de la méthodologie du prof et conclu par la déresponsabilisation de l'IA pour accuser l'Homme. Pour les questions qui s'ensuivent j'ai essayé de m'aligner sur le discours actuel en faveur du féminisme. Je conseille vivement d'oublier tout ce qui peut relever du conservatisme, ne serait-ce que pour la durée de l'oral, afin d'éviter de "choquer" l'examineur, ce qui se reflètera sur la note.

Déroulement 14 / 20

La video portait sur la proportion des femmes dans le milieu de la Tech et sur les biais misogynes que peut avoir l'IA. Il y avait deux examinateurs. Je n'ai pas pu tenir tout le temps impartit car j'ai perdu le fil au milieu de ma présentation (un gros insecte avait commencé a se balader sur le bureau et on s'est interrompu pour s'en débarrasser) mais j'ai pu utiliser les idées restantes pour la discussion. Ce n'était pas le pire sujet à avoir (surtout pour une fille) et il y'avait beaucoup de chose à dire. Le fond est autant pris en compte que la forme et malgré une prestation pas si bonne que ça, ça s'est bien passé.

16 Anglais

Déroulement 17 / 20

On m'a donné une vidéo d'environ 5 minutes concernant les actions que Trump a prises au sujet du Congrès. C'était satisfaisant pour moi car j'avais quelques connaissances sur la politique américaine.

Je prépare une introduction, un petit résumé de la vidéo, puis un commentaire sur les actions de Trump, le tout sous forme de tirets et d'idées, non pas des paragraphes, pendant 20 minutes. Je suis donc guidé vers la salle d'examen. Il y avait 2 examinateurs, une vieille femme à l'accent américain, et un jeune homme qui me semblait anglais.

Je commence par présenter ce que j'ai préparé, je parle pendant 15 minutes plus ou moins. Quand je termine, les examinateurs commencent à me poser des questions, d'abord sur le contenu de la vidéo et sur quelques termes utilisés dans cette dernière, puis ils s'interrogent sur ce que j'ai présenté comme commentaire, où je ne fais que condamner les actions de Trump, et les examinateurs semblent amusés, surtout l'examinatrice. Pour les 5 dernières minutes, elle me pose une question ouverte sur ce qu'il va se passer aux États-Unis vis-à-vis des décisions de Trump, je donne une prédiction où Trump ne triomphe pas et je justifie pourquoi. Elle me semble satisfaite, me dit qu'elle espère que cette prédiction sera correcte, et l'oral se termine. En me basant sur ma note, je pense qu'outre l'expression et le langage, j'ai pris la position politique qui correspond à la leur, et cela a permis un bon passage

Déroulement 17 / 20

Le sujet était l'énergie géothermique. Il y avait deux examinateurs : une femme qui posait les questions les plus dures et un homme qui était plus sympa. Il s'agissait de questions du style : citer les différentes sortes d'énergies renouvelables, expliquer leur fonctionnement et donner mon avis sur la question. Pour la dissertation orale, j'ai rappelé les limites des énergies renouvelables, le fait qu'elles ne sont pas toujours aussi vertes qu'on le pense et leurs dangers (tout en concédant qu'elles restent meilleures que les énergies fossiles). Ils ont semblé apprécier la nuance

17 Corrigé Maths X

17.1 Corrigé de l'énoncé 1

Solution

Exercice 1

1. facile
2. Montrons que AN est antisymétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\langle ANX, Y \rangle_A &= (ANX)^T A^{-1}Y = X^T N^T A^T A^{-1}Y \\ &= X^T N^T Y = -X^T NY\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\langle X, ANY \rangle_A = X^T A^{-1}ANY = X^T NY$$

Donc $\langle ANX, Y \rangle_A = -\langle X, ANY \rangle_A$, ce qui montre que AN est antisymétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Il est connu que les matrices antisymétriques sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$, et en général les matrices normales (qui commutent avec leurs transconjugués) sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$, démontrons le:

Lemme. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

Preuve : Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$ (par stabilité), donc :

$$\langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle = 0$$

car $y \in F^\perp$ et $u(x) \in F$. Donc $u^*(y) \in F^\perp$. □

Théorème. Montrons par récurrence sur $\dim(E)$ que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uu^* = u^*u$, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Démonstration.

Initialisation : Pour $n = 1$, c'est évident.

Hérédité : Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$ et montrons-le au rang n .

Le corps de base de E est $\mathbb{C}$, donc u admet au moins une valeur propre λ . Soit E_λ le sous-espace propre correspondant.

Le sous-espace E_λ est stable par u^* (car u et u^* commutent) donc $F = E_\lambda^\perp$ est stable par u (le lemme). Comme $u|_F$ et $(u|_F)^* = (u^*)|_F$ commutent et que $\dim F \leq n - 1$, il existe d'après l'hypothèse de récurrence une base orthonormale B_1 de F qui diagonalise $u|_F$.

En adjoignant à B_1 une base orthonormale B_2 de E_λ , on voit que $B = B_1 \cup B_2$ est une base orthonormale de E qui diagonalise u . ce qui conclut la récurrence et la démonstration.

Exercice 2

Supposons par l'absurde que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, supposons que $y > 0$ sur $\mathbb{R}$.

On a $y'' = -e^x y < 0$, donc y est concave sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x, a \in \mathbb{R}$, on a $y(x) \leq y'(a)(x - a) + y(a)$.

Si $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $y'(a) > 0$:

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(a)(x - a) + y(a) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, ce qui contredit le fait que $y > 0$.

Si $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $y'(a) < 0$:

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(a)(x - a) + y(a) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$, ce qui contredit le fait que $y > 0$.

Donc $y' = 0$ sur $\mathbb{R}$:

Alors y est constante. Soit $y = c > 0$. L'équation $y'' + e^x y = 0$ devient $0 + e^x c = 0$, ce qui est absurde.

Contradiction. Donc y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

17.2 Corrigé de l'énoncé 2**Solution**

(i) $\implies$ (ii)

Supposons que $\text{rg}(f - \text{id}) = 1$ et $\text{tr}(f - \text{id}) = 0$.

Alors $\exists a \in E \setminus \{0\}$ tel que $\text{Im}(f - \text{id}) = \text{Vect}(\{a\})$.

Donc $\forall x \in E$, $\exists l(x) \in \mathbb{K}$ tel que $(f - \text{id})(x) = l(x)a$.

On vérifie facilement que l est une forme linéaire non nulle.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sa base duale.

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}(f - \text{id}) = \sum_{i=1}^n e_i^*(l(e_i)a) \\ &= \sum_{i=1}^n l(e_i)e_i^*(a) \\ &= \sum_{i=1}^n l(e_i^*(a)e_i) \\ &= l\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(a)e_i\right) = l(a) \end{aligned}$$

Donc $l(a) = 0$.

(ii) $\implies$ (i)

Supposons (ii).

On a $\ker(f - \text{id}) = \ker(l)$ donc

$$\text{rg}(f - \text{id}) = n - \dim(\ker(f - \text{id})) = n - \dim(\ker(l)) = n - (n - 1) = 1$$

et

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(f - \operatorname{id}) &= \sum_{i=1}^n e_i^*(l(e_i)a) \\
 &= \sum_{i=1}^n l(e_i)e_i^*(a) \\
 &= \sum_{i=1}^n l(e_i^*(a)e_i) \\
 &= l\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(a)e_i\right) = l(a) = 0
 \end{aligned}$$

17.3 Corrigé de l'énoncé 3

Solution

Exercice 1

Changement de variable

On pose $u = tx$. Alors $t = \frac{u}{x}$ et $dt = \frac{du}{x}$.

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x} e^{-u/x}\right)^x \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^x e^{-u} du.$$

$$I(x) = \frac{1}{x^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du.$$

Par définition, $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du$. Donc

$$I(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}}.$$

On rappelle la **Formule de Stirling** (hors-programme)

Pour $x \rightarrow +\infty$,

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Ainsi

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x}{x^{x+1}} = \frac{\sqrt{2\pi x}}{x} \cdot \frac{x^x}{e^x x^x} = \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x x}.$$

$$I(x) \sim \sqrt{2\pi} \frac{1}{e^x \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x}.$$

$$\boxed{I(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} \quad (x \rightarrow +\infty).}$$

Exercice 2

- 1^{er} cas : $\operatorname{tr}(A) \neq 0$

Alors $\chi_A = (X - \text{tr}(A))X^{n-1}$ et $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1$ donc $\dim(E_{\text{tr}(A)}) = 1$ Donc A est diagonalisable (multiplicité algébrique = géométrique) de même pour B donc les deux sont semblables à

$$\begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc elles sont semblables

- 2^{eme} cas : $\text{tr}(A) = 0$:

en complétant $\text{ker}(A)$ en une base de $\mathbb{R}^n$, on trouve A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 = 0$

Soit $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ae_1 \neq 0$

On complète (Ae_1) en une base de $(Ae_1, e_3, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(A)$ On vérifie que

$(e_1, Ae_1, e_3, \dots, e_n)$ est une base. et donc A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

de même B est aussi semblable à cette dernière donc A et B sont semblables

17.4 Corrigé de l'énoncé 4

Solution

1. On trouve $X = Y = N = 0$ et $X = Y = \pm 1$; $N = 1$

2. Pour $N = 0$, on a $X = Y = 0$

Pour $N = 1$ en utilisant le discriminant on trouve

$$(X, Y) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, 1), (-1, -1)\}$$

3. On a $1 + XY > 0$ donc X, Y sont de même signe quitte à les remplacer par $(-X, -Y)$ on suppose que $X, Y \geq 0$ et on pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$

4. Soit $(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ une solution, Si $Y > X$ on prend $X = Z$, sinon on note Z l'autre racine de $t^2 - NYt + Y^2 - N$, alors on a $Z + X = NY$ et $ZX = Y^2 - N$

donc $Z = NY - X \in \mathbb{N}$ et $Z = \frac{Y^2 - N}{X} < \frac{Y^2}{X} < Y$ car $Y < X$

5. Soit $(X, Y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution tel que $X + Y$ est minimale.

On pose $Z = NY - X = \frac{Y^2 - N}{X}$, alors (X, Z) est solution et $X + Z < X + Y$, donc forcément $Z = 0$ (sinon $(X, Z) \in \mathbb{N}^{*2}$ contredit la minimalité de (X, Y)), donc $N = Y^2$

6. Supposons $N \geq 6$,

$1 + XY < 0$ donc X, Y sont de signes opposés sans perte de généralité $X > 0, Y < 0$ en posant $x = X$ et $y = -Y$ l'équation est équivalente à $\frac{x^2 + y^2}{xy - 1} = N$, soient $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $x + y$ minimale et $x < y$.

Soit y' l'autre solution de $t^2 - Nxt + N + x^2$, elle vérifie $y + y' = Nx$ et $yy' = N + x^2$.

Supposons par absurde que $y' \geq y$. Alors $N + x^2 \geq y^2$, donc $N(xy - 1) = x^2 + y^2 \leq 2x^2 + N$ alors $N(x^2 - 2) < N(xy - 2) \leq 2x^2$

Alors $6 \leq N < \frac{2x^2}{x^2 - 2}$, donc $x^2 < 3$ donc $x = 1$, et donc $y - 1$ divise $y^2 + 1$ et $y - 1$ divise $(y - 1)(y + 1) = y^2 - 1$ donc $y - 1$ divise 2, donc $y \in \{2, 3\}$ donc $N = 5$, ce qui est absurde.

Alors on a $y' < y$, mais (x, y') est donc solution vérifiant $x + y' < x + y$, ce qui contredit la minimalité de (x, y) , donc $N \leq 5$

On laisse le lecteur vérifier par le calcul que seul le cas $N = 5$ est possible.

17.5 Corrigé de l'énoncé 5

Solution

1. $\forall x \in \mathbb{C}$ on note $v_x = (1, \dots, x^{n-1})^T$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines communes distinctes de f et g et $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ les autres racines distinctes de f .

On a $(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_n})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (d'après Vandermonde).

et $\forall 1 \leq i \leq r \quad \forall w \in \mathbb{C}$;

D'après la relation de l'énoncé

$$v_w^T B(f, g) v_{\lambda_i} = \frac{f(\lambda_i)g(w) - f(w)g(\lambda_i)}{\lambda_i - w} = 0 \text{ car } \lambda_i \in \text{Rac}(f) \cap \text{Rac}(g)$$

Ainsi $B(f, g)v_{\lambda_i} \in \{v_w, w \in \mathbb{C}\}^\perp = \{0\}$ (car les v_w génèrent $\mathbb{C}^n$ il suffit de prendre n scalaires w_k distincts et conclure par Vandermonde)

et donc $(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r})$ est une famille libre de $\text{Ker}(B(f, g))$, montrons qu'elle est génératrice.

Soit $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_{\lambda_i} \in \text{Ker}(B(f, g))$

On a $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i B(f, g)v_{\lambda_i} = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i B(f, g)v_{\lambda_i}$

Donc $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}; 0 = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i w^T B(f, g)v_{\lambda_i} = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \frac{-f(w)g(\lambda_i)}{\lambda_i - w}$

Alors $\sum_{i=r+1}^n \alpha_i \frac{g(\lambda_i)}{\lambda_i - w}$,

$\forall r + 1 \leq j \leq n$ on multiplie par $\lambda_j - w$ et on fait tendre $w \rightarrow \lambda_j$ pour trouver que $\alpha_j g(\lambda_j) = 0$ et comme $j > r$ on a $g(\lambda_j) \neq 0$ donc $\alpha_j = 0$

Donc $X \in \text{Vect}(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r})$

donc $(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r})$ est une base de $\text{Ker}(B(f, g))$ donc $r = \dim(\text{Ker}(B(f, g)))$.

2. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines communes de f et g de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$ (ce sont les multiplicités de λ_i dans $\text{pgcd}(f, g)$)

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$ on a $f(X) = (X - \lambda_i)^{m_i} \tilde{f}(X)$ et $g(X) = (X - \lambda_i)^{m_i} \tilde{g}(X)$ avec $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbb{C}[X]$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ on a

$$(\lambda - \lambda_i)^{m_i} (\mu - \lambda_i)^{m_i} \frac{\tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\mu) - \tilde{f}(\mu) \tilde{g}(\lambda)}{\lambda - \mu} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j} \lambda^{i-1} \mu^{j-1}$$

Fixons $\mu \in \mathbb{C}$ quelconque. Pour tout $k \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, dérivons k fois la relation par rapport à λ :

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[(\lambda - \lambda_i)^{m_i} (\mu - \lambda_i)^{m_i} \frac{\tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\mu) - \tilde{f}(\mu) \tilde{g}(\lambda)}{\lambda - \mu} \right] = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\sum_{j,k} b_{j,k} \lambda^{j-1} \mu^{k-1} \right].$$

Pour le côté droit, on obtient

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{j,l} \lambda^{j-1} \mu^{l-1} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=k+1}^n b_{j,l} \frac{(j-1)!}{(j-1-k)!} \lambda^{j-1-k} \mu^{l-1}.$$

En évaluant en $\lambda = \lambda_i$, cela donne

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=k+1}^n b_{j,l} \frac{(j-1)!}{(j-1-k)!} \lambda_i^{j-1-k} \mu^{l-1} = 0.$$

ceci étant quelque soit $\mu \in \mathbb{C}$

On en déduit que $\sum_{j=k+1}^n b_{j,l} \frac{(j-1)!}{(j-1-k)!} \lambda_i^{j-1-k} = 0$ (en utilisant de nouveau que $\{v_w, w \in \mathbb{C}\}^\perp = \{0\}$)

Pour chaque racine commune λ_i de f et g , $i \in \{1, \dots, r\}$, et pour tout $k \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, on définit les vecteurs

$$v_i^{(k)} = (v_{i,1}^{(k)}, v_{i,2}^{(k)}, \dots, v_{i,n}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n, \quad v_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k, \\ \frac{j!}{(j-k)!} \lambda_i^{j-k} & \text{si } j \geq k. \end{cases}$$

Alors, la relation précédente s'écrit exactement

$$B(f, g) v_i^{(k)} = 0.$$

On obtient ainsi la famille

$$\left(v_i^{(k)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq k \leq m_i - 1}} \subset \ker B(f, g).$$

Il reste à montrer que cette famille est libre pour conclure que

$$\dim \ker B(f, g) \geq \sum_{i=1}^r m_i.$$

La matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est

$$M = \begin{bmatrix} v_1^{(0)} & \dots & v_1^{(m_1-1)} & \dots & v_r^{(0)} & \dots & v_r^{(m_r-1)} \end{bmatrix} \in M_{n, m_1 + \dots + m_r}(\mathbb{C}).$$

Elle s'écrit par blocs colonnes

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_r \end{bmatrix},$$

où chaque bloc

$$M_i \in M_{n, m_i}(\mathbb{C})$$

est donné par

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \frac{(n-1)!}{(n-3)!}\lambda_i^{n-3} & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-m_i)!}\lambda_i^{n-m_i} \end{pmatrix}.$$

On extrait de chaque bloc M_i la matrice

$$\widetilde{M}_i \in M_{m_1+\cdots+m_r, m_i}(\mathbb{C}),$$

définie comme la sous-matrice de M_i constituée des $m_1 + \cdots + m_r$ premières lignes, c'est-à-dire

$$\widetilde{M}_i = \left((M_i)_{j,k} \right)_{\substack{0 \leq j \leq m_1+\cdots+m_r-1 \\ 0 \leq k \leq m_i-1}}.$$

On pose enfin

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_1 & \widetilde{M}_2 & \cdots & \widetilde{M}_r \end{bmatrix} \in M_{m_1+\cdots+m_r}(\mathbb{C}).$$

). Il suffit de montrer que cette matrice est inversible (car dans ce cas on aura $rg(M) = m_1 + \cdots + m_r$ et donc la famille sera libre).

Pour cela, posons l'application linéaire

$$\Phi : \mathbb{C}_{m_1+\cdots+m_r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{m_1+\cdots+m_r},$$

défini par

$$\Phi(P) = \left(P^{(k)}(\lambda_i) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq k \leq m_i-1}}.$$

Si $\phi(P) = 0$, alors P a plus de racines (comptés avec multiplicité) que son degré, donc $P = 0$.

Alors ϕ est injective, et par égalité des dimensions, elle est bijective.

Dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{m_1+\cdots+m_r-1}[X]$ et $\mathbb{C}^{m_1+\cdots+m_r}$, la matrice de l'application linéaire ϕ est $\widetilde{M}^T$, et comme ϕ est bijective, cette matrice est inversible donc $\widetilde{M}$ est aussi inversible, CQFD.

Remarque : On pourrait, au lieu d'utiliser le morphisme, calculer le déterminant de $\widetilde{M}$ (voir Vandermonde généralisé (2), Cassini, Algèbre2, page 20), mais le morphisme reste quand même la méthode la plus simple et élégante.

17.6 Corrigé de l'énoncé 6

Solution

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$

On a $\cos(2^n\theta) = \frac{1}{13^{2^n}} \sum_{p=0}^{2^n-1} \binom{2^n}{2p} 12^{2^n-2p} (-25)^p \in \mathbb{Q}$

On pose donc $\cos(2^n\theta) = \frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p_n, q_n) = 1$

On a $13^{2^n} p_n = q_n \sum_{p=0}^{2^n-1} \binom{2^n}{2p} 12^{2^n-2p} (-25)^p$ donc q_n divise 13^{2^n} (d'après Gauss) donc q_n est impair.

Et $\cos(2^{n+1}\theta) = 2\cos(2^n\theta)^2 - 1 = \frac{2p_n^2 - q_n^2}{q_n^2}$

Or que $\text{pgcd}(q_n^2, 2p_n^2 - q_n^2) = \text{pgcd}(q_n^2, 2p_n^2) = 1$ et donc $q_{n+1} = q_n^2$ alors $\forall n \geq 1$ $q_n = 13^{2^n-1}$ donc $(\cos(\alpha^k))_{k \in \mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs, donc α ne peut pas être une racine de l'unité.

2. on a $13\alpha = 12 + 5i$ donc $(13\alpha - 12)^2 = -25$ donc α est racine de $(13X - 12)^2 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$

3. **Lemme de Gauss:**

Soit $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires. Si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$ alors $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$

Preuve : Classique.

d'après 2 on a

$$\mu_{Q,\alpha}(X)$$

le polynôme Q -minimal de α est égal à $(X - \frac{12}{13})^2 + \frac{25}{13^2} = X^2 - \frac{24}{13}X + \frac{144}{169}$

Supposons par absurde que $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(\alpha) = 0$ alors $\exists R \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P = \mu_{Q,\alpha}R$ et comme P et $\mu_{Q,\alpha}$ sont unitaires, R l'est aussi. Donc le lemme de Gauss nous donne $\mu_{Q,\alpha} \in \mathbb{Z}[X]$ ce qui est absurde.

17.7 Corrigé de l'énoncé 7

Solution

1. On a $E = \{t\} \cup \{x > t : g(y) > 1, \forall y \in [t, x]\} \cup \{x < t : g(y) > 1, \forall y \in [x, t]\}$

Montrons que **E est un ouvert**

Soit $x_0 \in E$

Si $x_0 > t$ alors on a $\forall y \in [t, x_0]; g(y) > 1$ en particulier $g(x_0) > 1$,

Par continuité de g , $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a $|g(x) - g(x_0)| < g(x_0) - 1$ quitte à diminuer δ on prend $x_0 - \delta > t$

donc $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a $1 < g(x)$

ainsi $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \forall u \in [t, u]$ on a $g(u) > 1$ donc $u \in E$

Donc $\exists \delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset E$.

les cas $x_0 = t$ et $x_0 < t$ se traitent de façon similaire. On en déduit que E est un ouvert.

Montrons que E est **convexe**; Soit $x_0, x_1 \in E$ tels que $x_0 < x_1$

Si $t \leq x_0 < x_1$ alors $\forall x \in [x_0, x_1]$ on a $[t, x] \subset [t, x_1]$ donc $\forall y \in [t, x]; g(y) > 1$ alors $[x_0, x_1] \subset E$

De même si $x_0 < x_1 \leq t$, $[x_0, x_1] \subset E$

Si $x_0 \leq t \leq x_1$ alors $\forall x \in [t, x_1], \forall y \in [t, x] \subset [t, x_1]$ on a $g(y) > 1$ donc $[t, x_1] \subset E$ de même $[x_0, t] \subset E$, alors $[x_0, x_1] \subset E$

Donc E est un intervalle ouvert.

2. On $\forall x \in E; g(x) > 1$

Supposons par absurde que $\exists x \in E; g'(x) = 0$

Alors $2f'(x)(f(x) + f''(x)) = 0$

Si $f'(x) = 0$ alors $g(x) = f(x)^2 \leq 1$, c'est absurde

Si $f(x) + f''(x) = 0$ alors $g(x) = f''(x)^2 + f'(x)^2 \leq 1$, c'est encore absurde

Donc g' ne s'annule pas sur E

3. On note $E =]a, b[$ avec $a < b$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

g' est continue et ne s'annule pas sur E , elle garde donc un signe constant

Si $g' > 0$ sur E ,

alors si on suppose que $b \in \mathbb{R}$, on aura $g(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \geq 1$ et on n'a pas $g(b) > 1$ (car sinon $b \in E =]a, b[$ et donc $g(b) = 1$, mais g est strictement croissante sur E donc $g \leq g(b) = 1$ sur E , ce qui est faux, donc $b = +\infty$.

Et de plus g est bornée (car $|g| \leq |f^2| + |f'^2| \leq 1 + 1 = 2$) et croissante sur E donc admet une limite l finie en $+\infty$, et de plus $l \geq 1$ (car $g > 1$ sur E).

D'autre part $g' = 2f'(f + f'')$, donc f' aussi ne s'annule pas sur E , donc f est monotone, et bornée sur E donc admet une limite l' vérifiant $l'^2 \leq 1$ (car $f^2 \leq 1$).

Donc $f'^2 = g - f^2$ admet aussi une limite finie $l'' = l - l'^2$, montrons que cette limite est nulle.

On a $\forall x \in E; \exists c_x \in]x, x+1[$ tel que $f'(c_x) = f(x+1) - f(x)$ (TAF), en prenant le carré et passant à la limite on trouve $l'' = (l' - l')^2 = 0$, ce qui fait que $1 \leq l = l'^2 \leq 1$, donc $l = 1$, mais comme g est croissante sur $E =]a, +\infty[$ alors $g \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l = 1$ sur E , c'est absurde car $g > 1$ sur E .

Si $g' < 0$, on fait la même démarche en $-\infty$

17.8 Corrigé de l'énoncé 9

Solution

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $V_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{S_k}$.

Question 1

la suite (V_m) est croissante p.s.

On a presque sûrement (p.s) (V_m) est une suite croissante à valeurs réelles positives, donc elle converge ps dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ p.s. On a donc :

$$\mathbb{P}((V_m)_m \text{ converge dans } \mathbb{R} \cup \{+\infty\}) = 1$$

Question 2

On suppose $X_1 \in L^2$. Posons $\mu = \mathbb{E}(X_1) \geq 1$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) < \infty$. On a $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ et $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$.

Définissons la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ par : $n_k = \left\lfloor \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right) \cdot 2^k \right\rfloor$. On a donc $n_k \geq 2n_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

Montrons que $\mathbb{P}(S_{n_k} \geq 2n_k\mu) \leq 2^{-k}$.

L'événement $\{S_{n_k} \geq 2n_k\mu\}$ implique $\{S_{n_k} - n_k\mu \geq n_k\mu\}$, donc $\{|S_{n_k} - n_k\mu| \geq n_k\mu\}$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|S_{n_k} - \mathbb{E}(S_{n_k})| \geq n_k\mu) \leq \frac{\text{Var}(S_{n_k})}{(n_k\mu)^2} = \frac{n_k\sigma^2}{n_k^2\mu^2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2 n_k}$

Or $n_k \geq \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right) \cdot 2^k$, donc : $\mathbb{P}(S_{n_k} \geq 2n_k\mu) \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2 n_k} \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2 \left\lfloor \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right) \cdot 2^k \right\rfloor} = 2^{-k}$

Question 3

Lemme (Borel-Cantelli)

Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ une suite d'événements. Si $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0$.

Posons $A_k = \{S_{n_k} \geq 2n_k\mu\}$. D'après la question 2 :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$, c'est-à-dire que seul un nombre fini d'événements A_k se réalisent p.s.

Autrement dit, avec probabilité 1, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$:

$$S_{n_k} < 2n_k\mu = 2n_k\mathbb{E}(X_1)$$

Question 4

Soit $l = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$. Décomposons cette série en blocs :

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_n} \quad (\text{avec } n_0 = 0)$$

Pour $n_{k-1} < n \leq n_k$, on a $S_n \leq S_{n_k}$ (car S_n est croissante). Donc :

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_n} \geq \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_{n_k}} = (n_k - n_{k-1}) \frac{1}{S_{n_k}}$$

D'après la question 3, pour $k \geq K$, on a p.s. $S_{n_k} < 2n_k\mu$, donc :

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_n} \geq (n_k - n_{k-1}) \frac{1}{2n_k\mu} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{n_{k-1}}{n_k} \right)$$

Par construction, $n_k \geq 2n_{k-1}$, donc $\frac{n_{k-1}}{n_k} \leq \frac{1}{2}$, et ainsi :

$$1 - \frac{n_{k-1}}{n_k} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, pour $k \geq K$:

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_n} \geq \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\mu}$$

En sommant sur tous les $k \geq K$:

$$l \geq \sum_{k=K}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{S_n} \geq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{4\mu} = +\infty$$

Donc $\mathbb{P}(l = +\infty) = 1$.

17.9 Corrigé de l'énoncé 10

Solution

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes tels que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad P_1(\lambda) = P_2(\lambda) = f(\lambda).$$

Nous devons montrer $P_1(A) = P_2(A)$.

Appliquons le théorème spectral : il existe $Q \in O(n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = Q D Q^T, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Pour tout polynôme P , on a la compatibilité $P(A) = Q P(D) Q^T$, où $P(D)$ est la matrice diagonale $\text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$. En particulier

$$P_1(A) - P_2(A) = Q(P_1(D) - P_2(D))Q^T.$$

Or, par hypothèse $P_1(\lambda_i) = P_2(\lambda_i)$ pour chaque i , donc $P_1(D) - P_2(D) = 0$. D'où $P_1(A) - P_2(A) = 0$ et donc $P_1(A) = P_2(A)$. Ainsi la valeur $f(A)$ est bien définie et indépendante du polynôme choisi.

2.

Lemme 17.1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Alors

$$\text{Sp}(A) \subset I \iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \implies x^T A x \in I.$$

Proof. $\Rightarrow$. Si $\text{Sp}(A) \subset I$, écrivons $A = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^T$ avec Q orthogonale. Pour x de norme 1, posons $y = Q^T x$. Alors $\|y\| = 1$ et

$$x^T A x = y^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Les coefficients y_i^2 sont non négatifs et summent à 1. Donc $x^T A x$ est une moyenne convexe des λ_i , donc appartient à l'enveloppe convexe des $\{\lambda_i\}$, laquelle est incluse dans l'intervalle I . Ainsi $x^T A x \in I$.

$\Leftarrow$. Réciproquement, si pour tout vecteur unitaire x on a $x^T A x \in I$, alors en particulier pour chaque valeur propre λ de A et vecteur propre unitaire v associé on a $v^T A v = \lambda \in I$. Donc toute valeur propre appartient à I , i.e. $\text{Sp}(A) \subset I$.

□

Application au problème.

Soit $C(\lambda) := \lambda A + (1 - \lambda)B$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 on a

$$x^T C(\lambda) x = \lambda x^T A x + (1 - \lambda) x^T B x.$$

Par le lemme, puisque $\text{Sp}(A) \subset I$ et $\text{Sp}(B) \subset I$, on a $x^T A x \in I$ et $x^T B x \in I$. Comme I est un intervalle, toute combinaison convexe de deux éléments de I est dans I , donc

$$x^T C(\lambda) x \in I \quad \text{pour tout } x, \|x\| = 1.$$

Par le lemme appliqué à $C(\lambda)$ on en déduit $\text{Sp}(C(\lambda)) \subset I$, ce qu'il fallait montrer.

3.

Lemme 17.2. Soient $A, B \in S_n^{++}$. Posons $A^{1/2}$ la racine carrée symétrique définie positive de A . Considérons

$$C := A^{-1/2} B A^{-1/2}.$$

Alors C est symétrique définie positive, donc il existe $Q \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ (avec $d_i > 0$) telles que

$$C = Q^T D Q.$$

Posons maintenant

$$S := Q A^{-1/2}.$$

Une vérification directe donne

$$S^T A S = (A^{-1/2} Q^T) A (Q A^{-1/2}) = Q^T I Q = I,$$

et

$$S^T B S = (A^{-1/2} Q^T) B (Q A^{-1/2}) = Q^T (A^{-1/2} B A^{-1/2}) Q = Q^T C Q = D.$$

Ainsi S réalise une codiagonalisation par congruence : en posant $P := S^{-1}$ (donc P est inversible), on obtient

$$A = P^T I P, \quad B = P^T D P.$$

Application au problème.

Calculons maintenant les inverses et la combinaison convexe dans cette factorisation. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda A + (1 - \lambda)B = P^T (\lambda I + (1 - \lambda)D) P.$$

En prenant l'inverse (congruence préserve l'inversibilité et l'inverse s'exprime par $(P^T X P)^{-1} = P^{-1} X^{-1} (P^T)^{-1}$) :

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^{-1} = P^{-1} (\lambda I + (1 - \lambda)D)^{-1} (P^{-1})^T.$$

De même

$$A^{-1} = P^{-1} I^{-1} (P^{-1})^T = P^{-1} I (P^{-1})^T, \quad B^{-1} = P^{-1} D^{-1} (P^{-1})^T.$$

Considérons la différence cherchant à prouver qu'elle est positive semi-définie :

$$\begin{aligned} \Delta &:= \lambda A^{-1} + (1 - \lambda)B^{-1} - (\lambda A + (1 - \lambda)B)^{-1} \\ &= P^{-1} (\lambda I + (1 - \lambda)D^{-1} - (\lambda I + (1 - \lambda)D)^{-1}) (P^{-1})^T. \end{aligned}$$

Le terme central est une matrice diagonale (puisque D est diagonale). Pour chaque i la composante diagonale correspondante est

$$\theta_i := \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot d_i^{-1} - \frac{1}{\lambda + (1 - \lambda)d_i}.$$

Il suffit de vérifier que $\theta_i \geq 0$ pour tout i . Mais ceci est une conséquence directe de la convexité de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur $(0, \infty)$: pour $t_1 = 1$ et $t_2 = d_i > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, la convexité donne

$$\frac{1}{\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2} \leq \lambda \frac{1}{t_1} + (1 - \lambda) \frac{1}{t_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda + (1 - \lambda)d_i} \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot d_i^{-1}.$$

D'où $\theta_i \geq 0$ et la matrice diagonale centrale est positive semi-définie. Par congruence par P^{-1} (qui préserve la positivité semi-définie), on obtient $\Delta \in S_n^+$. Ainsi

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^{-1} \leq \lambda A^{-1} + (1 - \lambda)B^{-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. L'égalité $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i = xI_n$ implique en particulier que la combinaison pondérée de chaque produit scalaire sur un vecteur unitaire est x : pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\| = 1$,

$$v^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \right) v = \sum_{i=1}^k \lambda_i (v^T A_i v) = v^T (xI_n) v = x.$$

Pour chaque i appliquons le théorème spectral à A_i : il existe une base orthonormée de valeurs propres de A_i . Écrivons v dans cette base ; on obtient que $v^T A_i v$ est une moyenne convexe (pondérée par les composantes quadratiques de v) des valeurs propres de A_i . Plus précisément, pour tout i on peut écrire

$$v^T A_i v = \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} p_{i,j}$$

avec $\mu_{i,j} \in \text{Sp}(A_i)$ et $p_{i,j} \geq 0$, $\sum_j p_{i,j} = 1$. En conséquence,

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} p_{i,j}$$

est une combinaison convexe (poids $\lambda_i p_{i,j}$ qui somment à 1) de réels $\mu_{i,j}$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, l'inégalité de Jensen scalaire donne

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^n p_{i,j} f(\mu_{i,j}).$$

Mais $\sum_j p_{i,j} f(\mu_{i,j}) = v^T f(A_i) v$ (définition de $f(A_i)$ par calcul fonctionnel spectral). Ainsi

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i v^T f(A_i) v = v^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i) \right) v.$$

La gauche $f(x)$ est égale à $v^T f(xI_n)v$ car $f(xI_n) = f(x)I_n$. On a donc pour tout vecteur unitaire v

$$v^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i) - f(xI_n) \right) v \geq 0.$$

Par le critère du produit scalaire (ou bien en remarquant que la matrice considérée est symétrique et que tous ses quotients de Rayleigh sont ≥ 0), on en déduit

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i) - f(xI_n) \in S_n^+,$$

c'est-à-dire

$$f(xI_n) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(A_i).$$

Comme $f\left(\sum_i \lambda_i A_i\right) = f(xI_n)$ (puisque $\sum_i \lambda_i A_i = xI_n$), l'inégalité annoncée est prouvée.

5. Pour $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$, calculons la différence

$$\Delta := \lambda A^2 + (1 - \lambda)B^2 - (\lambda A + (1 - \lambda)B)^2.$$

Développons :

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^2 = \lambda^2 A^2 + (1 - \lambda)^2 B^2 + \lambda(1 - \lambda)(AB + BA).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda A^2 + (1 - \lambda)B^2 - (\lambda^2 A^2 + (1 - \lambda)^2 B^2 + \lambda(1 - \lambda)(AB + BA)) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(A^2 + B^2 - AB - BA) \\ &= \lambda(1 - \lambda)((B - A)^2), \end{aligned}$$

$(B - A)^2 \in S_n^+$. Par conséquent $\Delta \in S_n^+$. Ainsi

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^2 \leq \lambda A^2 + (1 - \lambda)B^2.$$

Conclusion : l'application $A \mapsto A^2$ est convexe sur $S_n(\mathbb{R})$.

17.10 Corrigé de l'énoncé 11

Solution

1. on a $\frac{n^\alpha}{n+x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\alpha-1}$ donc f_α est définie sur $\mathbb{R}_+$ ssi $\alpha < 0$.

- Si $\alpha < -1$: On a $f_\alpha(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{n}{x}+1}$ or $|\frac{n^\alpha}{\frac{n}{x}+1}| < n^\alpha$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^\alpha$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha}{\frac{n}{x}+1}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{n}{x}+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{n}{x}+1} = \zeta(-\alpha)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$ et $f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(-\alpha)}{x}$.

- Si $\alpha > -1$: On a $t \mapsto \frac{t^\alpha}{t+x}$ est décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(n+1)^\alpha}{n+1+x} \leq \int_n^{n+1} \frac{t^\alpha}{t+x} dt \leq \frac{n^\alpha}{n+x}$$

$$\int_n^{n+1} \frac{t^\alpha}{t+x} dt = \frac{1}{x} \int_n^{n+1} \frac{t^\alpha}{\frac{t}{x}+1} dt \stackrel{u=\frac{t}{x}}{=} \frac{1}{x} \int_{\frac{n}{x}}^{\frac{n+1}{x}} \frac{(ux)^\alpha}{u+1} x du = x^\alpha \int_{\frac{n}{x}}^{\frac{n+1}{x}} \frac{u^\alpha}{u+1} du$$

En sommant l'inégalité :

$$f_\alpha(x) - \frac{1}{1+x} \leq x^\alpha \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1} du \leq f_\alpha(x)$$

$$\text{Donc } \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1} du \leq \frac{f_\alpha(x)}{x^\alpha} \leq \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1} du + \frac{1}{x^\alpha(x+1)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha(x)}{x^\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1} du$$

ainsi $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0$ et $f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{u+1} du$ (inutile d'essayer de calculer l'intégrale).

- Si $x = -1$: On a $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$

En notant $H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$, on a $H(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \ln(x)$ et on montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \ln(x) + o(1)$ donc $f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$.

2. g_α est définie pour $d - \alpha > 1$, Montrons qu'on peut ne garder que le terme $a_d(n+x)^d$.

$$\text{On note } P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ ainsi } g_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d} \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} \frac{n^k}{(n+x)^k}}$$

$$\text{Or } 1 - \sum_{k=0}^{d-1} a_k (x+n)^{k-d} \leq \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} \frac{n^k}{(n+x)^k}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (x+n)^{k-d}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d} - \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha a_k}{a_d(n+x)^{2d-k}} \leq g_\alpha(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d} + \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha a_k}{a_d(n+x)^{2d-k}}$$

$$\text{Et } \forall k \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \frac{1}{(n+x)^{2d-k}} \leq \frac{1}{(n+x)^d (x+1)^{d-k}}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha a_k}{a_d(n+x)^{2d-k}} \leq \frac{a_k}{(x+1)^{d-k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{d-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha a_k}{a_d(n+x)^{2d-k}} \underset{x \rightarrow \infty}{=} o\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d}\right)$$

$$\text{Donc } g_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{a_d(n+x)^d}$$

Une disjonction de cas analogue à celle de la première question laissée au lecteur permet de trouver:

- Si $\alpha < -1$: $g_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\zeta(-\alpha)}{x^d}$
- Si $\alpha > -1$: $g_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x^{d-1-\alpha} (1+t)^d} dt}{x^{d-1-\alpha}}$
- Si $\alpha = -1$: $g_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^d}$

17.11 Corrigé de l'énoncé 12

Solution

1. Soit p un nombre premier.

On a

$$\begin{aligned}(e^z - 1)^{p-1} &= \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} e^{zl} = \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l^n z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^n}{n!} z^n.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Premier cas : Si $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k(p-1)$.

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^n &\equiv \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} (l^{p-1})^k \pmod{p} \\ &\equiv \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} \pmod{p} \quad (\text{Fermat}) \\ &\equiv \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} - (-1)^{p-1} \pmod{p} \\ &\equiv 0 - (-1)^{p-1} \pmod{p} \quad \text{car } (1-1)^{p-1} = 0 \\ &\equiv -1 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Second cas : Sinon, soit $n = k(p-1) + r$ avec $r \in \{1, \dots, p-2\}$ la division euclidienne de n par $p-1$.

$$\sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^{k(p-1)+r} \equiv \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^r \pmod{p} \quad (\text{Fermat})$$

Or $\sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^r$ est $r!$ fois le coefficient de z^r dans le développement en série entière de $(e^z - 1)^{p-1}$.

Mais

$$(e^z - 1)^{p-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)^{p-1} = z^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right)^{p-1}.$$

Comme il y a un facteur z^{p-1} , tous les coefficients des z^r avec $0 \leq r \leq p-2$ sont nuls. En particulier pour $r \in \{1, \dots, p-2\}$, on a :

$$\sum_{l=1}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^r = 0.$$

Donc

$$\sum_{l=0}^{p-1} \binom{p-1}{l} (-1)^{p-1-l} l^n \equiv 0 \pmod{p}.$$

D'où le résultat.

2. Soit $m \geq 4$ non premier. Écrivons $m = ab$, $2 \leq a \leq b < m$. Si $a \neq b$, $a, b \mid (m-1)!$ donc $m \mid (m-1)!$. Si $a = b$, $m = a^2$, alors $a, 2a \mid (m-1)!$ donc $a^2 \mid (m-1)!$.

$$\text{On a } (e^z - 1)^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} e^{iz} = \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n \text{ avec } S_n = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} i^n.$$

Posons $c(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n$, et montrons qu'il est égal à $|\text{Surj}(n, k)|$ le nombre de surjection de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, k\}$, puis qu'il est divisible par $k!$

On compte les applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$:

$$\begin{aligned} k^n &= |\{1, \dots, k\}^{\{1, \dots, n\}}| = \left| \bigcup_{i=0}^k \{f \in \{1, \dots, k\}^{\{1, \dots, n\}}; |f(\{1, \dots, n\})| = i\} \right| \\ &= \sum_{i=0}^k |\{f \in \{1, \dots, k\}^{\{1, \dots, n\}}; |f(\{1, \dots, n\})| = i\}| = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |\text{Surj}(n, i)|. \end{aligned}$$

Par inversion de Pascal, $|\text{Surj}(n, k)| = c(n, k)$.

Soit $\phi : \text{Surj}(n, k) \rightarrow \{(E_1, \dots, E_k) \text{ partitions de } \{1, \dots, n\}\}$, $f \mapsto (f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k))$.

ϕ est une bijection donc

$$|\text{Surj}(n, k)| = |\{(E_1, \dots, E_k) \text{ partition de } \{1, \dots, n\}\}| = k! \times |\{\{E_1, \dots, E_k\} \text{ partition de } \{1, \dots, n\}\}|, \quad (5)$$

donc $k! \mid |\text{Surj}(n, k)| = c(n, k)$.

Pour $k = m-1$, on a $(m-1)! \mid S_n$. Comme $m \mid (m-1)!$, on a $m \mid S_n$ pour tout n , d'où $(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \pmod{m}$.

Remarque : Les nombres $\frac{c(n, k)}{k!}$ s'appellent les nombres de Stirling de seconde espèce.

17.12 Corrigé de l'énoncé 13

Solution

1. On vérifie facilement que $\delta_C \in D$

On a $\delta_C = L_C - R_C$ avec $L_C : A \mapsto CA$ et $R_C : A \mapsto AC$, on vérifie facilement que L_C et R_C commutent et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (L_C)^k = L_{C^k}$$

donc

$$e^{L_C} = L_{e^C}, \quad e^{R_C} = R_{e^C}.$$

Ainsi,

$$e^{\delta_C} = L_{e^C} R_{e^{-C}} : A \mapsto e^C A e^{-C}.$$

2. Soit $\delta \in D$ et $A, B \in H$, on a

$$e^\delta(AB) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n(AB)}{n!}.$$

Une récurrence permet de montrer que

$$\delta^n(AB) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta^k(A) \delta^{n-k}(B).$$

Donc

$$\begin{aligned} e^\delta(AB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta^k(A) \delta^{n-k}(B) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\delta^k(A)}{k!} \frac{\delta^{n-k}(B)}{(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n(A)}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n(B)}{n!} \right) \\ &= e^\delta(A) e^\delta(B). \end{aligned}$$

3. On a

$$(\delta - \lambda Id)^{m_\lambda}(A) = 0 \quad \text{et} \quad (\delta - \mu Id)^{m_\mu}(B) = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{t(\delta - (\lambda + \mu)Id)}(AB) \\ &= e^{-t(\lambda + \mu)Id} \left(e^{t\delta}(AB) \right) \\ &= e^{-t(\lambda + \mu)Id} \left(e^{t\delta}(A) \times e^{t\delta}(B) \right) \\ &= e^{-t(\lambda + \mu)Id} \left(e^{t\lambda Id} e^{t(\delta - \lambda Id)}(A) \times e^{t\mu Id} e^{t(\delta - \mu Id)}(B) \right). \end{aligned}$$

Or $e^{\alpha Id} = e^\alpha Id$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, donc

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{t(\delta - \lambda Id)}(A) e^{t(\delta - \mu Id)}(B) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m_\lambda-1} \frac{t^k (\delta - \lambda Id)^k(A)}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{m_\mu-1} \frac{t^k (\delta - \mu Id)^k(B)}{k!} \right). \end{aligned}$$

C'est un polynôme en t de degré $m_\lambda + m_\mu - 2$ à coefficients dans $M_n(\mathbb{C})$, donc

$$f^{(m_\lambda + m_\mu - 1)} = 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = f^{(m_\lambda + m_\mu - 1)}(t) = (\delta - (\lambda + \mu)Id)^{m_\lambda + m_\mu - 1} e^{t(\delta - (\lambda + \mu)Id)}(AB).$$

Pour $t = 0$, on obtient

$$(\delta - (\lambda + \mu)Id)^{m_\lambda + m_\mu - 1}(AB) = 0.$$

CQFD.

4. Dunford

17.13 Corrigé de l'énoncé 14

Solution**Exercice 1**

Puisque N est symétrique définie positive, il existe une unique racine carrée symétrique définie positive $N^{1/2}$ telle que $N = N^{1/2}N^{1/2}$ et $N^{1/2}$ est inversible. Considérons la matrice

$$P := N^{1/2}MN^{1/2}.$$

On calcule sa transposée :

$$P^T = (N^{1/2}MN^{1/2})^T = (N^{1/2})^T M^T (N^{1/2})^T = N^{1/2}MN^{1/2} = P,$$

puisque M et $N^{1/2}$ sont symétriques. Donc P est symétrique réelle. Par le théorème spectral, P est orthogonalement diagonalisable : il existe $Q \in O(n)$ et une matrice diagonale réelle D telle que

$$P = QDQ^T.$$

On écrit alors

$$MN = N^{-1/2}PN^{1/2} = N^{-1/2}(QDQ^T)N^{-1/2} = (N^{-1/2}Q)D(N^{-1/2}Q)^{-1},$$

puisque $N^{-1/2}Q$ est inversible. Autrement dit, MN est semblable à la matrice diagonale D , donc MN est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On cherche les entiers naturels n tels qu'il existe un cercle (non nécessairement centré à l'origine) contenant exactement n points à coordonnées rationnelles.

Nous allons d'abord établir deux observations générales puis traiter les cas et fournir des exemples concrets.

Cas 1 : le cercle est centré en un point rationnel

Quitte à translater, on suppose que le cercle est centré en l'origine. Son équation est alors

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Paramétrisation des points rationnels du cercle unité. Considérons d'abord le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. On prend le point fixe $P_\infty = (-1, 0)$ et on considère toutes les droites de pente $t \in \mathbb{Q}$ passant par P_∞ :

$$y = t(x + 1).$$

En substituant dans le cercle :

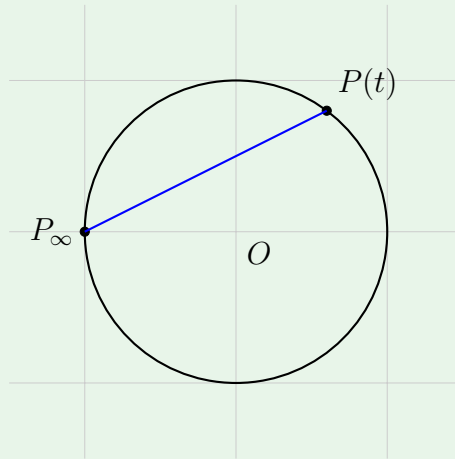
$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1,$$

et en remarquant que $x = -1$ est solution évidente, l'autre intersection est donnée par

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad t \in \mathbb{Q}$$

Ceci fournit une infinité de points rationnels.



Ainsi, si un cercle centré en l'origine possède *un* point rationnel non trivial, alors il en possède une infinité.

Possibilité de zéro point rationnel. Il existe aussi des rayons ne produisant *aucune* solution rationnelle. Par exemple :

$$x^2 + y^2 = 3.$$

En réduisant modulo 3, on utilise que les carrés sont congrus à 0 ou 1. Donc

$$x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{3},$$

mais jamais $3 \equiv 0 \pmod{3}$. Ainsi l'équation n'a aucune solution rationnelle.

Conclusion du cas 1 :

Le cercle centré en un point rationnel admet 0 ou *infinité* de points rationnels.

Cas 2 : le centre a des coordonnées irrationnelles partielles

Supposons que le centre soit $\Omega(a, b)$ avec $a \notin \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Quitte à traduire verticalement, on peut supposer $b = 0$. L'équation du cercle devient

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

On cherche $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Développons :

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = r^2 \implies 2ax = x^2 + y^2 + a^2 - r^2.$$

Comme $x, y \in \mathbb{Q}$, le membre de gauche est dans $a\mathbb{Q}$, le membre de droite dans l'espace vectoriel

$$V = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{1, a, a^2\}.$$

Cas 2a : a transcendant Alors $1, a, a^2$ sont linéairement indépendants. L'équation impose donc que $x = 0$ et $y^2 = r^2 - a^2$. Comme a est transcendant, $\sqrt{r^2 - a^2} \notin \mathbb{Q}$. Donc il n'y a *aucune solution rationnelle*.

Cas 2b : a algébrique de degré 2 Alors $1, a, a^2$ sont liés, mais 1 et a restent indépendants. On écrit

$$a^2 = u + va, \quad u, v \in \mathbb{Q}.$$

L'équation devient affine en a , ce qui impose deux équations rationnelles :

$$\begin{cases} x = \frac{v}{2}, \\ x^2 + y^2 + u - r^2 = 0. \end{cases}$$

Donc y est déterminé à un signe près : $y = \pm\sqrt{r^2 - u - x^2}$. On obtient au plus deux solutions rationnelles.

Cas 3 : centre totalement irrationnel

Si $\Omega(a, b)$ avec $a, b \notin \mathbb{Q}$, l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

conduit à un système similaire dans l'espace vectoriel $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{1, a, b, a^2, b^2, ab\}$. Le raisonnement montre qu'on obtient au plus deux solutions rationnelles.

Conclusion générale

Le nombre possible de points rationnels sur un cercle du plan est 0, 1, 2 ou ∞ .

17.14 Corrigé de l'énoncé 15

Solution

1. Soient $A, B \in G$ tels que $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$ et $N(I_d - B) < 4$. Posons la suite de commutateurs

$$C_0 = ABA^{-1}B^{-1}, \quad C_{n+1} = [A, C_n] = AC_nA^{-1}C_n^{-1}, \quad n \geq 0.$$

D'après la propriété 2, pour tout $X, Y \in U_d$:

$$N(I_d - XYX^{-1}Y^{-1}) \leq 2N(I_d - X)N(I_d - Y).$$

En appliquant cette inégalité à C_n et A , on obtient

$$N(I_d - C_{n+1}) \leq 2N(I_d - A)N(I_d - C_n).$$

Notons $\varepsilon = 2N(I_d - A) < 1$. Par récurrence, il suit que

$$N(I_d - C_n) \leq \varepsilon^n N(I_d - C_0),$$

ce qui montre que la norme des C_n tend vers 0. Comme G est fini, il existe n tel que $C_n = I_d$. En remontant la suite, on obtient $C_0 = ABA^{-1}B^{-1} = I_d$, donc $AB = BA$.

2. Soit

$$H = \langle A \in G : N(I_d - A) < \frac{1}{2} \rangle.$$

Pour montrer que H est abélien, il suffit de montrer que tout couple de générateurs commute. Soient $A, B \in H$, alors $N(I_d - A) < \frac{1}{2}$ et $N(I_d - B) < \frac{1}{2} < 4$. D'après la partie 1, on a $AB = BA$. Ainsi tous les générateurs de H commutent, et H est abélien.

3. Pour $g \in G$, considérons les classes à gauche $gH = \{gh : h \in H\}$. Nous voulons montrer qu'il existe un entier K_d ne dépendant que de d tel que G soit la réunion d'au plus K_d classes gH .

Si $g_i H \neq g_j H$, alors $g_j^{-1} g_i \notin H$. Par définition de H , on a alors

$$N(I_d - g_j^{-1} g_i) \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, tout couple de représentants distincts de cosets est séparé d'au moins $\frac{1}{2}$ en termes de N .

Comme U_d est contenu dans un ensemble compact, il existe un nombre maximal K_d de points dans U_d dont la distance N entre deux points distincts est au moins $\frac{1}{2}$. Cela garantit qu'il existe des éléments $g_1, \dots, g_{K_d} \in G$ tels que

$$G = \bigcup_{i=1}^{K_d} g_i H.$$

On a utiliser le lemme suivant:

Lemme:

Soit V un espace vectoriel normé et $K \subset V$ compact. Alors K est précompact, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε qui couvrent K .

Proof. Un ensemble K est compact si toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans K admet une sous-suite convergente dans K .

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que K ne peut pas être couvert par un nombre fini de boules de rayon ε . Alors on peut construire une suite (x_n) dans K telle que pour tout $i \neq j$,

$$N(x_i - x_j) \geq \varepsilon.$$

Cette suite n'admet aucune sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de K .

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, K peut être couvert par un nombre fini de boules de rayon ε , ce qui montre que K est précompact. $\square$

17.15 Corrigé de l'énoncé 16

Solution

1. Le résultat de l'indication résulte du fait que $\text{PGCD}(2^n, 3^n) = 1$

Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

On a $\forall i \in \mathbb{N}, \exists a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i = 2^i a_i + 3^i b_i$

et $\forall n \in \mathbb{N}, \phi((2^i a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{k=0}^n 2^k a_k \phi(e_k) + \phi(0, \dots, 0, 2^{n+1} a_{n+1}, 2^{n+2} a_{n+2}, \dots)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \phi((2^i a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0 + 2^{n+1} \phi(0, \dots, 0, 2^1 a_{n+1}, 2^2 a_{n+2}, \dots)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \phi((2^i a_i)_{i \in \mathbb{N}})$ est divisible par 2^{n+1}

Donc $\phi((2^i a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$

de même $\phi((3^i b_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$

Et donc $\phi(x) = 0$

2. On a $|l - \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i| = |\phi(0, \dots, 0, \lambda_{|l|+1}, \lambda_{|l|+2}, \dots)|$ est divisible par $\lambda_{|l|+1}$ car $\forall i \geq |l| + 1$, λ_i est divisible par $\lambda_{|l|+1}$

Donc si on suppose par absurde que $|l - \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i| \neq 0$ on aura $|l - \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i| \geq \lambda_{|l|+1} \geq |l| + 1 + \sum_{i \leq |l|} |\lambda_i x_i|$. d'après l'énoncé.

Or que $|l - \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i| \leq |l| + \sum_{i \leq |l|} |\lambda_i x_i|$ par inégalité triangulaire.

Donc $|l| + \sum_{i \leq |l|} |\lambda_i x_i| \geq |l| + 1 + \sum_{i \leq |l|} |\lambda_i x_i|$ ce qui est absurde, alors $l = \sum_{i \leq |l|} \lambda_i x_i$.

3. Prenons une suite (λ_i) comme dans la question 2 (on peut la construire par récurrence) et reprenons les mêmes notations. On obtient en reprenant quasi-identiquement la même démonstration le résultat plus fort suivant :

$$\forall k \geq |I|, \quad l = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i. \quad (6)$$

En particulier et vu qu'une telle suite (λ_i) vérifie $\forall i$, $\lambda_i \neq 0$, on obtient par différences successives (différence entre $k = i$ et $k = i - 1$) que $\forall i > |I|$, $\lambda_i x_i = 0$, i.e., $\forall i > |I|$, $x_i = 0$.

On appliquant la question 1 à $\phi - \sum_{i=0}^{|I|} x_i \pi_i$ on trouve que $\phi = \sum_{i=0}^{|I|} x_i \pi_i$.

17.16 Corrigé de l'énoncé 21

Solution

Soit $n = \deg(P)$ et $P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ avec $\alpha_1 = \theta$.

On a

$$Q(z) = z^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z} - \alpha_i \right) = \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_i z).$$

On a $P\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0$ et $Q\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0$, donc f n'est pas définie en $\frac{1}{\theta}$, ce qui implique $R \leq \frac{1}{\theta}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{\theta}$.

On a pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$:

$$|\alpha_i z| < |z| < \frac{1}{\theta} < 1$$

et

$$|\alpha_1 z| < |\theta| \cdot \frac{1}{\theta} = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{Q(z)} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i z}$$

est DSE sur $D\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$ comme produit de fonctions DSE sur ce disque, et donc

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

est également DSE sur $D\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$.

Ainsi $R \geq \frac{1}{\theta}$, d'où finalement

$$R = \frac{1}{\theta}.$$

Il reste à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{Z}$.

Notons $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$ et $a_n = 1$. Alors $Q(z) = z^n P(1/z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$.

Posons $Q(z) = \sum_{j=0}^n q_j z^j$ où $q_j = a_{n-j} \in \mathbb{Z}$, avec en particulier $q_0 = a_n = 1$.

Soit $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ le développement en série entière. De l'égalité $P(z) = Q(z)f(z)$, on tire par produit de cauchy et puis par identification :

$$a_m = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} q_j b_{m-j} \quad (m \geq 0).$$

Pour $m = 0$, on a $a_0 = q_0 b_0 = b_0$, donc $b_0 = a_0 \in \mathbb{Z}$. Supposons $b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{Z}$. Alors pour $m \geq 1$,

$$b_m = a_m - \sum_{j=1}^{\min(m,n)} q_j b_{m-j},$$

tous les termes du membre de droite étant entiers par hypothèse de récurrence. Donc $b_m \in \mathbb{Z}$ pour tout m .

18 Corrigé Maths U

18.1 Corrigé de l'énoncé 22

Solution

$\forall p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p(X) = X^m(X - (1 + \frac{1}{p}))^{n-m} \in P_{n,m}$

On a

$$\begin{aligned} f'_p(X) &= mX^{m-1} \left(X - \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)^{n-m} + (n-m)X^m \left(X - \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)^{n-m-1} \\ &= X^{m-1} \left(X - \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)^{n-m-1} \left[m \left(X - \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) + (n-m)X \right] \\ &= X^{m-1} \left(X - \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)^{n-m-1} \left[nX - m \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right] \end{aligned}$$

Donc $\left| \frac{m(1+\frac{1}{p})}{n} \right| \in \{ |z| \mid z \in \mathbb{C}^* \text{ et } \exists f \in P_{n,m} \text{ t.q. } f'(z) = 0 \} \stackrel{\text{def}}{=} A_{n,m}$

Donc $\inf(A_{n,m}) \leq \frac{m}{n} \left(1 + \frac{1}{p} \right)$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

Alors $\inf(A_{n,m}) \leq \frac{m}{n}$.

Soit $|z| \in A_{n,m}$ et $f \in P_{n,m}$ t.q. $f'(z) = 0$,

on note $f = X^k \prod_{i=1}^r (X - a_i)$, tel que $m \leq k$, $k+r \leq n$ et $|a_i| > 1$

Si $\exists i, z = a_i$ alors $|z| > 1 \geq \frac{m}{n}$

Sinon $0 = f'(z) = z^{k-1} \left(k \prod_{i=1}^r (z - a_i) + z \sum_{i=1}^r \prod_{j \neq i} (z - a_j) \right)$

Donc $k = -z \sum_{i=1}^r \frac{1}{z - a_i}$

Donc $k \leq |z| \sum_{i=1}^r \frac{1}{|z - a_i|}$ et $|z - a_i| \geq |a_i| - |z| > 1 - |z|$

Donc $k \leq \frac{|z|r}{1-|z|}$ donc $k \leq |z|(k+r)$

alors $|z| \geq \frac{k}{k+r} \geq \frac{m}{n}$

alors $\inf(A_{n,m}) = \frac{m}{n}$

18.2 Corrigé de l'énoncé 24

Solution

On va montrer $(1) \implies (3) \implies (2) \implies (1)$

1. $(1) \implies (3)$, facile.

2. $(3) \implies (2)$, Supposons $\forall (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum a_n \text{ CVA} \implies \sum f(a_n) \text{ CV}$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tel que $\sum a_n \text{ ACV}$.

Soit $I^+ = \{n \in \mathbb{N}, f(a_n) \geq 0\}$ et $I^- = \mathbb{N} \setminus I^+$, on définit (b_n) comme suit:

$b_n = a_n$ si $n \in I^+$ et $b_n = 0$ sinon, et $(c_n) : c_n = a_n$ si $n \in I^-$ et $c_n = 0$ sinon.

On a $|b_n| \leq |a_n|$ donc $\sum b_n \text{ CVA}$, de même pour c_n , donc par hypothèse $\sum f(b_n)$ et $\sum f(c_n) \text{ CV}$.

Remarquons que $f(0) = 0$ (en effet $\sum f(\frac{1}{2^k}) \text{ CV}$ donc $f(\frac{1}{2^k}) \rightarrow 0$ et $f(\frac{1}{2^k}) \rightarrow f(0)$ donc $f(0) = 0$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \in I^+$, $|f(a_n)| = f(b_n) - 0 = f(b_n) - f(c_n)$, et si $n \in I^-$, $|f(a_n)| = 0 - f(c_n) = f(b_n) - f(c_n)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(a_n)| = f(b_n) - f(c_n)$, alors $\sum |f(a_n)|$ CV donc $\sum f(a_n)$ CVA.

3. (2) $\implies$ (1), supposons que $\forall (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum a_n$ CVA $\implies \sum f(a_n)$ CVA.

Supposons par absurde que $\forall M > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < \delta$ et $|f(x)| > M|x|$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in \mathbb{R}$ tel que $|x_k| < \frac{1}{2^k}$, et $|f(x_k)| > (k+1)^2|x_k|$

On construit la suite (y_n) comme suit : chaque x_k est répété $n_k = \lfloor \frac{1}{(k+1)^2|x_k|} \rfloor > 0$ fois

Formellement $\forall k \in \mathbb{N}$, pour tout entier n entre $1 + n_1 + \dots + n_k$ et $n_1 + \dots + n_k + n_{k+1}$, on pose $y_n = x_{k+1}$.

On a donc

$$\sum_{n=1}^{n_1+\dots+n_m} |f(y_n)| = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=1+n_1+\dots+n_k}^{n_1+\dots+n_k+n_{k+1}} |f(x_k)| = \sum_{k=1}^{m-1} n_{k+1} |f(x_{k+1})|$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_1+\dots+n_m} |f(y_n)| &> \sum_{k=1}^{m-1} n_{k+1} (k+2)^2 |x_{k+1}| \\ &\geq \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{(k+2)^2 |x_{k+1}|} - 1 \right) (k+2)^2 |x_{k+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - (k+2)^2 |x_{k+1}| \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{(k+2)^2}{2^{k+1}} \right) \end{aligned}$$

Mais $\left(1 - \frac{(k+2)^2}{2^{k+1}} \right) \rightarrow 1$, donc $\sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{(k+2)^2}{2^{k+1}} \right) \rightarrow_{m \rightarrow \infty} \infty$, donc $\sum f(y_n)$ ne converge pas absolument.

Alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, tel que n est entre $1 + n_1 + \dots + n_k$ et $n_1 + \dots + n_k + n_{k+1}$, et

$$\sum_{j=1}^n |y_j| \leq \sum_{l=1}^k n_{l+1} |x_{l+1}| \leq \sum_{l=1}^k \frac{1}{(l+1)^2} \leq \zeta(2)$$

donc $\sum y_n$ converge absolument et $\sum f(y_n)$ ne converge pas absolument ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $f(x) = O(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$

19 Corrigé Maths L

19.1 Corrigé de l'énoncé 28

Solution

1. Commençons par simplifier l'expression de la trace. On a :

$$(XY^T)^T = YX^T$$

donc

$$\text{Tr}(A \cdot YX^T) = \sum_{i,j} y_i x_j a_{ji} = \sum_i y_i \left(\sum_j x_j a_{ji} \right) = Y^T A^T X$$

Posons $S(X, Y) = Y^T A^T X$.

Approche probabiliste. Choisissons X et Y deux variables aléatoires iid de $\{-1, 1\}^n$ tels que les x_i sont des variables aléatoires iid suivant la loi de rademacher (ie $\mathbb{P}(x_i = 1) = \mathbb{P}(x_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout i)

Calculons l'espérance de $S(X, Y)$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{E}[S(X, Y)] = \mathbb{E}[Y^T A^T X] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[y_i] \cdot a_{ji} \cdot \mathbb{E}[x_j] = 0$$

car $\mathbb{E}[y_i] = \mathbb{E}[x_j] = 0$ pour tout i, j .

Calculons maintenant la variance :

$$\text{Var}(S(X, Y)) = \mathbb{E}[S(X, Y)^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j} y_i a_{ji} x_j \right)^2 \right]$$

En développant le carré :

$$\mathbb{E}[S(X, Y)^2] = \sum_{i,j,k,\ell} a_{ji} a_{\ell k} \mathbb{E}[y_i y_k] \mathbb{E}[x_j x_\ell]$$

Par indépendance de X et Y , et sachant que $\mathbb{E}[y_i y_k] = \delta_{ik}$ et $\mathbb{E}[x_j x_\ell] = \delta_{j\ell}$, on obtient :

$$\text{Var}(S(X, Y)) = \sum_{i,j} a_{ji}^2 = n^2$$

puisque tous les coefficients $a_{ji} \in \{-1, 1\}$.

Appliquons l'inégalité de Chebyshev. Pour $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(|S(X, Y)| > \lambda) \leq \frac{\text{Var}(S(X, Y))}{\lambda^2} = \frac{n^2}{\lambda^2}$$

Choisissons $\lambda = n^{3/2}$. Alors :

$$\mathbb{P}(|S(X, Y)| > n^{3/2}) \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(|S(X, Y)| \leq n^{3/2}) \geq 1 - \frac{1}{n} > 0$$

Puisque cette probabilité est strictement positive, il existe au moins un couple $(X, Y) \in \{-1, 1\}^n \times \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$|S(X, Y)| = |\text{Tr}(A \cdot (XY^T)^T)| \leq n^{3/2}$$

On peut donc prendre $c = 1$, ce qui conclut la démonstration.

19.2 Corrigé de l'énoncé 31

Solution

1. On a $\forall i \in \{1, \dots, b\}$

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &= \mathbb{P}\left(\inf\{k \in \mathbb{N} : X_k^i = 0\} < \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k^i = b\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} : \left(X_k^i = 0 \text{ et } \forall j < k, X_j^i \notin \{0, b\}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, b\})^{k-1}} \left(X_1^i = i_1, X_2^i = i_2, \dots, X_{k-1}^i = i_{k-1}, X_k^i = 0\right)\right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, b\})^{k-1}} \mathbb{P}\left(X_1^i = i_1, \dots, X_{k-1}^i = i_{k-1}, X_k^i = 0\right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, b\})^{k-1} \\ i_1 = i-1}} \left(\prod_{j=1}^{k-1} p_{i_{j-1}, i_j}\right) p_{i_{k-1}, 0} \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, b\})^{k-1} \\ i_1 = i+1}} \left(\prod_{j=1}^{k-1} p_{i_{j-1}, i_j}\right) p_{i_{k-1}, 0} \\ &= r_i \hat{p}_{i-1} + (1 - r_i) \hat{p}_{i+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \frac{r_i}{1-r_i} (\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1})$$

$$\text{Donc } \hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \frac{1}{\gamma_i} (\hat{p}_1 - \hat{p}_0), \text{ alors } \hat{p}_i - \hat{p}_0 = \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{\gamma_k}\right) (\hat{p}_1 - \hat{p}_0)$$

Or on a $\hat{p}_0 = 1$ et $\hat{p}_b = 0$

$$\text{On trouve donc } \hat{p}_i = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{\gamma_k}}{\sum_{k=0}^{b-1} \frac{1}{\gamma_k}}$$

20 Corrigé Physique U

20.1 Corrigé de l'énoncé 1

Solution

Analyse du champ électrostatique

Le potentiel électrique au voisinage du centre O est donné par :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{4d^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

On cherche à piéger un électron de charge $q = -e$ et de masse m . Son énergie potentielle est $\mathcal{E}_p = -eV$.

Équations du mouvement (Régime statique)

La force électrique est $\vec{F} = -e\vec{E} = e\vec{\nabla}V$. Le Principe Fondamental de la Dynamique projeté sur les axes donne :

$$m\ddot{x} = e\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{eV_0}{2d^2}x \quad (7)$$

$$m\ddot{y} = e\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{eV_0}{2d^2}y \quad (8)$$

$$m\ddot{z} = e\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{eV_0}{d^2}z \quad (9)$$

Posons la pulsation caractéristique $\omega_z = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}$. Le système se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 \end{cases}$$

Discussion de la stabilité

Supposons $V_0 > 0$:

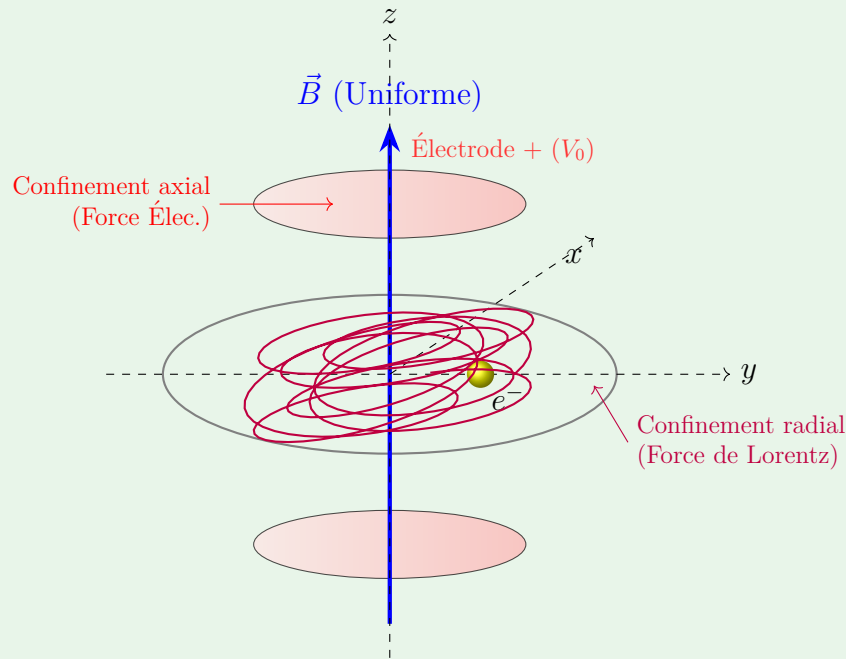
- **Selon l'axe (Oz)** : L'équation est du type oscillateur harmonique $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$. Le mouvement est borné (sinusoïdal). Le confinement est **stable**.
- **Dans le plan (Oxy)** : L'équation est du type $\ddot{x} - k^2 x = 0$. Les solutions sont en $Ae^{kt} + Be^{-kt}$. Toute petite perturbation entraîne une divergence exponentielle. L'équilibre est **instable**.

Remarque : Si $V_0 < 0$, la stabilité s'inverse (stable radialement, instable axialement).

Conclusion : Il est impossible de piéger une particule chargée dans le vide avec un champ électrostatique statique (le potentiel ne possède pas d'extremum local, c'est un point selle).

La Solution : Ajout de champs magnétique

Pour confiner l'électron, on conserve $V_0 > 0$ (pour le piégeage axial en z) et on superpose un **champ magnétique uniforme** $\vec{B} = B\vec{e}_z$ pour contrer la divergence radiale.



Nouvelles équations du mouvement

La force de Lorentz s'écrit $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. En définissant la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m}$, les équations dans le plan (Oxy) deviennent couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{2}\omega_z^2 x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{1}{2}\omega_z^2 y + \omega_c \dot{x} \end{cases}$$

Résolution dans le plan complexe

On pose la variable complexe $u = x + iy$. En combinant les deux équations $(\ddot{x} + i\ddot{y})$, on obtient :

$$\ddot{u} = \frac{1}{2}\omega_z^2 u - \omega_c(\dot{y} - i\dot{x})$$

Sachant que $-i\dot{u} = \dot{y} - i\dot{x}$, l'équation devient :

$$\ddot{u} + i\omega_c \dot{u} - \frac{1}{2}\omega_z^2 u = 0$$

Condition de stabilité

On cherche des solutions de la forme $u(t) \propto e^{i\omega t}$. L'équation caractéristique est :

$$-\omega^2 - \omega_c \omega - \frac{1}{2}\omega_z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 + \omega_c \omega + \frac{1}{2}\omega_z^2 = 0$$

Pour que le mouvement reste borné (piégé), les solutions pour ω doivent être réelles (sinon la partie imaginaire de ω entraînerait une divergence exponentielle de $u(t)$). Le discriminant Δ doit être positif ou nul :

$$\Delta = \omega_c^2 - 4 \left(\frac{1}{2} \omega_z^2 \right) = \omega_c^2 - 2\omega_z^2 \geq 0$$

Condition de magnétron : Le champ magnétique doit être suffisamment fort pour compenser la répulsion électrostatique :

$$\omega_c \geq \omega_z \sqrt{2} \implies B \geq \sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}}$$

- **Champ magnétique terrestre (B_{terre}) :**

Il est de l'ordre de $50 \mu\text{T}$ (soit $0,5 \times 10^{-4} \text{T}$ ou $0,5 \text{ Gauss}$).

- **Champ nécessaire pour le Piège (B_{piege}) :**

Pour confiner efficacement des électrons avec des tensions de laboratoire usuelles ($V_0 \approx 10 \text{ V}$, $d \approx 1 \text{ cm}$), la condition de stabilité $\omega_c > \omega_z \sqrt{2}$ impose un champ beaucoup plus intense. En pratique, on utilise des aimants permanents ou des bobines supraconductrices délivrant :

$$B_{\text{piege}} \approx 0,1 \text{ T} \quad \text{à} \quad 1 \text{ T}$$

Conclusion : Le champ terrestre est environ **2 000 à 20 000 fois plus faible** que le champ nécessaire au piège. Il ne peut donc en aucun cas assurer le confinement. Cependant, il constitue une **perturbation** extérieure non négligeable qu'il faut parfois compenser (blindage magnétique, un peu comme la cage de Faraday) dans les expériences de très haute précision.

Commentaires :

Le candidat a bénéficié d'un tirage favorable, ce sujet présentant de notables analogies avec l'épreuve écrite de l'X 2025. Il est vivement recommandé d'avoir traité ce sujet d'écrit au préalable pour mieux gérer de ce type d'oral.

20.2 Corrigé de l'énoncé 2

Solution

Modélisation Électromagnétique

On considère une plaque à induction modélisée par un solénoïde infini de rayon R_s , comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

Champ magnétique $\vec{B}$

À l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique est considéré comme uniforme, axial et s'exprime par :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Champ électrique induit $\vec{E}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, la variation temporelle du flux magnétique induit un champ électrique orthoradial $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_\theta$. En appliquant la forme intégrale sur un contour circulaire de rayon r (fond de la casserole) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B)$$

On en déduit l'expression du champ électrique induit :

$$E(r, t) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)$$

Puissance dissipée par effet Joule

Le fond de la casserole est considéré comme un milieu ohmique de conductivité γ , de rayon R et d'épaisseur e . La densité de courant est $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. La puissance instantanée dissipée dans le volume V est obtenue par intégration :

$$P(t) = \iiint_V \gamma E^2 d\tau = \int_0^R \gamma \left(\frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2 (e \cdot 2\pi r dr)$$

$$P(t) = \frac{\pi \gamma e R^4 (\mu_0 n I_0 \omega)^2}{8} \sin^2(\omega t)$$

La puissance moyenne $\langle P \rangle$ sur une période est (en utilisant la propriété $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$) :

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \gamma e R^4 (\mu_0 n I_0 \omega)^2}{16}$$

Bilan Thermodynamique

On applique le premier principe de la thermodynamique à l'eau contenue dans la casserole. Pour un volume d'un litre, la masse est $m = 1$ kg. En négligeant la capacité thermique de la casserole et les pertes thermiques vers l'extérieur :

$$\Delta U = Q = m c_{eau} (T_f - T_i)$$

L'énergie thermique est fournie par la puissance Joule moyenne pendant la durée Δt , soit $Q = \langle P \rangle \cdot \Delta t$.

Remarque sur l'intégration : Il est également possible de travailler avec la puissance instantanée. En intégrant $P(t)$, on fait apparaître un terme en $t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}$. À l'échelle macroscopique du chauffage (de l'ordre de la minute), le terme oscillant est totalement négligeable devant t .

Résultat Final

En isolant Δt , on obtient l'expression du temps nécessaire pour atteindre l'ébullition (100°C) :

$$\Delta t = \frac{16 \cdot m c_{eau} (T_f - T_i)}{\pi \gamma e R^4 (\mu_0 n I_0 \omega)^2}$$

Application Numérique

1. Données du calcul

- Eau : $m = 1 \text{ kg}$, $c_{eau} = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\Delta T = 80 \text{ K}$.
- Plaque : $n = 500 \text{ m}^{-1}$, $I_0 = 15 \text{ A}$, $f = 25 \text{ kHz}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.
- Casserole : $\gamma = 10^6 \text{ S/m}$, $R = 0,1 \text{ m}$, $e = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$.

2. Calculs intermédiaires

Le terme d'induction est :

$$\mu_0 n I_0 \omega \approx 1,48 \text{ V/m}^2$$

La puissance moyenne dissipée est :

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (0,1)^4 \cdot (1,48)^2}{16} \approx 860 \text{ W}$$

3. Temps d'ébullition

L'énergie nécessaire est $Q = 334\,400 \text{ J}$. Le temps nécessaire est :

$$\Delta t = \frac{334\,400}{860} \approx 389 \text{ s}$$

4. Résultat final

Le temps nécessaire pour porter un litre d'eau à ébullition est d'environ :

$$\Delta t \approx 6 \text{ min } 29 \text{ s}$$

4. Commentaires

Je ne me rappelle plus des valeurs exactes qu'on m'avait proposées le jour de l'oral. Mais c'est un ordre de grandeur acceptable. Je pense que les questions qui auraient suivi seraient de considérer le phénomène d'induction dans la casserole.

Je dois dire que considérer la plaque à induction comme solénoïde infini est une hypothèse qui n'a jamais été justifiée, si ce n'est pour avoir une expression facile de $\vec{B}$.

20.3 Corrigé de l'énoncé 3

Solution

On considère le champ : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$.

1. Caractère dispersif

Pour savoir si la propagation est dispersive, il faut établir la relation de dispersion $k(\omega)$. Le champ doit vérifier l'équation de d'Alembert (équation d'onde) dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Calculons les dérivées partielles pour la composante E_y :

- Temporelle : $\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y$
- Spatiale selon x : $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_y$
- Spatiale selon z : $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_y$

Le laplacien est $\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}\right) E_y$.

L'équation d'onde devient :

$$-\left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}\right) E_y - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 E_y) = 0$$

En simplifiant par E_y (non nul), on obtient la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k}$. Or ici, k n'est pas proportionnel à ω (la relation n'est pas linéaire à cause du terme en $n\pi/a$).

$$v_\phi(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ω . **Conclusion** : Bien que le milieu soit le vide (non dispersif intrinsèquement), la structure de l'onde (confinée selon z , typique d'un guide d'onde) rend la propagation **dispersive**.

2. Vitesse de propagation de l'énergie

La vitesse de propagation de l'énergie correspond à la **vitesse de groupe** v_g :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Différenciation de la relation de dispersion $k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \omega^2/c^2$

$$2k dk = \frac{2\omega}{c^2} d\omega \implies \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

On a donc :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}$$

On remarque que $v_g \cdot v_\phi = c^2$ et que $v_g < c$.

20.4 Corrigé de l'énoncé 4

Solution**Propagation d'une OPPH dans une cavité soumise à un champ magnétique externe**

Onde plane progressive harmonique incidente :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y, \quad \vec{B}_{\text{onde}}(x, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_x \times \vec{E} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z.$$

Champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire dans la cavité :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z.$$

Champ magnétique total :

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{onde}} + \vec{B}_0.$$

Principe fondamental de la dynamique

Pour un électron de masse m et de charge $-e$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}_0,$$

le terme $\vec{v} \times \vec{B}_{\text{onde}}$ étant négligé à l'ordre linéaire.

Décomposition de la vitesse :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y.$$

Projection suivant y

$$m \frac{dv_y}{dt} = -eE_0 \cos(\omega t - kx).$$

Solution harmonique :

$$v_y(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t - kx).$$

Projection suivant x

$$m \frac{dv_x}{dt} = -e(\vec{v} \times \vec{B}_0)_x = -eB_0 v_y.$$

Substitution :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{e^2 E_0 B_0}{m^2 \omega} \sin(\omega t - kx).$$

Intégration :

$$v_x(t) = \frac{e^2 E_0 B_0}{m^2 \omega^2} \cos(\omega t - kx).$$

Courant électronique

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v} = -n_e e (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y).$$

Ainsi :

$$j_x(t) \neq 0, \quad j_y(t) \neq 0.$$

Champ électrique induit

L'équation de Maxwell–Ampère :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

impose, en présence de j_x :

$$E_x(t) \neq 0.$$

Le champ électrique à la sortie de la cavité s'écrit donc :

$$\vec{E}_{\text{sortie}}(t) = E_y(t)\vec{e}_y + E_x(t)\vec{e}_x.$$

Caractérisation

Une onde plane progressive harmonique vérifie :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{E}_0 = \text{constant}.$$

Ici :

$$\vec{E}_0(t) = E_y(t)\vec{e}_y + E_x(t)\vec{e}_x, \quad E_x \propto B_0.$$

Conclusion

$$\vec{E}_{\text{sortie}} \nparallel \vec{E}_{\text{entrée}}$$

$$E_y \rightarrow v_y \rightarrow v_x \rightarrow j_x \rightarrow E_x$$

Le champ électrique n'est plus une onde plane progressive harmonique

20.5 Corrigé de l'énoncé 5

Solution

L'énoncé impose que pour $z > 0$, le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(x, y, z, t)\vec{u}_y$. La distribution de charges et de courants est invariante par translation suivant l'axe (Oy), nous cherchons donc une solution sous la forme :

$$\vec{E}(x, z, t) = \underline{E}(x, z)e^{i\omega t}\vec{u}_y$$

De plus, la distribution est périodique suivant l'axe (Ox) de période a . On peut donc décomposer le champ en série de Fourier :

$$\underline{E}(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underline{E}_n(z) e^{i \frac{2\pi n x}{a}}$$

La grille étant métallique (conducteur parfait) et le champ électrique incident étant polarisé parallèlement aux tiges ($\vec{E} \parallel \vec{u}_y$), le métal agit comme un miroir conducteur. Son rôle est de

réfléchir intégralement la composante continue ($n = 0$) du champ vers l'intérieur du four. Le champ transmis à $z > 0$ ne contient donc que des harmoniques spatiales ($n \geq 1$). Pour un mode n donné, l'équation de D'Alembert dans le vide ($z > 0$) donne :

$$\frac{d^2 \underline{E}_n}{dz^2} + (2\pi)^2 \left[\left(\frac{f}{c} \right)^2 - \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \underline{E}_n = 0$$

Pour $f = 2,5$ GHz et $a \simeq 0,1$ mm, on a $1/a \gg f/c$. Pour tout $n \geq 1$, le terme entre crochets est négatif. L'onde est donc évanescence selon z :

$$\underline{E}_n(z) = \underline{E}_{n,0} e^{-\gamma_n z} \quad \text{avec} \quad \gamma_n = 2\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} - \frac{f^2}{c^2}}$$

La distance d'atténuation caractéristique du mode fondamental ($n = 1$) est $\delta = 1/\gamma_1 \simeq a/2\pi$.

Aspect énergétique

Le transport d'énergie est quantifié par la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Pour une onde évanescence, le champ électrique et le champ magnétique sont en quadrature de phase. La puissance moyenne transportée selon z est :

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\underline{E}_y \cdot \underline{B}_x^*) = 0$$

La puissance moyenne transmise est nulle.

Ce dispositif est appelé polariseur car atténue une composante (en l'occurrence celle suivant y) du champ et est bien plus efficace pour conserver le champ à l'intérieur qu'une simple porte en métal sans fentes ou trous.

20.6 Corrigé de l'énoncé 6

Solution

Avant de commencer, il faut savoir que diverses solutions sont acceptables. Il faut aussi se poser la question de ce qui rend quelque chose rond. Il se trouve qu'une des raisons est l'existence d'un centre fluidifié qui tend à prendre la forme qui minimise l'énergie gravitationnelle (un peu comme les bulles de savon), qui est une forme sphérique. Un axe d'attaque de ce problème peut donc être le fait que le centre de la planète doit avoir de la roche écrasée sous la pression pour devenir liquide et prendre une forme sphérique.

1. Modélisation Physique

Le problème se modélise comme une compétition entre deux pressions (ou densités d'énergie) :

- **L'attaquant (Gravité) :** La pression centrale P_c générée par la masse de l'astre qui tend à le comprimer.
- **Le défenseur (Cohésion) :** La pression critique P_{crit} nécessaire pour vaincre la structure cristalline et transformer le fond de la planète en liquide

2. Calcul de la pression centrale P_c

Considérons l'astre comme une sphère homogène de rayon R et de masse volumique ρ . L'équation locale de l'hydrostatique s'écrit :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g(r)$$

D'après le théorème de Gauss, le champ de pesanteur interne est linéaire :

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho r$$

En intégrant de la surface ($P(R) = 0$) vers le centre ($r = 0$) :

$$P_c = \int_0^R \rho \left(\frac{4}{3}\pi G \rho r \right) dr = \frac{4}{3}\pi G \rho^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

On obtient la pression au cœur de l'astre :

$$P_c = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2$$

3. Estimation de la pression critique via l'Enthalpie

Pour que l'astre devienne sphérique, la matière doit fluer (comportement plastique). L'énergie nécessaire pour briser la rigidité du réseau cristallin est liée à l'enthalpie de fusion ΔH_{fus} (en J kg^{-1}). La pression critique est homogène à une densité volumique d'énergie :

$$P_{\text{crit}} \approx \rho \cdot \Delta H_{\text{fus}}$$

4. Résolution : Le Rayon Critique

La condition de sphéricité est $P_c \geq P_{\text{crit}}$.

$$\frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 \geq \rho \Delta H_{\text{fus}}$$

En isolant R , nous obtenons l'expression du rayon minimal :

$$R_{\text{min}} = \sqrt{\frac{3\Delta H_{\text{fus}}}{2\pi G \rho}}$$

5. Discussion des résultats et limitations de notre modèle

Pour estimer ce rayon, nous utilisons les constantes physiques suivantes pour un corps rocheux standard (silicates/astéroïde) :

- **Gravitation** : $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- **Densité de la roche** : $\rho \approx 3000 \text{ kg m}^{-3}$
- **Enthalpie de fusion (Silicates)** : $\Delta H_{\text{fus}} \approx 500 \text{ kJ kg}^{-1} = 5 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$

Le résultat brut de ce modèle simplifié donne environ 1100 km. C'est le bon ordre de grandeur, mais c'est un peu haut (la réalité est plutôt vers 400 km - 600 km pour la roche).

Pourquoi cette surestimation ?

Parce que nous avons supposé qu'il fallait fournir l'énergie de fusion *totale* pour que l'objet devienne rond. En réalité, le fluage (déformation plastique) commence bien avant la fusion complète, grâce aux dislocations dans les cristaux. L'énergie d'activation du fluage est environ 2 à 3 fois plus faible que l'enthalpie de fusion pure.

Si on divise l'enthalpie par 3 (pour représenter le fluage et non la fusion totale) :

$$R_{\text{ajusté}} = \frac{1100}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{635 \text{ km}}$$

Ce qui nous amène exactement dans la gamme de Cérès et des gros astéroïdes.

Mais bon pour conclure notre exercice on a montré que ce qui est déjà satisfaisant pour notre simple modèle.

$$R_{\text{min}} \propto \sqrt{\frac{\Delta H_{\text{fus}}}{G\rho}}$$

20.7 Corrigé de l'énoncé 7

Solution

La puissance volumique $q(r)$ (en $W \cdot m^{-3}$) est liée à la puissance massique p par la masse volumique ρ :

$$q(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq r < R_m \\ \rho p & \text{pour } R_m \leq r \leq R \end{cases}$$

Équation de la chaleur

En régime stationnaire et avec une symétrie sphérique, l'équation de la chaleur pour le profil de température $T(r)$ est :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q(r)}{k} = 0$$

Où k est la conductivité thermique du milieu.

Résolution par zones

1. Zone 1 : Le cœur ($0 \leq r < R_m$)

Dans cette zone, $q(r) = 0$. L'équation devient :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_1}{dr} \right) = 0 \implies r^2 \frac{dT_1}{dr} = C_1$$

La condition de symétrie au centre ($r = 0$) impose $C_1 = 0$. Par conséquent :

$$\frac{dT_1}{dr} = 0 \implies T_1(r) = T_{\text{cœur}} = \text{constante}$$

2. Zone 2 : L'enveloppe ($R_m \leq r \leq R$)

Ici, $q(r) = \rho p$. Intégrons l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_2}{dr} \right) = -\frac{\rho p}{k} r^2$$

En intégrant entre R_m et r , avec un flux nul en R_m ($dT/dr = 0$) :

$$r^2 \frac{dT_2}{dr} = -\frac{\rho p}{3k} (r^3 - R_m^3)$$

$$\frac{dT_2}{dr} = -\frac{\rho p}{3k} r + \frac{\rho p R_m^3}{3k r^2}$$

Intégrons entre r et le rayon de surface R , où $T(R) = T_s$:

$$\int_{T_2(r)}^{T_s} dT = \int_r^R \left(-\frac{\rho p}{3k} u + \frac{\rho p R_m^3}{3k u^2} \right) du$$

$$T_s - T_2(r) = \left[-\frac{\rho p}{6k} u^2 - \frac{\rho p R_m^3}{3k u} \right]_r^R$$

$$T_s - T_2(r) = -\frac{\rho p}{6k} (R^2 - r^2) - \frac{\rho p R_m^3}{3k} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Le profil de température de la planète est défini par :

- Dans l'enveloppe ($R_m \leq r \leq R$) :

$$T(r) = T_s + \frac{\rho p}{6k} (R^2 - r^2) - \frac{\rho p R_m^3}{3k} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

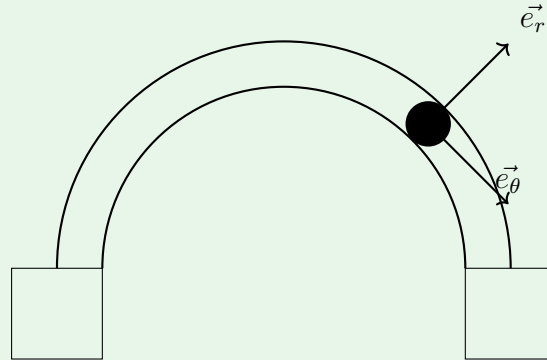
- Dans le cœur ($0 \leq r < R_m$) : Par continuité en $r = R_m$:

$$T_{\text{cœur}} = T_s + \frac{\rho p}{6k} (R^2 - R_m^2) - \frac{\rho p R_m^2}{3k} \left(1 - \frac{R_m}{R} \right)$$

21 Corrigé Physique LSR

21.1 Corrigé de l'énoncé 8

Solution



Bilan des forces:

- Le poids $mg(-\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$
- L'action du tube sur la balle $\vec{R}$
- La force pressante exercée par l'air à gauche de la balle sur la balle $\vec{F}_g$
- La force pressante exercée par l'air à droite de la balle sur la balle $\vec{F}_d$

pour calculer rigoureusement $\vec{F}_g$ il faut considérer le repère sphérique associé à la balle ($O', \vec{e}_{\theta'}, \vec{e}_{\phi}$) et intégrer l'expression de la force pressante $P_g d\vec{S} = P_g r^2 d\theta' \sin(\theta') d\phi \vec{e}_{r'}$ sur la demi sphère gauche ce qui donne après calcul $\pi P_g r^2 \vec{e}_\theta$ qui est la même expression que si l'on assimile la sphère à un cylindre de rayon r . De même $\vec{F}_d = -\pi P_d r^2 \vec{e}_\theta$. Avec P_d la pression à droite de la balle.

La loi des gaz parfait permet de calculer P_d et P_g :

$P_g(V_0 + \pi r^2 l \theta) = nRT$ avec l le rayon des deux cercles qu'on suppose à peu près de même rayon.

$$\text{Donc } P_g = \frac{nRT}{V_0 + \pi r^2 l \theta} \text{ et } P_d = \frac{nRT}{V_0 - \pi r^2 l \theta}$$

On remarque que $\vec{R}$ n'a pas de composante suivant $\vec{e}_\theta$, l'application du PFD à l'équilibre projeté sur $\vec{e}_\theta$ donne:

$$mg \sin(\theta) + \pi r^2 nRT \left(\frac{1}{V_0 + \pi r^2 l \theta} - \frac{1}{V_0 - \pi r^2 l \theta} \right) = 0$$

comme V_0 est très grand devant $\pi r^2 l \theta$ on effectue un développement limité à l'ordre 1 pour trouver.

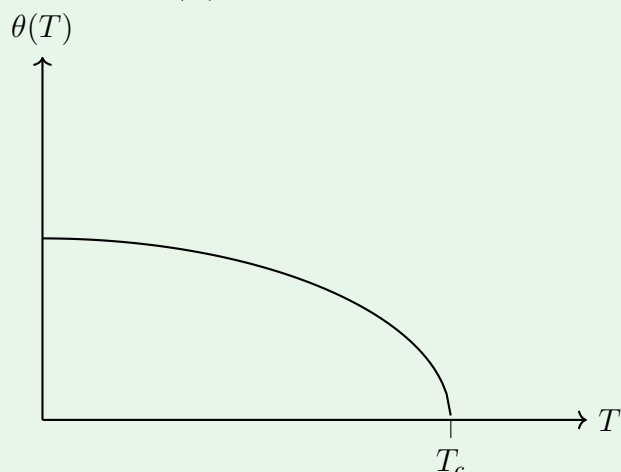
$$mg \sin(\theta) - \frac{2\pi^2 r^4 nRT l}{V_0} \theta = 0$$

Les positions d'équilibre sont donc les solutions de

$$mg \sin(\theta) - CT\theta = 0 \quad (10)$$

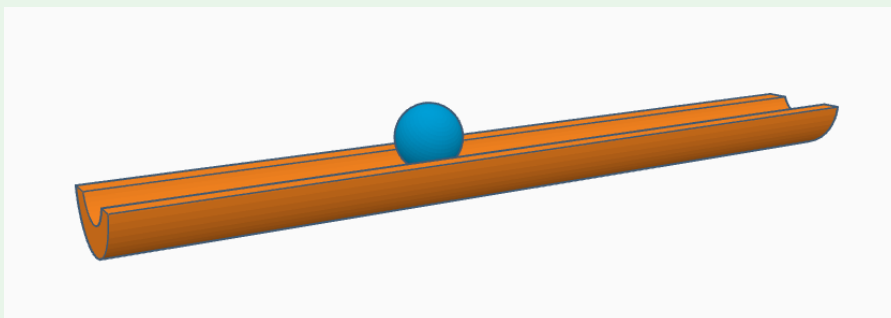
avec C une constante indépendante de T . En traçant le graphe de $mg \sin(\theta)$ et de $CT\theta$ on remarque qu'il existe deux positions d'équilibre non nul $\theta(T)$ et $-\theta(T)$ dès que $CT < mg$ c.à.d $T < \frac{mg}{C} = T_c$.

L'allure de $\theta(T)$:



21.2 Corrigé de l'énoncé 9

Solution



1. Cas sans ressort

L'équation du mouvement radial dans le référentiel tournant est :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

En utilisant les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = v_0$, la solution exacte est :

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

Le temps de sortie t_s pour lequel la bille quitte le cylindre de longueur L ($r(t_s) = L$) est obtenu en résolvant l'équation en $e^{\omega t}$:

$$t_s = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 - r_0^2 + (v_0/\omega)^2}}{r_0 + v_0/\omega} \right)$$

2. Cas avec ressort

Avec un ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0 = 2r_0$ lié au point O , l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{M} - \omega^2 \right) r = \frac{2kr_0}{M}$$

Soit $\omega^2 = \frac{k}{M} - \omega^2$ et la solution particulière $r_p = \frac{2kr_0}{M\omega^2}$.

- Si $\omega^2 > 0$ (ressort dominant), le mouvement est oscillatoire :

$$r(t) = (r_0 - r_p) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + r_p$$

- Si $\omega^2 < 0$ (rotation dominante), soit $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{M}}$:

$$r(t) = (r_0 - r_p) \cosh(\lambda t) + \frac{v_0}{\lambda} \sinh(\lambda t) + r_p$$

- Si $\omega^2 = 0$, l'accélération est constante et le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$r(t) = \frac{kr_0}{M} t^2 + v_0 t + r_0$$

On résout dans chaque cas l'équation traduisant la sortie de la bille du support en passant aux exponentielles pour les deux premiers cas. Pour la solution sunisoïdale, une condition sur l'amplitude est requise.

21.3 Corrigé de l'énoncé 10

Solution

1. Le frottement est visqueux et la force de rappel harmonique, on obtient l'équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + h \frac{d \vec{OM}}{dt} + k \vec{OM} = q \vec{E}$$

soit $\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \vec{OM}}{dt} + \omega_0^2 \vec{OM} = \omega_0^2 \vec{OM}_0 \cos(\omega t),$

avec $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0/Q = h/m$ et $\omega_0^2 \vec{OM}_0 = q \vec{E}_0/m$.

2. Bien que le problème ne soit pas unidimensionnel comme dans le cas étudié en cours, on peut rechercher par la même technique le régime permanent grâce aux notations complexes en posant $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x = \text{Re}(\underline{\vec{OM}})$ et en recherchant $\underline{\vec{OM}}$ sous la forme $\underline{\vec{OM}}(t) = \underline{X} \vec{e}_x e^{j\omega t}$, où $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire et $\underline{X}$ une amplitude complexe. $\underline{\vec{OM}}$ sera alors solution de l'équation avec $(q \vec{E}_0/m) e^{j\omega t}$ comme second membre. On obtient alors :

$$(-\omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2) \underline{X} \vec{e}_x e^{j\omega t} = \omega_0^2 \vec{OM}_0 e^{j\omega t}$$

$$\text{soit : } \underline{X} \vec{e}_x = \frac{\vec{OM}_0}{(1 - u^2) + ju/Q} \quad \text{avec } u = \omega/\omega_0.$$

On constate qu'en régime établi, $\vec{OM}(t) = x \vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$ colinéaire à $\vec{OM}_0$ et donc à $\vec{E}_0$.

3. On obtient l'accélération complexe en dérivant $\underline{\vec{OM}}(t)$. On obtient après calculs :

$$\ddot{x}(t) = \frac{u^2 q E_0 / m}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + u^2 / Q^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \varphi = \pi/2 - \arctan[Q(u - 1/u)].$$

4. On a $\omega \ll \omega_0$, soit $u \ll 1$ et $Q \gg 1$, l'expression se simplifie en : $\ddot{x}(t) = -(\omega^2 q E_0 / m \omega_0^2) \cos \omega t$: l'accélération est proportionnelle à ω^2 .

5. L'électron est soumis à une excitation composée d'un grand nombre de longueurs d'onde. Sa réponse en accélération sera une vibration composée de la somme des réponses harmoniques à chacune des longueurs d'onde excitatrices, l'amplitude de chacune étant donnée par la relation de la question précédente. Il émet donc de la lumière dans toutes ces longueurs d'onde : c'est le phénomène de diffusion de la lumière.

Cependant, la puissance lumineuse émise varie comme le carré de l'accélération et donc en ω^4 . La puissance rayonnée dans le bleu ($\lambda_{\text{bleu}} \simeq 400 \text{ nm}$) est donc $(\lambda_{\text{rouge}} / \lambda_{\text{bleu}})^4$ supérieure à celle rayonnée dans le rouge ($\lambda_{\text{rouge}} \simeq 700 \text{ nm}$), soit environ 9 fois plus importante. La lumière diffusée par les atomes de l'atmosphère est donc principalement bleue, et cette dernière nous apparaît alors bleue.

21.4 Corrigé de l'énoncé 11

Solution

1. Modélisation et hypothèses

On modélise l'atome d'hydrogène par un proton et un électron en interaction coulombienne. Le proton est supposé immobile et placé à l'origine O , en raison du rapport de masse

$$\frac{m_p}{m_e} \simeq 1836 \gg 1.$$

L'électron, de masse m et de charge $-e$, est soumis :

- à la force coulombienne attractive exercée par le proton,
- à la force magnétique due à un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B \vec{e}_z.$$

L'étude est menée entièrement en mécanique classique.

2. Forces appliquées à l'électron

La force coulombienne est une force centrale :

$$\vec{F}_C = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

La force magnétique est donnée par la loi de Lorentz :

$$\vec{F}_B = -e \vec{v} \times \vec{B}.$$

La résultante des forces est :

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_B.$$

3. Théorème du moment cinétique et planéité du mouvement

Le moment cinétique de l'électron par rapport à O est :

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}.$$

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}).$$

Le moment de la force coulombienne est nul car elle est centrale :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_C) = \vec{r} \times \vec{F}_C = 0.$$

Le moment de la force magnétique est colinéaire à $\vec{B}$. Si les conditions initiales sont telles que $\vec{L}(0)$ est colinéaire à $\vec{B}$, alors la direction de $\vec{L}$ est conservée.

Le mouvement est donc plan, dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

4. Équations du mouvement en coordonnées polaires

Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires (r, θ) . La vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

L'accélération est :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

La force magnétique s'écrit :

$$\vec{F}_B = -eB(r\dot{\theta} \vec{e}_r - \dot{r} \vec{e}_\theta).$$

5. Équations scalaires

Projection radiale :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - eBr\dot{\theta}.$$

Projection orthoradiale :

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = eB\dot{r}.$$

6. Conservation issue du théorème du moment cinétique

On multiplie l'équation orthoradiale par r :

$$m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d}{dt}(r^2).$$

On obtient donc la conservation :

$$\boxed{mr^2 \dot{\theta} + \frac{eB}{2} r^2 = \ell}$$

où ℓ est une constante du mouvement.

7. Conservation de l'énergie

La force magnétique ne travaille pas. L'énergie mécanique est donc conservée :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

En utilisant la relation précédente :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} \left(\ell - \frac{eB}{2}r^2 \right),$$

on obtient :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r).$$

8. Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective est :

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2mr^2} \left(\ell - \frac{eB}{2}r^2 \right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le mouvement radial est équivalent à celui d'un point matériel dans ce potentiel unidimensionnel.

9. Étude de $V_{\text{eff}}(r)$

Comportement aux bornes

Lorsque $r \rightarrow 0$:

$$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{\ell^2}{2mr^2} \rightarrow +\infty.$$

Lorsque $r \rightarrow +\infty$:

$$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{e^2 B^2}{8m} r^2 \rightarrow +\infty.$$

Le potentiel admet donc au moins un minimum global.

Condition d'orbite circulaire

Une orbite circulaire de rayon r_0 vérifie :

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r_0} = 0,$$

ce qui conduit à l'équation :

$$\frac{1}{mr_0^3} \left(\ell - \frac{eB}{2}r_0^2 \right)^2 - \frac{eB}{m} \left(\ell - \frac{eB}{2}r_0^2 \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}.$$

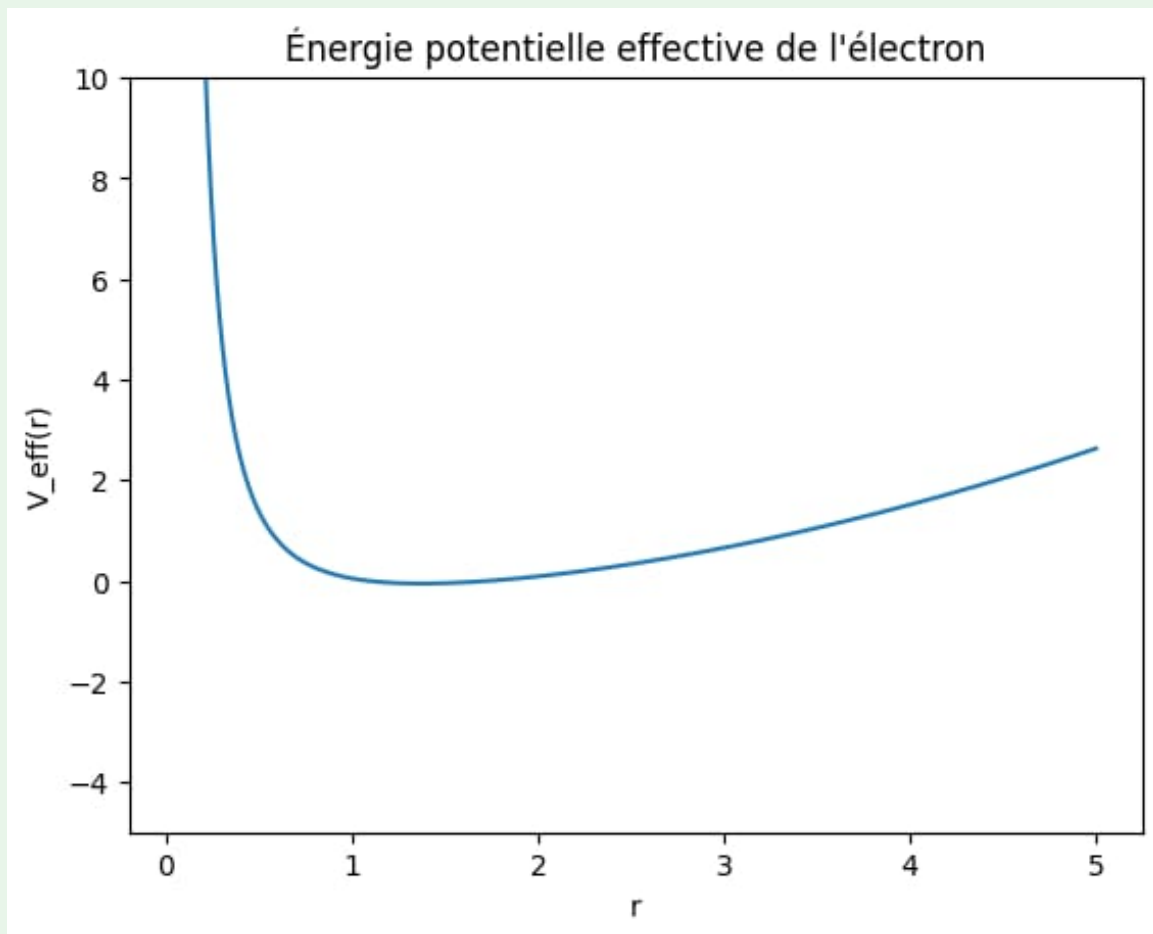
Cette orbite correspond à un minimum du potentiel et est donc stable.

10. États mécaniques possibles

- $E = V_{\min}$: orbite circulaire stable.
- $E > V_{\min}$: oscillations radiales entre deux rayons, mouvement borné en rosace.
- Aucun mouvement non lié : l'électron est toujours confiné.

11. Conclusion

Le champ magnétique uniforme confine l'électron et rend l'atome classiquement stable. Toutes les trajectoires sont liées et décrites par un potentiel effectif présentant un minimum stable.



21.5 Corrigé de l'énoncé 12

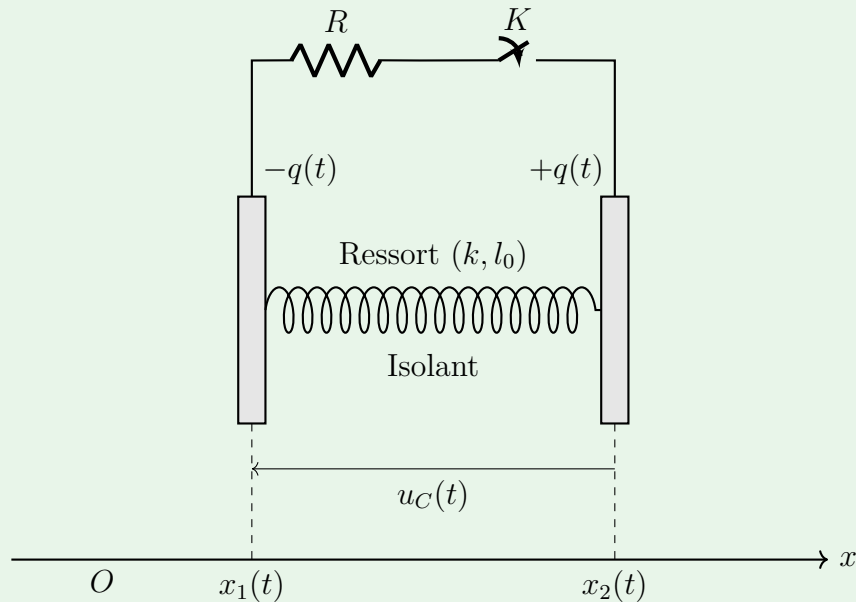
Solution

Modélisation et Schéma du système

On considère un condensateur plan dont les armatures (de surface S et de masse m) sont mobiles le long d'un axe (Ox) .

- $x_1(t)$ et $x_2(t)$: positions des deux armatures.
- $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$: distance entre les armatures.

- Le ressort (non conducteur) de raideur k et de longueur à vide l_0 relie les deux armatures.
- Le circuit électrique contient une résistance R et un interrupteur K .



Équation Électrique

La capacité du condensateur varie avec la distance $x(t)$:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 S}{x(t)}$$

(La démonstration de cette formule m'a été demandée, j'ai donné les grandes étapes de la preuve à l'oral, ce qui a été accepté.)

Loi des mailles :

$$u_R + u_C = 0$$

Avec $u_R = Ri = R\dot{q}$ et $u_C = \frac{q}{C(x)} = \frac{qx(t)}{\epsilon_0 S}$.

L'équation différentielle électrique est donc :

$$R\dot{q} + \frac{x(t)}{\epsilon_0 S}q = 0$$

Équation Mécanique

Nous appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) à chaque armature séparément dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen).

Le piège classique (dans lequel je suis tombé mais que j'ai corrigé en autonomie) est de dire $F = qE$. Or, le champ total dans le condensateur est $E_{tot} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Si on fait $F = q \times \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, on

trouve un résultat deux fois trop grand. Parce qu'une plaque ne subit pas son propre champ électrique. Elle ne subit que le champ créé par l'autre plaque qui vaut $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (démonstration via Th. de Gauss faite à l'oral)

On définit :

- $F_{el} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$: intensité de la force d'attraction électrostatique entre les plaques.
- $F_k = k(x - l_0)$: intensité de la force de rappel du ressort (avec $x = x_2 - x_1$).

Étude de l'armature 1 (gauche, position x_1)

Cette armature subit des forces dirigées vers la droite (vers l'armature 2) :

- L'attraction électrostatique : $+F_{el}\vec{e}_x$
- La tension du ressort (si étiré) : $+F_k\vec{e}_x$

Le PFD projeté sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x}_1 = +k(x - l_0) + \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (1)$$

Étude de l'armature 2 (droite, position x_2)

Cette armature subit les forces opposées, dirigées vers la gauche (vers l'armature 1) :

- L'attraction électrostatique : $-F_{el}\vec{e}_x$
- La tension du ressort : $-F_k\vec{e}_x$

Le PFD projeté sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x}_2 = -k(x - l_0) - \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (2)$$

Mouvement relatif

On cherche l'équation régissant la distance $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$. En dérivant deux fois par rapport au temps :

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

On soustrait l'équation (1) à l'équation (2) :

$$\ddot{x} = \left[-\frac{k}{m}(x - l_0) - \frac{q^2}{2m\epsilon_0 S} \right] - \left[\frac{k}{m}(x - l_0) + \frac{q^2}{2m\epsilon_0 S} \right]$$

On regroupe les termes :

$$\ddot{x} = -\frac{2k}{m}(x - l_0) - \frac{2q^2}{2m\epsilon_0 S}$$

En divisant tout par 2 et en réarrangeant, on fait apparaître le facteur $\frac{m}{2}$ (qui correspond bien à la masse réduite retrouvée par le calcul direct) :

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = -k(x - l_0) - \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Finalement, l'équation différentielle mécanique couplée est :

$$\frac{m}{2}\ddot{x} + k(x - l_0) + \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = 0$$

Combinaison des équations (Découplage)

Nous cherchons une équation différentielle unique portant sur la charge $q(t)$.

1. Expression de x en fonction de q

À partir de l'équation électrique :

$$R\dot{q} + \frac{x}{\epsilon_0 S}q = 0$$

Nous pouvons isoler la variable de position $x(t)$. Posons la constante $\tau = R\epsilon_0 S$.

$$x(t) = -\frac{R\epsilon_0 S\dot{q}}{q} = -\tau\frac{\dot{q}}{q}$$

Cela nous donne une relation directe entre la position et le taux de variation logarithmique de la charge.

2. Dérivées successives

Il faut maintenant exprimer l'accélération $\ddot{x}$ en fonction de q . Dérivons $x(t)$ par rapport au temps :

$$\dot{x} = -\tau\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}}{q}\right) = -\tau\left(\frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2}\right) = -\tau\left(\frac{\ddot{q}}{q} - \left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2\right)$$

Dérivons une seconde fois pour obtenir $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = -\tau\left[\left(\frac{\ddot{q}q - \dot{q}\dot{q}}{q^2}\right) - 2\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)\left(\frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2}\right)\right]$$

En développant et regroupant les termes :

$$\ddot{x} = -\tau\left[\frac{\ddot{q}}{q} - \frac{3\dot{q}\ddot{q}}{q^2} + \frac{2\dot{q}^3}{q^3}\right]$$

3. Injection dans l'équation mécanique

Reprenons l'équation mécanique :

$$\frac{m}{2}\ddot{x} + k(x - l_0) + \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = 0$$

On remplace x et $\ddot{x}$ par les expressions trouvées précédemment :

$$\frac{m}{2}\left(-\tau\left[\frac{\ddot{q}}{q} - \frac{3\dot{q}\ddot{q}}{q^2} + \frac{2\dot{q}^3}{q^3}\right]\right) + k\left(-\tau\frac{\dot{q}}{q} - l_0\right) + \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = 0$$

4. Résultat final

En multipliant par q^3 pour éliminer les dénominateurs (en supposant $q \neq 0$), on obtient une équation différentielle non linéaire du troisième ordre :

$$\frac{m\tau}{2} (3q\dot{q}\ddot{q} - q^2 \ddot{q} - 2\dot{q}^3) - k\tau q^2 \dot{q} - kl_0 q^3 + \frac{q^5}{2\epsilon_0 S} = 0$$

Note : Bonne chance pour trouver une solution analytique simple. j'ai tenté de résoudre numériquement par la méthode d'Euler, mais c'est une méthode bien trop naïve pour une telle équation. Il faut sortir l'artillerie lourde.

Étude Énergétique (Bilan de Puissance)

Nous allons retrouver la variation de l'énergie totale du système en combinant les équations différentielles établies précédemment.

1. Bilan de puissance électrique

Reprenons l'équation électrique :

$$R\dot{q} + \frac{x}{\epsilon_0 S} q = 0$$

Multiplions cette équation par l'intensité $i = \dot{q}$:

$$R\dot{q}^2 + \frac{xq\dot{q}}{\epsilon_0 S} = 0 \quad (\text{A})$$

Le terme $R\dot{q}^2$ correspond à la puissance dissipée par effet Joule (P_J).

2. Bilan de puissance mécanique

Reprenons l'équation mécanique du mouvement relatif :

$$\frac{m}{2} \ddot{x} + k(x - l_0) + \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = 0$$

Multiplions cette équation par la vitesse relative $v = \dot{x}$:

$$\frac{m}{2} \ddot{x} \dot{x} + k(x - l_0) \dot{x} + \frac{q^2 \dot{x}}{2\epsilon_0 S} = 0 \quad (\text{B})$$

On reconnaît les dérivées temporelles des énergies mécaniques :

- Énergie cinétique : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{m}{4} (2\dot{x}\ddot{x}) = \frac{m}{2} \ddot{x} \dot{x}$
- Énergie potentielle élastique : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k (x - l_0)^2 \right) = \frac{1}{2} k (2(x - l_0) \dot{x}) = k(x - l_0) \dot{x}$

3. Bilan total

Sommons les deux équations de puissance (A) + (B) :

$$\left(R\dot{q}^2 + \frac{xq\dot{q}}{\epsilon_0 S}\right) + \left(\frac{m}{2}\ddot{x}\dot{x} + k(x - l_0)\dot{x} + \frac{q^2\dot{x}}{2\epsilon_0 S}\right) = 0$$

Regroupons les termes pour faire apparaître la dérivée de l'énergie électrostatique $E_{em} = \frac{q^2 x}{2\epsilon_0 S}$

: On sait que $\frac{dE_{em}}{dt} = \frac{1}{2\epsilon_0 S}(2q\dot{q}x + q^2\dot{x}) = \frac{xq\dot{q}}{\epsilon_0 S} + \frac{q^2\dot{x}}{2\epsilon_0 S}$.

L'équation somme devient alors :

$$R\dot{q}^2 + \underbrace{\left(\frac{m}{2}\ddot{x}\dot{x}\right)}_{\frac{dE_c}{dt}} + \underbrace{k(x - l_0)\dot{x}}_{\frac{dE_{pe}}{dt}} + \underbrace{\left(\frac{xq\dot{q}}{\epsilon_0 S} + \frac{q^2\dot{x}}{2\epsilon_0 S}\right)}_{\frac{dE_{em}}{dt}} = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$R\dot{q}^2 + \frac{d}{dt}(E_c + E_{pe} + E_{em}) = 0$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{dE_{tot}}{dt} = -R\dot{q}^2}$$

Cela confirme que la variation temporelle de l'énergie totale du système est exactement égale à la puissance dissipée par effet Joule, ce qui était prévisible.

21.6 Corrigé de l'énoncé 13

Solution

1. Analyse physique

On considère la masse ponctuelle m dans un plan horizontal (pesanteur négligée). La tension du fil $\vec{T}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ de la masse car le fil reste tendu et le mouvement instantané est une rotation autour du point de contact avec la poulie. Par conséquent, la tension ne travaille pas. L'énergie cinétique du système se conserve :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$$

La norme de la vitesse est donc constante au cours du temps :

$$v(t) = V_0$$

2. Mise en équation

Soit $\theta(t)$ l'angle d'enroulement à l'instant t . La longueur totale du fil est L . La longueur de l'arc enroulé sur la poulie est $R\theta(t)$. La longueur de la partie libre du fil (partie rectiligne) à l'instant t , notée $l(t)$, est donc :

$$l(t) = L - R\theta(t)$$

La vitesse linéaire V_0 est reliée à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par le rayon instantané de rotation, qui correspond à la longueur libre du fil $l(t)$:

$$V_0 = l(t) \cdot \dot{\theta} = (L - R\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

3. Loi de $\theta(t)$

Nous obtenons une équation différentielle à variables séparables :

$$V_0 dt = (L - R\theta) d\theta$$

Intégrons cette équation entre l'instant $t = 0$ (où $\theta = 0$) et l'instant t :

$$\int_0^t V_0 dt = \int_0^{\theta(t)} (L - R\phi) d\phi$$

$$V_0 t = \left[L\phi - \frac{1}{2} R\phi^2 \right]_0^{\theta(t)}$$

$$V_0 t = L\theta(t) - \frac{1}{2} R[\theta(t)]^2$$

Nous obtenons une équation du second degré en θ :

$$\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta + V_0 t = 0$$

Le discriminant est $\Delta = L^2 - 4\left(\frac{R}{2}\right)(V_0 t) = L^2 - 2RV_0 t$. Les solutions sont :

$$\theta(t) = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 2RV_0 t}}{R}$$

À $t = 0$, nous savons que $\theta(0) = 0$. La solution avec le signe $+$ donnerait $\theta(0) = 2L/R$, ce qui est impossible. Nous retenons donc la solution avec le signe $-$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{L - \sqrt{L^2 - 2RV_0 t}}{R}}$$

4. Durée de l'enroulement

L'enroulement s'arrête lorsque la longueur libre du fil est nulle, c'est-à-dire $l(t_{fin}) = 0$.

$$L - R\theta_{fin} = 0 \implies \theta_{fin} = \frac{L}{R}$$

En utilisant la relation intégrée $V_0 t = L\theta - \frac{1}{2} R\theta^2$ avec $t = T$ (durée totale) et $\theta = L/R$:

$$V_0 T = L \left(\frac{L}{R} \right) - \frac{1}{2} R \left(\frac{L}{R} \right)^2$$

$$V_0 T = \frac{L^2}{R} - \frac{L^2}{2R} = \frac{L^2}{2R}$$

D'où la durée totale de l'enroulement :

$$T = \frac{L^2}{2RV_0}$$

Note importante : Une résolution dynamique est possible mais elle entrave des opérations de primitivation assez difficiles (cela explique la différence de notes entre les deux déroulements, je vous laisse deviner qui a fait la démarche dynamique)

21.7 Corrigé de l'énoncé 14

Solution

Voir Physique-SI 2003

21.8 Corrigé de l'énoncé 15

Solution

On considère que le nuage de poussière est fait de particules indépendantes entre elles. Cette hypothèse nous permettra de passer en mécanique du point, et d'appliquer nos connaissances sur les forces centrales.

Oublions donc un instant ce nuage, et concentrons-nous sur une particule de poussière de masse m . On suppose que cette particule provient de l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. On considère que l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est nulle à l'infini et on conclut que cette masse possède une énergie mécanique constante : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$.

E_m étant strictement positive, on conclut que la trajectoire est une hyperbole...ou plutôt une portion d'hyperbole dans le cas où la particule heurte la planète.

Dans ce problème, les paramètres qui sont fixés sont le rayon de l'astre noté R , sa masse notée M , et la vitesse initiale $\vec{v}_0$ commune à toutes les particules du nuage de poussière. Le paramètre qui diffère d'une particule à une autre est le paramètre d'impact b c'est la distance à l'infini entre une particule donnée et l'horizontale passant par le centre de l'astre. Selon la valeur de ce paramètre d'impact, deux situations peuvent se produire : déviation avec collision, ou déviation sans collision avec l'astre.

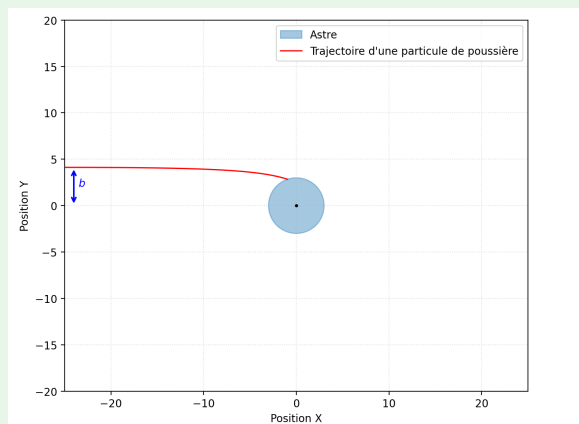


Figure 1: Déviation avec collision (b petit)

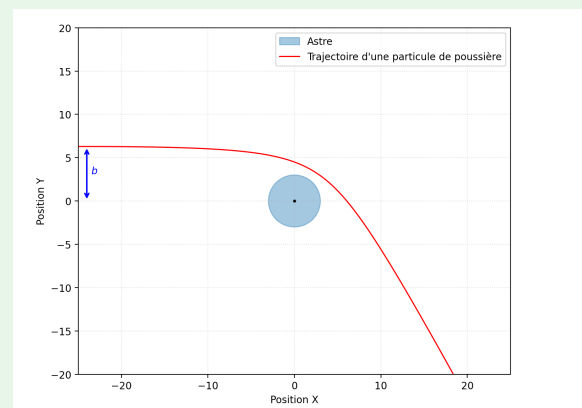


Figure 2: Déviation sans collision (b grand)

Le problème demande de calculer la masse de poussière déposée sur l'astre. On connaît la

masse volumique ρ , il suffit de déterminer le volume. Pour connaître le volume, il suffit de connaître la surface recouverte, on introduira ensuite une épaisseur e .

Le problème est désormais cerné: il faut déterminer la surface de l'astre recouverte par le nuage de poussière.

On suppose que le nuage de poussière est grand devant l'astre, ou plus précisément, que la surface de ce nuage est plus grande que celle de l'astre. Pourquoi cette hypothèse ? L'énoncé ne fixe aucune dimension du nuage, nous n'allons donc pas nous compliquer les choses. On suppose de plus que si jamais une particule entre en collision avec l'astre, alors elle reste collée en son point d'impact. Cette hypothèse nous permettra de déterminer la surface recouverte par le nuage de poussière. La figure suivante illustre ce procédé : chaque particule du nuage se meut selon la théorie des forces centrales. Les particules dont le paramètre d'impact est inférieur à une valeur limite entrent en collision avec l'astre, tandis que les autres poursuivent leur trajectoire hyperbolique. Les particules qui sont à la limite ont leurs trajectoires tangentes à l'astre.

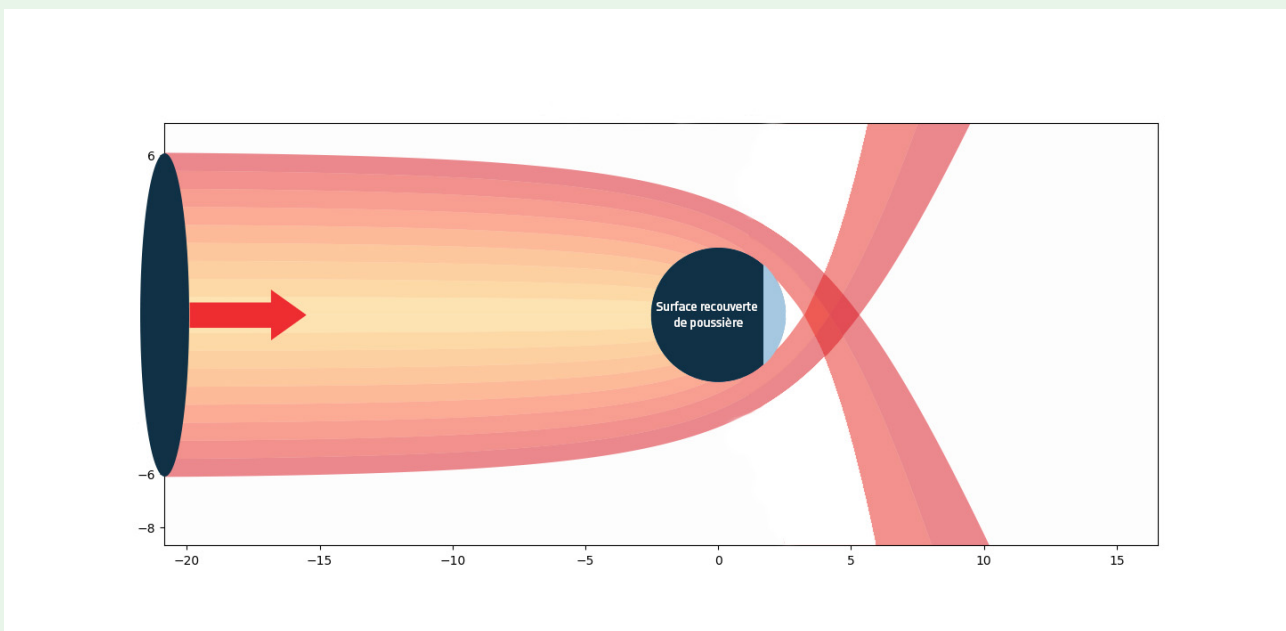


Figure 3: Trajectoires de toutes les particules constituant le nuage de poussière

Considérons donc une particule qui possède une trajectoire limite. Elle frôle l'astre en ayant une trajectoire tangente à ce dernier. Zoomons:

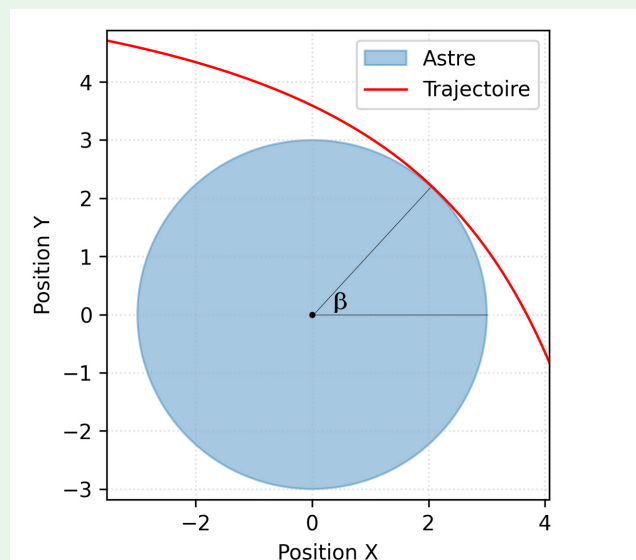


Figure 4: Zoom sur la trajectoire d'une particule frôlant l'astre

Connaître cet angle β nous permettrait de connaître la surface recouverte par la poussière par intégration.

Dans toute la suite, on considère le repère constitué par les deux axes de la figure précédente, et le système de coordonnées polaires associé à ce repère cartésien.

La distance par rapport au centre de l'astre en fonction de l'angle θ est donnée par :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (11)$$

avec

$$p = \frac{C^2}{GM}$$

Calcul du moment cinétique en fonction du paramètre d'impact

On considère une particule de masse m arrivant de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_0$ et un paramètre d'impact b .

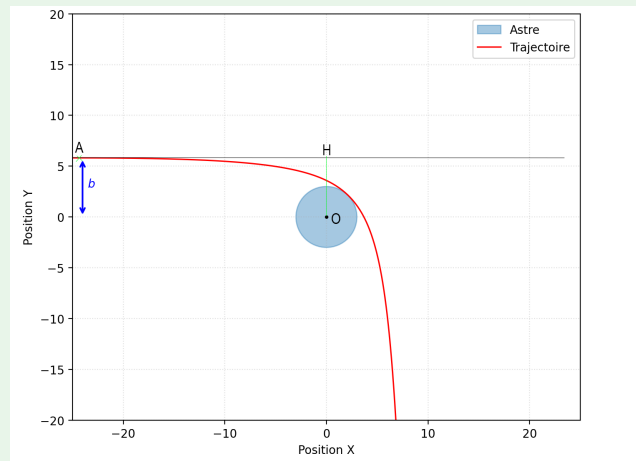


Figure 5: Paramétrage

Application de la relation de Chasles. Le vecteur position par rapport au centre de l'astre O s'écrit :

$$\vec{r} = \vec{OA} = \vec{OH} + \vec{HA},$$

où H est le projeté orthogonal de O sur la trajectoire rectiligne à l'infini.

Le moment cinétique de la particule est défini par :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}.$$

À l'infini, $\vec{v} = \vec{v}_0$, donc

$$\vec{\sigma} = (\vec{OH} + \vec{HA}) \wedge m\vec{v}_0 = m\vec{OH} \wedge \vec{v}_0 + m\vec{HA} \wedge \vec{v}_0 = m\vec{OH} \wedge \vec{v}_0 = mbv_0\vec{u}_z$$

Conclusion. On obtient ainsi :

$$C = bv_0.$$

On voit clairement que pour cette particule limite, la distance minimale qui la sépare du centre de l'astre est R . On sait aussi, d'après le cours, que le rayon en fonction de l'angle θ , est minimale quand $\theta = \theta_0$, selon la formule (11).

On conclut donc que l'angle β de la figure 4 n'est autre que θ_0 .
 Pour calculer θ_0 , on utilise la formule (11) qu'on réécrit sous la forme:

$$1 + e \cos(\theta - \theta_0) = \frac{p}{r(\theta)}$$

En faisant tendre $\theta \rightarrow \pi$, on obtient $1 - e \cos(\theta_0) = 0$, et donc finalement $\cos(\theta_0) = \frac{1}{e}$.
 D'après le cours :

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{|k|}{p} (e^2 - 1) \quad \text{avec} \quad k = G \cdot M \cdot m$$

on obtient donc

$$e^2 = 1 + \frac{2E_m p}{GMm}$$

Grâce aux formules précédentes, on trouve finalement

$$e^2 = 1 + \left(\frac{bv_0^2}{GM} \right)^2 \quad (12)$$

Déterminons maintenant l'expression de b en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
 Lorsque la distance r est minimale (et vaut ici R), $\dot{r} = 0$, et comme $C = r^2 \dot{\theta}$ on obtient donc:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{R^2} - \frac{GMm}{R}.$$

En particulier :

$$v_0^2 = \frac{(bv_0)^2}{R^2} - \frac{2GM}{R}.$$

D'où finalement :

$$b = R \sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}}$$

On injecte l'expression de b dans (12):

$$e^2 = 1 + \frac{R^2 v_0^4}{G^2 M^2} + \frac{2Rv_0^2}{GM} = \left(1 + \frac{Rv_0^2}{GM} \right)^2$$

D'où :

$$e = 1 + \frac{Rv_0^2}{GM}$$

Puis

$$\beta = \theta_0 = \arccos \left(\frac{GM}{GM + Rv_0^2} \right)$$

Enfin, on passe en coordonnées sphériques : l'axe des abscisses devient l'axe de révolution (z usuellement). On voit que la surface qu'on souhaite calculer est définie par:

$$\begin{cases} r = R \\ \theta \in [\theta_0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

On calcule ensuite la surface S :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
 &= 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \\
 &= 2\pi R^2 [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\pi} \\
 \text{d'où } S &= 2\pi R^2 (1 + \cos \theta_0)
 \end{aligned}$$

On demande une masse, on introduit une épaisseur e de la couche de poussière et on écrit:

$$m = \rho V = \rho e S$$

Donc finalement, en injectant l'expression de θ_0 dans S puis l'expression de S dans m :

$$m = 2\pi \rho e R^2 \left(\frac{2GM + Rv_0^2}{GM + Rv_0^2} \right)$$

21.9 Corrigé de l'énoncé 16

Solution

Conservation de la charge

Soient q_1 et q_2 les charges respectives des sphères S_1 et S_2 à l'équilibre. La charge totale injectée initialement est Q . Par conservation :

$$q_1 + q_2 = Q$$

Calcul des potentiels

Le potentiel à la surface de la sphère S_1 , considérée comme isolée, est :

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

La sphère S_2 et la face interne de la coque forment un condensateur sphérique. Par influence totale, une charge $-q_2$ est induite sur la paroi interne de la coque. Le potentiel de la sphère S_2 est alors :

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R} \right)$$

La condition d'équilibre $V_1 = V_2$ implique :

$$\frac{q_1}{r_1} = q_2 \frac{R - r_2}{r_2 R} \implies q_1 = q_2 \frac{r_1(R - r_2)}{r_2 R}$$

En substituant dans l'équation de conservation $q_1 + q_2 = Q$:

$$q_2 \left[\frac{r_1(R - r_2) + r_2 R}{r_2 R} \right] = Q$$

On obtient les expressions finales des charges :

- Charge sur la sphère S_2 :

$$q_2 = Q \frac{r_2 R}{r_1 R + r_2 R - r_1 r_2}$$

- Charge sur la sphère S_1 :

$$q_1 = Q \frac{r_1 (R - r_2)}{r_1 R + r_2 R - r_1 r_2}$$

Conclusion

La charge q_1 se répartit uniformément en surface de S_1 . La charge q_2 se répartit uniformément en surface de S_2 . Une charge $-q_2$ est présente sur la face interne de la coque. Le champ électrique est nul à l'intérieur de chaque conducteur.

22 Corrigé Physique X

22.1 Corrigé de l'énoncé 18

Solution

Analyse physique du problème

Nous sommes en présence d'un dispositif appelé **tensiomètre à goutte tournante**. Le système est composé d'une phase lourde (densité ρ_1) et d'une phase légère (densité ρ_2) mises en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe horizontal.

La dynamique de la goutte résulte d'une compétition entre deux effets :

- **La force centrifuge** (via la poussée d'Archimède généralisée) : La phase lourde est rejetée vers la périphérie du cylindre, ce qui force la phase légère (la goutte) à se concentrer sur l'axe de rotation. Pour minimiser l'énergie potentielle centrifuge, la goutte tend à s'allonger le long de l'axe (forme cylindrique).
- **La tension superficielle** (γ) : Elle tend à minimiser l'aire de l'interface liquide-liquide. À volume constant, elle favorise une forme sphérique, ici on peut s'attendre à ce que si ω très grand (par rapport à quelque chose qu'on ignore provisoirement) alors la goutte va être une espèce de ligne sur l'axe avec une petite épaisseur par exemple.

Modélisation et Résolution

Hypothèses

On suppose que la vitesse de rotation ω est suffisamment grande pour que :

1. La gravité g soit négligeable devant l'accélération centrifuge ($\omega^2 R \gg g$).
2. La goutte adopte une forme de **cylindre** de rayon R et de longueur L , aligné avec l'axe de rotation.
3. Les effets de bouts sont négligeables (approximation du cylindre infini, $L \gg R$).

Approche énergétique

Considérons le volume V de la goutte constant. La géométrie cylindrique impose :

$$V = \pi R^2 L \implies L = \frac{V}{\pi R^2}$$

L'énergie libre du système F est la somme de l'énergie de surface E_s et de l'énergie potentielle centrifuge E_c .

1. Énergie de surface (E_s)

$$E_s = \gamma \times S_{laterale} = \gamma(2\pi RL)$$

En utilisant la contrainte de volume :

$$E_s(R) = 2\pi\gamma R \left(\frac{V}{\pi R^2} \right) = \frac{2\gamma V}{R}$$

2. Énergie potentielle centrifuge (E_c)

L'énergie potentielle centrifuge effective correspond au travail nécessaire pour substituer le fluide lourd par le fluide léger au centre. Soit $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$. L'énergie potentielle associée au champ centrifuge est $e_p(r) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ par unité de masse. Le coût énergétique pour maintenir la goutte de rayon R sur l'axe est :

$$E_c = \int_{V_{goutte}} \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\omega^2 r^2 d\tau$$

L'intégration sur le volume cylindrique donne :

$$E_c = \frac{1}{2}\Delta\rho\omega^2 L \int_0^R r^2(2\pi r dr) = \pi L \Delta\rho\omega^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4}\pi L \Delta\rho\omega^2 R^4$$

En remplaçant L :

$$E_c(R) = \frac{1}{4}V \Delta\rho\omega^2 R^2$$

Équilibre

La configuration d'équilibre correspond au minimum de l'énergie totale $E_{tot}(R) = E_s(R) + E_c(R)$.

$$\begin{aligned} \frac{dE_{tot}}{dR} &= -\frac{2\gamma V}{R^2} + \frac{1}{2}V \Delta\rho\omega^2 R = 0 \\ \frac{2\gamma}{R^2} &= \frac{1}{2}\Delta\rho\omega^2 R \implies 4\gamma = \Delta\rho\omega^2 R^3 \end{aligned}$$

Conclusion

La tension interfaciale γ s'exprime selon la relation :

$$\gamma = \frac{1}{4}(\rho_1 - \rho_2)\omega^2 R^3$$

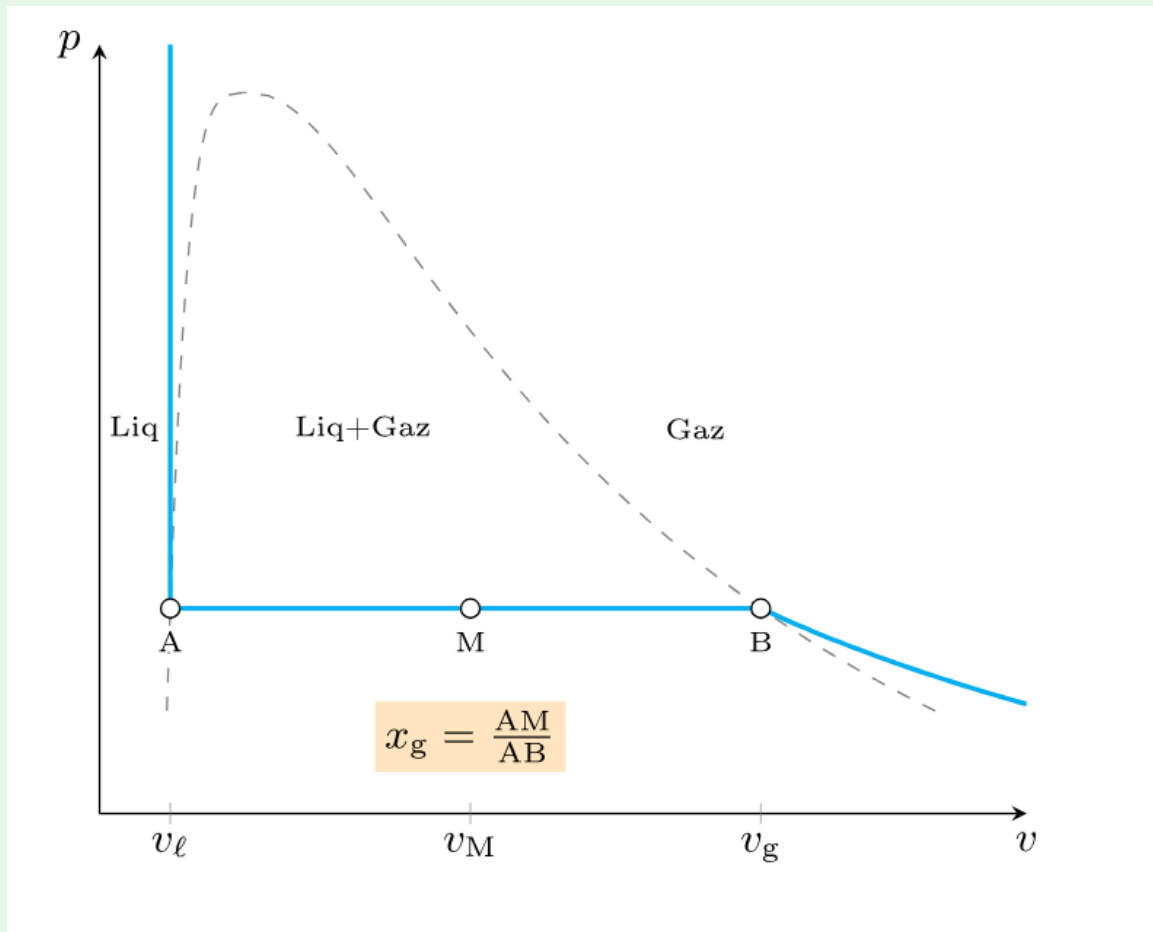
Méthode de mesure : Le dispositif permet de mesurer γ en imposant une vitesse de rotation ω connue et en mesurant optiquement le rayon R de la goutte allongée. Cette méthode est particulièrement efficace pour mesurer des tensions interfaciales très faibles (ultrabasses), courantes dans les émulsions ou la récupération assistée du pétrole.

22.2 Corrigé de l'énoncé 19

Solution

Exo 1 :

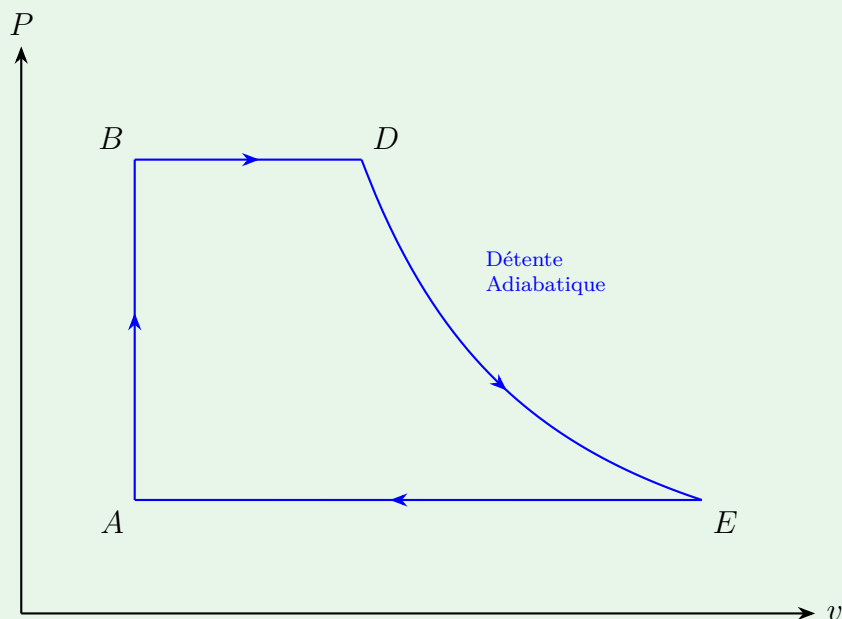
1/ Le diagramme de Clapeyron : c'est un diagramme (P, V) ou (P, v) avec v le volume massique. Il s'agit d'un outil fondamental en thermo pour visualiser les transformations d'un système.
 $\rightsquigarrow$ Exemple de diagramme:



2/ Sur un diagramme de Clapeyron, un profil en spirale correspond à un cycle moteur (dans le sens horaire) ou récepteur (dans le sens anti-horaire).

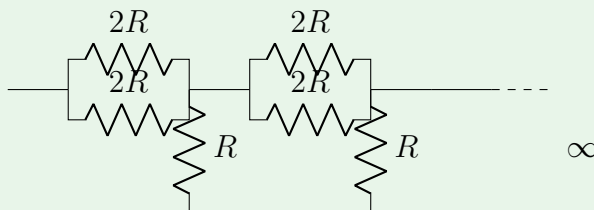
* Commentaire qualitatif : Une spirale indique que le système ne revient pas exactement au m^êm état après un cycle, ce qui se produit lors de phénomènes irréversibles ou transitoires. La spirale peut converger vers un cycle limite (régime permanent) ou diverger (instabilité). Dans le contexte de machines thermiques réelles, une spirale convergente est typique d'un système qui atteint progressivement son régime de fonctionnement stable après des perturbations initiales.

3/ Tracé du cycle :

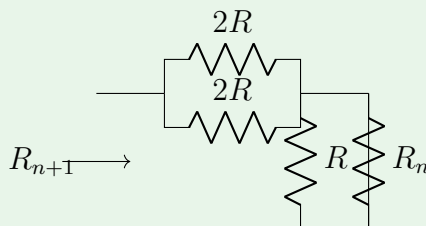


4/ Cette question ne présente pas de difficulté pour ceux qui maîtrisent bien le cours de machines thermiques . # On raisonne sur l'enthalpie du système !

Exo 2 :



Le circuit vérifie la relation de récurrence : # R_n la résistance équivalente de n cellules résistives consécutives



$$R_{n+1} = R_n // R + (2R // 2R) = \frac{R_n R}{R_n + R} + R$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{n+1}(R_n + R) = R_n R + R(R_n + R)} \quad \text{et on a } \forall n \geq 2$$

par finitude de la grandeur $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} "R_\infty"$ finie.

Ainsi, $R_\infty(R_\infty + R) = R_\infty R + R(R_\infty + R)$

$$\Rightarrow \boxed{R_\infty^2 - R R_\infty - R^2 = 0}$$

$$\Delta = 5R^2 \Rightarrow R_\infty \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}R, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R \right\}$$

$\Rightarrow$ Après élimination de la solution négative, $R_\infty = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R$

22.3 Corrigé de l'énoncé 20

Solution

Analyse du problème

Il s'agit de l'étude d'un système masse-ressort amorti par un **frottement sec** (loi de Coulomb). Ce problème se distingue de l'amortissement fluide visqueux par sa non-linéarité : la force de frottement conserve une norme constante en glissement mais change de sens discontinuellement à chaque inversion de vitesse.

Modélisation

1. Équations du mouvement

Déjà on va se contenter de traiter le cas $l_0 = 0$ vous vous doutez bien que les équations diff resteront les mêmes il faut juste faire des changements de variables de type $X := x - l_0 \dots$

Bilan des forces sur la masse m dans le référentiel terrestre galiléen :

- Poids $\vec{P}$ et réaction normale $\vec{N}$ se compensent verticalement ($N = mg$).
- Force de rappel du ressort : $\vec{F}_{el} = -kx\vec{e}_x$.
- Force de frottement solide (Lois de Coulomb) : $\vec{F}_{fr}$.

L'équation du mouvement (PFD projeté sur x) s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = F_{fr}$$

En phase de glissement ($\dot{x} \neq 0$), la force de frottement s'oppose à la vitesse : $F_{fr} = -fmg \operatorname{sgn}(\dot{x})$. Posons la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et la grandeur caractéristique δ (longueur d'adhérence) :

$$\delta = \frac{fmg}{k}$$

L'équation différentielle devient une équation affine par morceaux :

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x \pm \delta) = 0 \quad \begin{cases} +\delta & \text{si } \dot{x} < 0 \text{ (mouvement vers la gauche)} \\ -\delta & \text{si } \dot{x} > 0 \text{ (mouvement vers la droite)} \end{cases}$$

Résolution temporelle

Supposons la condition initiale $x(0) = x_0 > \delta$ (sinon le solide reste bloqué par l'adhérence). La vitesse initiale est nulle, le solide démarre vers la gauche ($\dot{x} < 0$).

Phase 1 : Première demi-période

L'équation est $\ddot{x} + \omega_0^2(x - \delta) = 0$. C'est un oscillateur harmonique centré en $+\delta$. Avec les conditions initiales, la solution est :

$$x(t) = (x_0 - \delta) \cos(\omega_0 t) + \delta \quad \text{pour } t \in [0, \pi/\omega_0]$$

Le mouvement s'arrête instantanément à $t_1 = \pi/\omega_0$. La position atteinte est :

$$x_1 = x(t_1) = -(x_0 - \delta) + \delta = 2\delta - x_0$$

Phase 2 : Retour éventuel

Le mouvement reprend vers la droite uniquement si la force de rappel surmonte l'adhérence statique, soit $|x_1| > \delta$. Si le mouvement reprend, l'équation devient $\ddot{x} + \omega_0^2(x + \delta) = 0$ (centre en $-\delta$). L'amplitude diminue de nouveau de 2δ durant cette phase. $x_2 = x_0 - 4\delta$

Conclusion et Résultats

1. Décroissance de l'amplitude

Contrairement à l'amortissement fluide (décroissance exponentielle), l'amplitude des oscillations décroît selon une **suite arithmétique**. L'amplitude perd 2δ à chaque demi-période (soit 4δ par période).

2. Arrêt du système

Le solide finit par s'arrêter définitivement à une position x_{fin} lorsque l'énergie potentielle élastique résiduelle ne suffit plus à vaincre le frottement statique. La position finale appartient à l'intervalle d'adhérence :

$$x_{fin} \in \left[-\frac{fmg}{k}, +\frac{fmg}{k} \right]$$

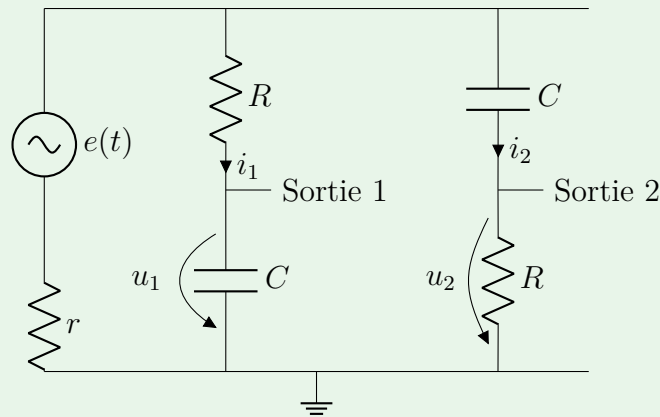
Soit :

$$|x_{fin}| \leq +\delta$$

22.4 Corrigé de l'énoncé 21

Solution

1. Schéma du circuit



2. Démonstration

Soit U la tension complexe aux bornes de l'ensemble des deux branches (après la chute de tension dans r). Les deux branches sont soumises à la même tension U .

Branche 1 (Diviseur de tension) :

$$\underline{U}_1 = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \cdot \underline{U} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \cdot \underline{U} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot \underline{U}$$

Branche 2 (Diviseur de tension inversé) :

$$\underline{U}_2 = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} \cdot \underline{U} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} \cdot \underline{U} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \cdot \underline{U}$$

Condition de Quadrature (Déphasage)

Calculons le rapport des tensions complexes :

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = jRC\omega$$

L'argument de ce rapport est l'argument de j (purement imaginaire positif), soit $+\frac{\pi}{2}$.

$$\arg(\underline{U}_2) - \arg(\underline{U}_1) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : Les deux tensions sont toujours en quadrature, quelles que soient les valeurs de R , C ou ω .

Condition d'Isométrie (Même amplitude)

Pour que les amplitudes soient égales, il faut que le module du rapport soit égal à 1 :

$$\left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = |jRC\omega| = RC\omega$$

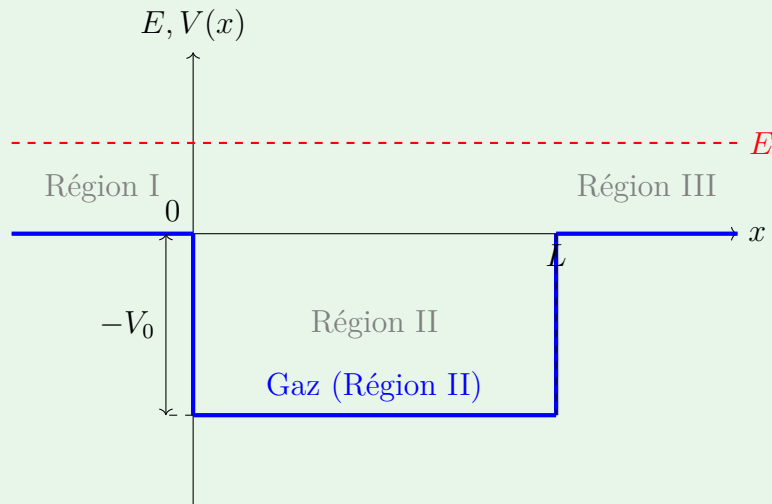
Pour avoir $|\underline{U}_1| = |\underline{U}_2|$, il faut choisir R et C tels que :

$$\boxed{RC\omega = 1} \quad \text{soit} \quad RC = \frac{1}{2\pi f}$$

22.5 Corrigé de l'énoncé 22

Solution

Modélisation et Résolution



Définition des régions

L'axe x représente la direction de propagation du faisceau. Le potentiel $V(x)$ est défini par trois régions :

- **Région I** ($x < 0$) : Vide avant le gaz, $V(x) = 0$.
- **Région II** ($0 \leq x \leq L$) : Volume gazeux, $V(x) = -V_0$.
- **Région III** ($x > L$) : Vide après le gaz, $V(x) = 0$.

Fonctions d'onde et Vecteurs d'onde

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0$$

Les solutions dans chaque région sont des ondes planes :

1. **Région I** : Vecteur d'onde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

$$\psi_I(x) = e^{ikx} + re^{-ikx}$$

(Onde incidente normalisée à 1 + onde réfléchie d'amplitude r).

2. **Région II** : L'énergie cinétique est $E + V_0$. Vecteur d'onde $q = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$.

$$\psi_{II}(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx}$$

3. **Région III** : Retour au potentiel nul, vecteur d'onde k .

$$\psi_{III}(x) = te^{ikx}$$

(Onde transmise uniquement, d'amplitude t).

Le coefficient de transmission (la probabilité qu'un électron traverse le gaz) est défini par le rapport des flux de probabilité transmis et incidents. Comme les potentiels en I et III sont identiques :

$$T = |t|^2$$

Conditions de Continuité

La fonction d'onde $\psi(x)$ et sa dérivée $\psi'(x)$ doivent être continues aux interfaces $x = 0$ et $x = L$.

Interface $x = 0$

$$\text{Continuité de } \psi : 1 + r = A + B \quad (13)$$

$$\text{Continuité de } \psi' : ik(1 - r) = iq(A - B) \implies 1 - r = \frac{q}{k}(A - B) \quad (14)$$

En additionnant on élimine r :

$$2 = A \left(1 + \frac{q}{k}\right) + B \left(1 - \frac{q}{k}\right)$$

Interface $x = L$

$$\text{Continuité de } \psi : Ae^{iqL} + Be^{-iqL} = te^{ikL} \quad (15)$$

$$\text{Continuité de } \psi' : iq(Ae^{iqL} - Be^{-iqL}) = ikte^{ikL} \quad (16)$$

Nous cherchons à exprimer A et B en fonction de t . Multiplions par iq et additionnons/-soustrayons :

- Pour A :

$$iq(Ae^{iqL} + Be^{-iqL}) + iq(Ae^{iqL} - Be^{-iqL}) = iqte^{ikL} + ikte^{ikL}$$

$$2iqAe^{iqL} = te^{ikL}(iq + ik) \implies A = \frac{t}{2}e^{ikL}e^{-iqL} \left(1 + \frac{k}{q}\right)$$

- Pour B :

$$iq(Ae^{iqL} + Be^{-iqL}) - iq(Ae^{iqL} - Be^{-iqL}) = iqte^{ikL} - ikte^{ikL}$$

$$2iqBe^{-iqL} = te^{ikL}(iq - ik) \implies B = \frac{t}{2}e^{ikL}e^{iqL} \left(1 - \frac{k}{q}\right)$$

Expression du Coefficient de Transmission

Injectons les expressions de A et B :

$$2 = \frac{t}{2} e^{ikL} \left[e^{-iqL} \left(1 + \frac{k}{q} \right) \left(1 + \frac{q}{k} \right) + e^{iqL} \left(1 - \frac{k}{q} \right) \left(1 - \frac{q}{k} \right) \right]$$

En développant les parenthèses :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{k}{q} \right) \left(1 + \frac{q}{k} \right) &= 1 + \frac{q}{k} + \frac{k}{q} + 1 = 2 + \frac{k^2 + q^2}{kq} \\ \left(1 - \frac{k}{q} \right) \left(1 - \frac{q}{k} \right) &= 1 - \frac{q}{k} - \frac{k}{q} + 1 = 2 - \frac{k^2 + q^2}{kq} \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\frac{4e^{-ikL}}{t} = e^{-iqL} \left(2 + \frac{k^2 + q^2}{kq} \right) + e^{iqL} \left(2 - \frac{k^2 + q^2}{kq} \right)$$

En regroupant les termes exponentiels (e^{iqL} et e^{-iqL}) pour former des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \frac{4e^{-ikL}}{t} &= 2(e^{-iqL} + e^{iqL}) + \frac{k^2 + q^2}{kq}(e^{-iqL} - e^{iqL}) \\ \frac{4e^{-ikL}}{t} &= 4\cos(qL) - 2i\frac{k^2 + q^2}{kq}\sin(qL) \end{aligned}$$

En divisant par 4 :

$$\frac{e^{-ikL}}{t} = \cos(qL) - \frac{i}{2} \frac{k^2 + q^2}{kq} \sin(qL)$$

Calculons maintenant $T = |t|^2 = \frac{1}{|1/t|^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \left| \cos(qL) - \frac{i}{2} \frac{k^2 + q^2}{kq} \sin(qL) \right|^2 \\ \frac{1}{T} &= \cos^2(qL) + \frac{1}{4} \left(\frac{k^2 + q^2}{kq} \right)^2 \sin^2(qL) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$\frac{1}{T} = 1 + \left[\frac{(k^2 + q^2)^2}{4k^2q^2} - 1 \right] \sin^2(qL) = 1 + \frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2q^2} \sin^2(qL)$$

D'où l'expression exacte du coefficient de transmission :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2q^2} \sin^2(qL)}$$

Discussion : Indépendance de l'énergie

L'expression exacte montre que T dépend a priori de V_0 (via q). Cependant, considérons l'hypothèse physique du faisceau incident :

Hypothèse : L'énergie cinétique du faisceau est très grande devant l'interaction avec le gaz ($E \gg V_0$).

Dans ce cas, $q^2 \approx k^2$ car :

$$q^2 - k^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

Le terme pré-facteur du sinus carré devient :

$$\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2q^2} = \frac{(2mV_0/\hbar^2)^2}{4 \cdot \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} = \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)}$$

Lorsque $E \gg V_0$, ce terme tend vers 0. Par conséquent :

$$T \xrightarrow{E \gg V_0} \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Conclusion : Dans la limite des hautes énergies, le coefficient de transmission est égal à 1. La totalité du flux d'électrons émerge du volume gazeux, indépendamment de la profondeur du puits V_0 .

Note importante : L'oral est 90% calculatoire, ce même calcul est dans le livre tout-en-un de physique et il faut au moins l'avoir vu une fois pour ne pas être découragé par la complexité de la résolution, à la fin de l'oral j'étais parvenu à peut près à l'expression je dis donc qu'il faudrait nécessairement faire un DL de $\frac{V_0}{E}$, n'hésitez pas même quand l'exercice est assez mathématique d'émettre des hypothèses physique, c'est un oral de physique après tout.

22.6 Corrigé de l'énoncé 23

Solution

Soit un photon d'énergie initiale E_l et de quantité de mouvement initiale $\vec{p}_l$ et de longueur d'onde initiale λ_l se dirigeant vers le cristal dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}$. on a $E_a = hf_l$ et d'après la relation de Broglie $\vec{p}_a = \frac{h}{\lambda_l} \vec{u}$ et enfin $c = \lambda_l f_l$.

De même on admet l'existence d'une particule appelé phonon caractérisant l'onde acoustique, d'énergie E_a et de quantité de mouvement $\vec{p}_a$ suivant $\vec{e}_y$ et de longueur d'onde λ_a , on de nouveau

$$E_a = hf_a \text{ et } \vec{p}_a = \frac{h}{\lambda_a} \vec{e}_y \text{ et } v_a = \lambda_a f_a.$$

le photon vient percuter le phonon et change par conséquent la direction. On considère donc le système S constitué initialement par le photon et le phonon, ce système ne contient à l'état final que le photon (le phonon disparaît) avec une énergie $E'_l = hf'_l$ et une longueur d'onde λ'_l et une quantité de mouvement $\vec{p}'_l = \frac{h}{\lambda'_l} \vec{v}$ avec $\vec{v}$ un vecteur unitaire. l'angle D est donc l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le système S est isolé donc son énergie et sa quantité de mouvement se conservent

$$hf_l + hf_a = hf'_l$$

$$\frac{h}{\lambda_l} \vec{u} + \frac{h}{\lambda_a} \vec{e}_y = \frac{h}{\lambda'_l} \vec{v}$$

$$f_l + f_a = f'_l$$

$$\frac{1}{\lambda_l} \vec{u} + \frac{1}{\lambda_a} \vec{e}_y = \frac{1}{\lambda'_l} \vec{v}$$

Or $c = \lambda_l f_l = \lambda'_l f'_l$ et $v_a = \lambda_a f_a$. Donc :

$$\frac{f_l}{c} \vec{u} + \frac{f_a}{v_a} \vec{e}_y = \frac{f'_l}{c} \vec{v} = \frac{f_l + f_a}{c} \vec{v}$$

$$\frac{f_a}{v_a} \vec{e}_y = \frac{f_l + f_a}{c} \vec{v} - \frac{f_l}{c} \vec{u}$$

En prenant le carré de cette égalité vectorielle :

$$\left(\frac{f_a}{v_a} \right)^2 = \left(\frac{f_l + f_a}{c} \right)^2 + \left(\frac{f_l}{c} \right)^2 - 2 \frac{f_l(f_l + f_a)}{c^2} \cos(D)$$

où $D = (\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle de déviation.

$$\frac{f_a^2}{v_a^2} = \frac{(f_l + f_a)^2 + f_l^2 - 2f_l(f_l + f_a) \cos(D)}{c^2}$$

Donc

$$\cos(D) = \frac{(f_l + f_a)^2 + f_l^2 - \left(\frac{cf_a}{v_a}\right)^2}{2f_l(f_l + f_a)}$$

En utilisant ses ordres de grandeur :

$$f_l \sim 10^{14} \text{ Hz}, f_a \sim 10^3 \text{ Hz}, v_a \sim 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{On trouve } (f_l + f_a)^2 + f_l^2 - \left(\frac{cf_a}{v_a}\right)^2 \approx 2f_l^2 - \left(\frac{cf_a}{v_a}\right)^2$$

$$\text{et } 2f_l(f_l + f_a) \approx 2f_l^2$$

$$\text{donc } \cos(D) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{cf_a}{v_a f_l}\right)^2$$

En réutilisant les ordres de grandeur on trouve que ce cosinus est proche de 1, donc par l'approximation des petits angles on a :

$$D = \frac{cf_a}{f_l v_l}$$

22.7 Corrigé de l'énoncé 24

Solution

Effet Hall classique et quantification du champ magnétique

On considère une plaque conductrice de dimensions $L \times l \times a$, soumise à un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z.$$

Un courant stationnaire I circule suivant l'axe x . Les porteurs de charge sont des électrons de charge $-e$ et de densité volumique n_e .

Mise en évidence du champ de Hall

La densité volumique de courant est donnée par :

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_d,$$

où $\vec{v}_d = v_x \vec{e}_x$ désigne la vitesse moyenne de dérive des électrons.

Chaque électron est soumis à la force électrique et à la force magnétique de Lorentz. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}.$$

En régime stationnaire, l'accélération moyenne transverse est nulle. En projetant l'équation précédente suivant l'axe y , on obtient :

$$-eE_y - e(\vec{v}_d \times \vec{B})_y = 0.$$

En utilisant :

$$\vec{v}_d = v_x \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 \vec{e}_z,$$

il vient :

$$\vec{v}_d \times \vec{B} = -v_x B_0 \vec{e}_y.$$

On en déduit l'existence d'un champ électrique transverse, appelé *champ de Hall* :

$$E_y = v_x B_0.$$

Commentaire physique : Ce champ résulte de l'accumulation de charges sur les bords latéraux de la plaque sous l'effet de la force magnétique. Il s'oppose exactement à la déviation magnétique, assurant l'équilibre transverse.

Différence de potentiel de Hall

La différence de potentiel entre les deux faces latérales de la plaque vaut :

$$\Delta V = V(y=l) - V(y=0) = - \int_0^l E_y dy.$$

Le champ étant uniforme, on obtient :

$$\Delta V = -E_y l = -v_x B_0 l.$$

La densité de courant peut également s'écrire :

$$j = \frac{I}{al} = n_e e v_x,$$

d'où :

$$v_x = \frac{I}{n_e e a l}.$$

On en déduit :

$$\Delta V = -\frac{B_0}{n_e e a} I.$$

La tension de Hall s'écrit donc sous la forme :

$$\boxed{\Delta V = R_H I}, \quad \boxed{R_H = -\frac{B_0}{n_e e a}}.$$

Commentaire : Le signe de R_H permet d'identifier la nature des porteurs de charge. Pour des électrons, la constante de Hall est négative.

Quantification du champ magnétique à basse température

Lorsque le champ magnétique est intense et la température suffisamment faible, les effets quantiques deviennent dominants. Le mouvement des électrons dans le plan transverse est alors circulaire.

La force de Lorentz joue le rôle de force centripète :

$$evB_0 = \frac{mv^2}{r}.$$

Le rayon de la trajectoire est donc :

$$\boxed{r = \frac{mv}{eB_0}}.$$

Dans le cadre du modèle de Bohr, le moment cinétique orbital est quantifié :

$$L = mvr = n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En combinant avec l'expression précédente du rayon, on obtient :

$$\frac{m^2 v^2}{eB_0} = n\hbar.$$

Il vient alors :

$$\boxed{B_0 = \frac{m^2 v^2}{en\hbar}}.$$

Interprétation physique : Cette relation montre que, lorsque le mouvement orbital est quantifié, le champ magnétique ne peut prendre que certaines valeurs discrètes. Ce raisonnement semi-classique préfigure l'apparition des niveaux de Landau et constitue une première approche conceptuelle de l'effet Hall quantique.

Conclusion

L'effet Hall classique résulte de l'équilibre entre la force électrique transverse et la force magnétique de Lorentz. À basse température et champ intense, la quantification du mouvement cyclotron conduit naturellement à une description quantifiée du système, annonçant les phénomènes de transport quantique observés expérimentalement.

22.8 Corrigé de l'énoncé 25

Solution

Retrouver la distance Terre-Lune (Loi de Kepler)

La 3^{ème} loi de Kepler s'écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_t^2 T^2}{4\pi^2}}$$

avec $T=28$ jours

$$a \approx \sqrt[3]{5,57 \times 10^{25}} \approx 3,83 \times 10^8 \text{ m}$$

Note : On pouvait aussi (et ce serait bien mieux) connaître cette valeur et la donner à l'oral directement. J'ai opté de suivre ce que j'ai fait pendant l'oral pour m'en sortir même en ne connaissant pas cette valeur directement.

Pouvoir de résolution de l'œil

Le **pouvoir de résolution** (ou pouvoir séparateur) de l'œil est l'angle minimal ε sous lequel deux points distincts doivent être vus pour être perçus comme séparés par l'œil humain.

- En dessous de cet angle, les deux points sont confondus en une seule tache.
- Pour un œil emmétrope (normal), cet angle est d'environ **1 minute d'arc**.

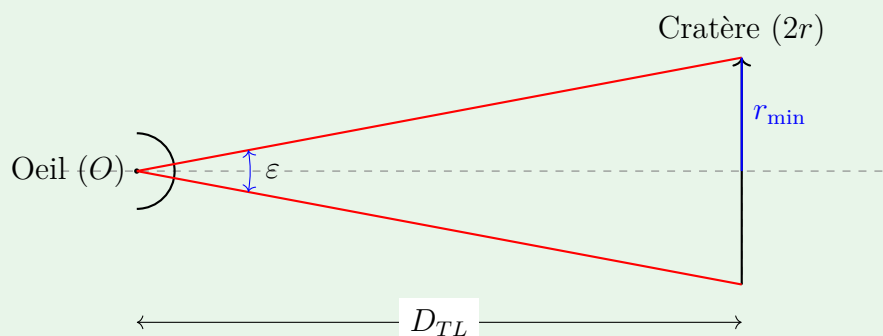
Valeur usuelle en radians :

$$\varepsilon \approx 1' = \frac{1}{60}^\circ \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Rayon minimal d'un cratère visible

On cherche le rayon $r_{\min}$. Le diamètre du cratère est $d = 2r_{\min}$. Pour que le cratère soit visible, il faut que son diamètre apparent α soit supérieur ou égal au pouvoir de résolution ε .

Schéma de la situation



Calcul

Dans le triangle rectangle formé par l'axe optique, le rayon r et la distance D , on a :

$$\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{r_{\min}}{D_{TL}}$$

Comme l'angle ε est très petit, on approxime $\tan(\theta) \approx \theta$ (en radians) :

$$\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{r_{\min}}{D_{TL}} \implies \varepsilon \approx \frac{2r_{\min}}{D_{TL}}$$

D'où l'expression du rayon minimal :

$$r_{\min} = \frac{\varepsilon \cdot D_{TL}}{2}$$

Application numérique :

$$r_{\min} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \times 384\,400}{2} \approx 57,6 \text{ km}$$

On peut distinguer des cratères d'environ 115 km de diamètre (comme le cratère Ptolémée ou Copernic limite).

Observation d'un cratère plus petit

On veut observer un cratère de rayon $r = \frac{r_{\min}}{5}$. À l'œil nu, ce cratère est vu sous un angle :

$$\alpha_{obj} = \frac{\varepsilon}{5}$$

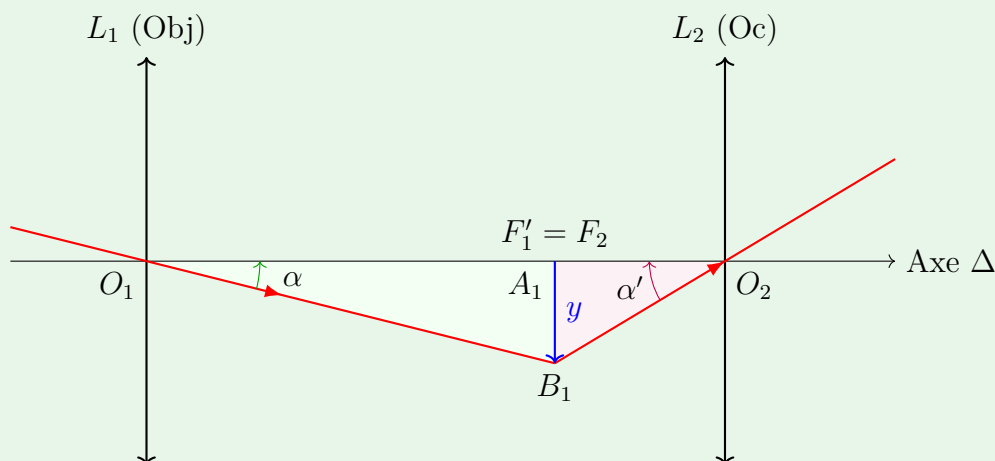
Cet angle est 5 fois trop petit pour être résolu par l'œil. Il nous faut donc un instrument qui multiplie l'angle incident par (au moins) 5.

Instrument proposé : Une **Lunette Astronomique** (système afocal). Elle est constituée :

1. D'un objectif convergent de grande distance focale f'_1 .
2. D'un oculaire convergent de petite distance focale f'_2 .

Schéma du grossissement (Système Afocal)

Le schéma ci-dessous met en évidence la relation entre l'angle d'entrée α et l'angle de sortie α' .



Calcul du Grossissement

D'après le schéma, on utilise les approximations des petits angles ($\tan \theta \approx \theta$) dans les triangles rectangles formés par l'image intermédiaire A_1B_1 de hauteur y :

1. **Triangle objectif** ($O_1A_1B_1$) : L'image intermédiaire se forme au foyer image F'_1 .

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F'_1} = \frac{y}{f'_1}$$

2. **Triangle oculaire** ($O_2A_1B_1$) : L'objet pour l'oculaire est en F_2 , l'image finale est à l'infini.

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2} = \frac{y}{f'_2}$$

Le grossissement G est le rapport de l'angle de sortie sur l'angle d'entrée :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y/f'_2}{y/f'_1} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

Condition de résolution

Nous voulons voir un objet dont la taille angulaire naturelle est $\varepsilon/5$ sous un angle au moins égal à ε .

$$\alpha' \geq \varepsilon \implies G \cdot \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \geq \varepsilon$$

$$G \geq 5$$

Il faut donc choisir une lunette dont la focale de l'objectif est au moins **5 fois plus grande** que la focale de l'oculaire.

$$\boxed{\frac{f'_1}{f'_2} \geq 5}$$

22.9 Corrigé de l'énoncé 26

Solution

Analyse du problème

Le but est d'étudier le comportement d'un pendule simple dans un environnement en apesanteur (impesanteur) où une **gravité artificielle** est générée par la rotation du vaisseau. Il s'agit d'un problème de dynamique en référentiel non galiléen tournant.

Modélisation

Définissons les repères et les paramètres :

- **Référentiel $\mathcal{R}$ (Galiléen)** : Lié aux étoiles fixes.
- **Référentiel $\mathcal{R}'$ (Vaisseau)** : En rotation uniforme de vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour d'un axe fixe.

- **Géométrie** : Le pendule est attaché en un point A fixe dans $\mathcal{R}'$, situé à une distance R de l'axe de rotation.
- **Pendule** : Masse m , longueur l , repérée par l'angle θ par rapport à la direction radiale $\vec{OA}$ (le "bas" local).

Bilan des actions mécaniques dans $\mathcal{R}'$

La masse m est soumise à :

1. La tension du fil $\vec{T}$.
2. Le poids réel $\vec{P} = m\vec{g}_{vrai} \approx \vec{0}$ (condition d'apesanteur).
3. La **Force d'Inertie d'Entraînement** (Force centrifuge) :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 H \vec{M}$$

où H est le projeté de la masse sur l'axe de rotation.

4. La Force d'Inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$. (Nulle à l'équilibre).

Analogie avec la pesanteur

Si l'on considère le pendule au repos ($\vec{v} = \vec{0}$), la seule force de volume est la force centrifuge. Au point d'attache A , l'accélération centrifuge est :

$$\vec{g}_{art} = \omega^2 R \vec{e}_r$$

Cette accélération joue le rôle d'un champ de pesanteur local, dirigé vers l'extérieur du cercle de rotation ("le bas"). Pour que cette pesanteur artificielle soit équivalente à la pesanteur terrestre ($g_0 \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2}$), il faut calibrer la rotation telle que :

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

Étude des oscillations (Approche Énergétique)

Vérifions que le pendule oscille bien comme sur Terre. Exprimons l'énergie potentielle centrifuge E_p . La force dérive d'un potentiel effectif :

$$\vec{F}_{ie} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) \implies E_p(r) = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Soit r la distance de la masse à l'axe de rotation. D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle formé par le centre de rotation, le point A et la masse M :

$$r^2 = R^2 + l^2 + 2Rl \cos \theta$$

L'énergie potentielle devient (à une constante près) :

$$E_p(\theta) = -m\omega^2 Rl \cos \theta$$

On retrouve exactement la forme de l'énergie potentielle de pesanteur standard $E_p = -mg_{eff}l \cos \theta$ avec $g_{eff} = \omega^2 R$.

Équation du mouvement

Pour de petites oscillations ($\theta \ll 1$), le système est conservatif.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(m\omega^2 Rl)\theta^2 = \text{Cte}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$ml^2\ddot{\theta} + m\omega^2 Rl\theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \left(\frac{\omega^2 R}{l}\right)\theta = 0$$

Conclusion

Le dispositif se comporte exactement comme un pendule simple classique. La période des oscillations permet de mesurer la pesanteur artificielle locale :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{art}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\omega^2 R}}$$

Discussion Bien que l'analogie soit parfaite au premier ordre, deux effets perturbateurs distinguent ce système de la gravité réelle :

1. **L'effet Coriolis** : Dès que la masse bouge, $\vec{F}_{ic}$ induit une déviation latérale absente dans un champ de gravité statique uniforme.
2. **Le gradient de gravité** : Le champ $\omega^2 r$ varie linéairement avec la distance. Si le pendule est très long ($l \sim R$), la gravité n'est pas uniforme sur le système, introduisant des effets de marée significatifs.

Ce n'est pas que de la théorie

Dans 2001, l'odyssée de l'espace, la célèbre Space Station V tourne sur elle-même. Avec son diamètre de 300 mètres et effectuant une rotation en 61 secondes, la force centrifuge produite est équivalente à la force de gravitation rencontrée sur la Lune. Pour une force de gravitation similaire à celle sur Terre, elle aurait dû tourner plus vite, à environ un tour en 20 secondes, mais cela montre que c'est un mécanisme utilisable en pratique.

Extra

Cette exercice est un peu moins dur que le niveau des X-ENS normal il est donc attendu que l'on pose rapidement les équations et qu'on émette pas mal de commentaires physiques, même après l'avoir résolu en entier on peut ne pas finir avec une bonne note dans ces cas il est conseillé de montrer sa culture physique et de donner comme on a fait dans notre discussion les limitations de notre modèle qui sont généralement bien vues.

22.10 Corrigé de l'énoncé 27

Solution

1. Probabilité de l'état d'énergie E

Soit n le nombre d'atomes ayant migré d'un site du réseau vers un interstice. L'énergie du système est donnée par :

$$E_n = E_0 + n\varepsilon_0$$

Pour déterminer la probabilité $P(E_n)$ dans l'ensemble canonique, nous devons calculer la dégénérescence $\omega(n)$ du niveau d'énergie E_n . Il s'agit d'un problème de combinatoire pour particules indiscernables sur des sites fixes.

- Nombre de façons de choisir n sites vacants parmi N : $\binom{N}{n}$.
- Nombre de façons de placer ces n atomes dans N' interstices : $\binom{N'}{n}$.

Le nombre de micro-états est donc :

$$\omega(n) = \binom{N}{n} \binom{N'}{n}$$

La probabilité d'avoir n défauts (et donc l'énergie E_n) est :

$$P(n) = \frac{1}{Z} \binom{N}{n} \binom{N'}{n} e^{-\beta(E_0 + n\varepsilon_0)}$$

2. Énergie la plus probable

Nous sommes en physique pas la peine de faire des développements asymptotiques proprement. L'énergie la plus probable correspond au nombre de défauts n^* qui maximise la probabilité $P(n)$. Pour $N, N' \gg 1$, on maximise $\ln P(n)$ en utilisant l'approximation de Stirling ($\ln x! \approx x \ln x - x$).

$$\ln P(n) \approx \text{Cste} + \ln \binom{N}{n} + \ln \binom{N'}{n} - \beta n \varepsilon_0$$

À l'équilibre ($d(\ln P)/dn = 0$) :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{N-n}{n} \right) + \ln \left(\frac{N'-n}{n} \right) - \beta \varepsilon_0 &= 0 \\ \implies \frac{(N-n)(N'-n)}{n^2} &= e^{\beta \varepsilon_0} \end{aligned}$$

En supposant une faible concentration de défauts ($n \ll N$ et $n \ll N'$), on obtient :

$$\frac{NN'}{n^2} \approx e^{\beta \varepsilon_0} \implies n^* \approx \sqrt{NN'} e^{-\frac{\varepsilon_0}{2k_B T}}$$

L'énergie la plus probable est $E_{prob} = E_0 + n^* \varepsilon_0$.

3. Énergie moyenne

Dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), les fluctuations relatives de l'énergie sont de l'ordre de $1/\sqrt{N}$. La distribution de probabilité est extrêmement piquée autour de son maximum (pic de Dirac ou Gaussienne très étroite). Par conséquent, l'énergie moyenne se confond avec l'énergie la plus probable :

$$\langle E \rangle \approx E_{prob} = E_0 + \varepsilon_0 \sqrt{NN'} e^{-\frac{\varepsilon_0}{2k_B T}}$$

22.11 Corrigé de l'énoncé 28

Solution

Quelques définitions

Le **plan de l'écliptique** désigne le plan géométrique contenant l'orbite de la Terre autour du Soleil. C'est également, par extension, le plan dans lequel le Soleil semble se déplacer pour un observateur terrestre au cours d'une année.

L'**unité astronomique** (notée ua) correspond à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil :

$$1 \text{ ua} \approx 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$$

L'**année-lumière** (notée al) est une unité de distance définie comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année julienne (soit 365,25 jours). En utilisant la vitesse de la lumière $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$, on obtient :

$$1 \text{ al} = c \times (365,25 \times 24 \times 3600) \approx 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$$

La **seconde d'arc** (notée $1''$ ou arcsec) est une unité de mesure d'angle. Elle est définie comme la soixantième partie d'une minute d'arc, elle-même étant la soixantième partie d'un degré. On a donc la relation suivante :

$$1'' = \frac{1}{60} \text{ minute d'arc} = \frac{1}{3600} \text{ degré}$$

En radians, cette unité est extrêmement petite, ce qui justifie l'approximation $\tan(\theta) \approx \theta$ utilisée pour le calcul du parsec :

$$1'' = \frac{\pi}{180 \times 3600} \approx 4,85 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Question 1 : Définition et calcul du Parsec

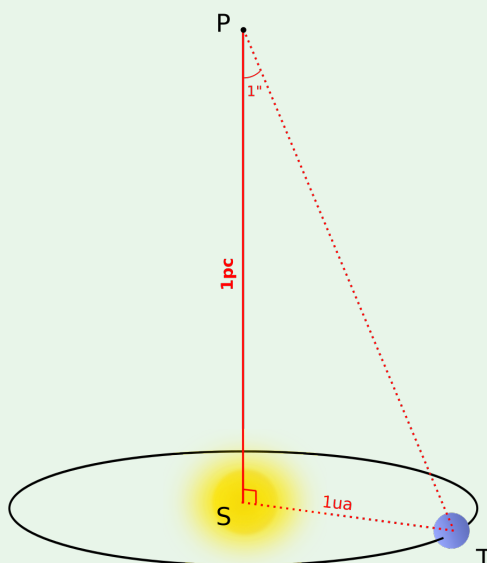


Figure 6: Géométrie de la parallaxe annuelle définissant le parsec.

D'après la définition qu'on nous donne, du point de vue de la terre (qui fait un tour complet autour du soleil en une année), l'astre de référence semble avoir complété un tour dont la moitié de l'angle d'ouverture vaut 1 seconde d'arc. C'est strictement équivalent à dire que du point de vue de l'astre de référence, la terre décrit en une année un cercle dont la moitié de l'angle d'ouverture vaut 1 seconde d'arc (cf. Fig 1).

Dans le triangle rectangle formé par le Soleil, la Terre et l'astre observé, on a la relation :

$$d = \frac{1 \text{ ua}}{\tan(1'')} \approx \frac{1 \text{ ua}}{1''} \quad (\text{car l'angle est très faible})$$

Sachant qu'une seconde d'arc vaut $\frac{1}{3600}$ degré, soit $\frac{\pi}{648000}$ radians :

- **En mètres :** $1 \text{ pc} = \frac{1,496 \times 10^{11}}{\pi/648000} \approx 3,086 \times 10^{16} \text{ m.}$
- **En années-lumière :** $\frac{3,086 \times 10^{16}}{9,46 \times 10^{15}} \approx 3,26 \text{ al.}$

Question 2

On cherche un ordre de grandeur de l'âge de l'univers, qu'on note T_u . on écrit grossièrement:

$$T_u = \frac{D}{V} = \frac{D}{HD} = \frac{1}{H} = \frac{10^6 \times 3,086 \times 10^{13} \text{ km. années}}{70 \times 24 \times 3600 \times 365 \times \text{km}} = 13,97 \times 10^9 \text{ années}$$

L'âge de l'univers étant estimé à environ $13,80 \times 10^9$ années, la valeur trouvée est une bonne approximation.

Question 3

Pour déterminer la vitesse de l'étoile au moment précis où nous l'observons, nous devons modéliser l'évolution de sa distance $D(t)$ par rapport au temps.

1. Mise en équation différentielle

Par définition, la vitesse de récession $V(t)$ est la dérivée de la distance par rapport au temps. En utilisant la **loi de Hubble**, nous pouvons établir la relation suivante :

$$V(t) = \frac{dD(t)}{dt} = H \cdot D(t)$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$\frac{dD(t)}{dt} - H \cdot D(t) = 0$$

2. Résolution de l'équation

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode de **séparation des variables** :

$$\frac{dD}{D} = H dt$$

En intégrant des deux côtés :

$$\int \frac{1}{D} dD = \int H dt \implies \ln(D(t)) = H \cdot t + C$$

En passant à l'exponentielle, nous obtenons la solution générale (où D_0 est la distance initiale à $t = 0$) :

$$D(t) = D_0 \cdot e^{Ht}$$

3. Application aux conditions d'observation

Définissons les instants clés :

- t_e : instant de l'émission du signal (quand la lumière quitte l'étoile).
- t_{obs} : instant de l'observation (aujourd'hui).

À l'instant t_e , la distance mesurée est d et la vitesse est v . La solution s'ajuste donc ainsi :

$$D(t) = d \cdot e^{H(t-t_e)}$$

4. Vitesse finale à l'instant t_{obs}

La vitesse au moment précis de l'observation est donnée par $V(t_{obs}) = H \cdot D(t_{obs})$. En substituant l'expression de la distance trouvée précédemment :

$$V(t_{obs}) = H \cdot d \cdot e^{H(t_{obs}-t_e)}$$

Sachant que la vitesse à l'émission est $v = H \cdot d$ et que la durée du trajet de la lumière est $\Delta t = t_{obs} - t_e = \frac{d}{c}$, nous obtenons le résultat final :

$$V_{obs} = v \cdot e^{H\Delta t} = v \cdot e^{\frac{H \cdot d}{c}}$$

22.12 Corrigé de l'énoncé 29

Solution

Exercice 1

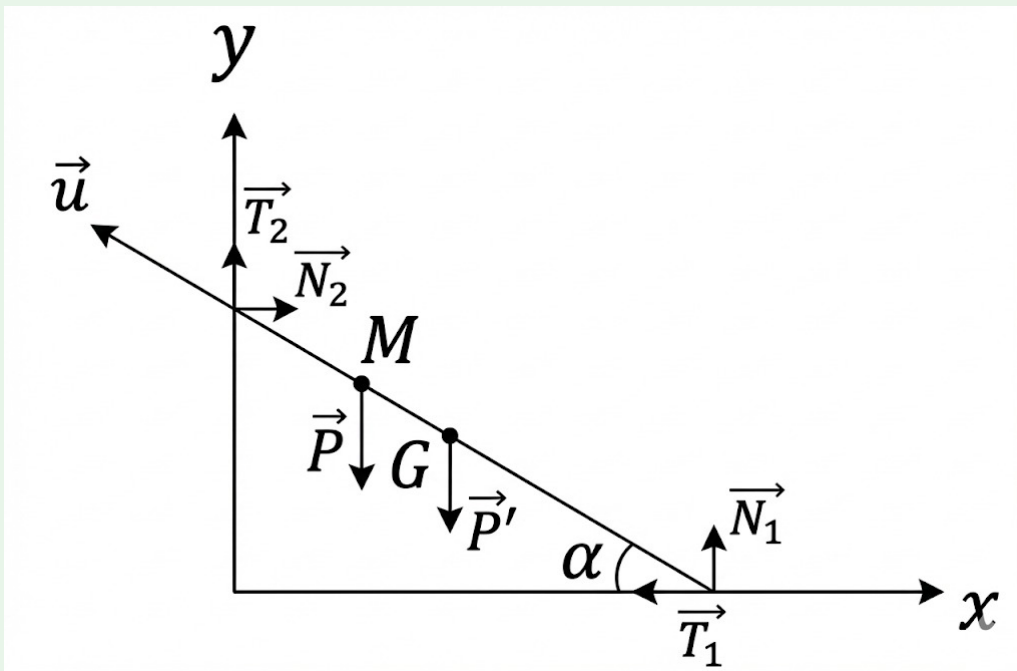
Soit α l'angle que fait l'échelle avec le sol, donc $\alpha = 60^\circ$.

Soit G le barycentre de l'échelle. Soit m la masse de l'homme, m' celle de l'échelle.

Soit x l'abscisse de l'homme sur l'axe de l'échelle ($G, \vec{u}$) et M le point qui le représente.

Soit α l'angle que fait l'échelle avec le sol, donc $\alpha = 60^\circ$.

On travaille à l'instant où commence le glissement.



P.F.D sur {homme + échelle} :

L'échelle est immobile, on considère que l'homme monte avec une vitesse constante, ainsi l'accélération du système est nulle,

$$\text{donc } (m + m')\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{P}' + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2$$

On suppose que le glissement se fait après avoir gravi la moitié de l'échelle, ceci nous permet de connaître les sens de $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ au glissement, et on vérifiera à la fin que x est bien positif.

Les lois de Coulomb permettent d'écrire :

$$\vec{T}_1 = -T_1\vec{u}_x \text{ et } \vec{T}_2 = T_2\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \begin{cases} T_1 = fN_1 \\ T_2 = fN_2 \end{cases} \quad \text{avec } T_1, T_2, N_1, N_2 > 0.$$

Les projections du P.F.D sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ donnent :

$$\begin{cases} -(m + m')g + T_2 + N_1 = 0 \\ T_1 = N_2 \end{cases}$$

Ainsi on a $T_2 = fN_2 = fT_1 = f^2N_1$

et $(m + m')g = (f^2 + 1)N_1$

d'où

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(m+m')g}{f^2+1} \\ N_2 = T_1 = fN_1 = \frac{f}{f^2+1}(m+m')g \\ T_2 = fN_2 = \frac{f^2}{f^2+1}(m+m')g \end{cases}$$

T.M.C barycentrique scalaire en G par rapport à l'axe $(G, \vec{u}_z)$:

$$N_1 \times \frac{L}{2} \cos \alpha - T_1 \frac{L}{2} \sin \alpha - T_2 \frac{L}{2} \cos \alpha - N_2 \frac{L}{2} \sin \alpha + mgx \cos \alpha = 0$$

$$mgx \cos \alpha = \frac{L}{2}(T_1 \sin \alpha + T_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha)$$

$$mgx = \frac{(m+m')gL}{2(f^2+1)}(f \tan \alpha + f^2 + f \tan \alpha - 1)$$

$$x = \frac{(m+m')L}{2m(f^2+1)}(f^2 + 2f \tan \alpha - 1)$$

A.N : $x \approx 1,3 \text{ m}$

On constate que $x > 0$, ce qui valide la supposition que le glissement se passe après avoir gravi la moitié de l'échelle.

donc la réponse à la question initiale est :

l'homme peut monter $\frac{L}{2} + x = 1,5 \text{ m} + 1,3 \text{ m} = 2,8 \text{ m}$ avant que l'échelle ne glisse.

Exercice 2

Lorsque la masse chute, elle entraîne la rotation du cylindre et des charges, ce qui crée une densité surfacique de courant :

$$J_s = \sigma R \omega$$

Le théorème d'Ampère donne $B = \mu_0 J_s$ (approximation du solénoïde infini).

On applique le Théorème de l'énergie mécanique au système $\{\text{cylindre} + \text{masse}\}$ entre le début et la fin de la chute.

- $E_{m_i} = E_{p_i}$ car $E_{c_i} = E_{mag_i} = 0$
- $E_{m_f} = E_{c_f} + E_{p_f} + E_{mag,f}$

L'énergie cinétique mécanique finale est :

$$E_{c_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}J\omega_f^2 = \frac{(J + mR^2)}{2}\omega_f^2$$

L'énergie potentielle finale est : $E_{pf} = E_{pi} - mgh$

L'énergie magnétique stockée dans le volume $V = \pi R^2 L$ est :

$$E_{mag,f} = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{(\mu_0 \sigma R \omega_f)^2}{2\mu_0} \times \pi R^2 L = \frac{1}{2} (\mu_0 \pi \sigma^2 R^4 L) \omega_f^2$$

En posant le moment d'inertie magnétique $J' = \mu_0 \pi \sigma^2 R^4 L$, la conservation de l'énergie ($E_{mf} = E_{mi}$) donne :

$$\frac{(J + mR^2 + J')}{2} \omega_f^2 = mgh$$

D'où l'expression finale de la vitesse angulaire :

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2mgh}{J + mR^2 + J'}}$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} J \omega_f^2 = \frac{1}{2} m (R \omega_f)^2 + \frac{1}{2} J \omega_f^2 = \frac{J + mR^2}{2} \omega_f^2$$

Calcul de la durée de la chute

Maintenant qu'on a la fonction qui à une distance de chute x associe la vitesse de rotation $\omega(x)$ correspondante, pour déterminer la durée de la chute t , on utilise la relation entre la vitesse angulaire et la distance parcourue x . On sait que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ et que $x = R\theta$, d'où $dx = R d\theta$. On peut alors isoler dt :

$$dt = \frac{dx}{R\omega(x)}$$

En utilisant l'expression de $\omega(x)$ issue de la conservation de l'énergie :

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{2mgx}{J + J' + mR^2}}$$

La durée totale de la chute est donnée par l'intégrale :

$$t = \int_0^h \frac{dx}{R \sqrt{\frac{2mgx}{J + J' + mR^2}}} = \frac{\sqrt{J + J' + mR^2}}{R \sqrt{2mg}} \int_0^h x^{-1/2} dx$$

$$t = \frac{\sqrt{J + J' + mR^2}}{R \sqrt{2mg}} \cdot 2\sqrt{h} = \sqrt{\frac{2h(J + J' + mR^2)}{mgR^2}}$$

22.13 Corrigé de l'énoncé 30

Solution

Introduction

Il est étonnant de rencontrer un exercice portant sur les miroirs sphériques alors que ce thème ne figure pas au programme de la filière MP. L'exercice en soit n'est pas difficile, bien au

contraire, si jamais on connaît les formules de conjugaison, c'est du gâteau: il ne reste qu'à remplacer.

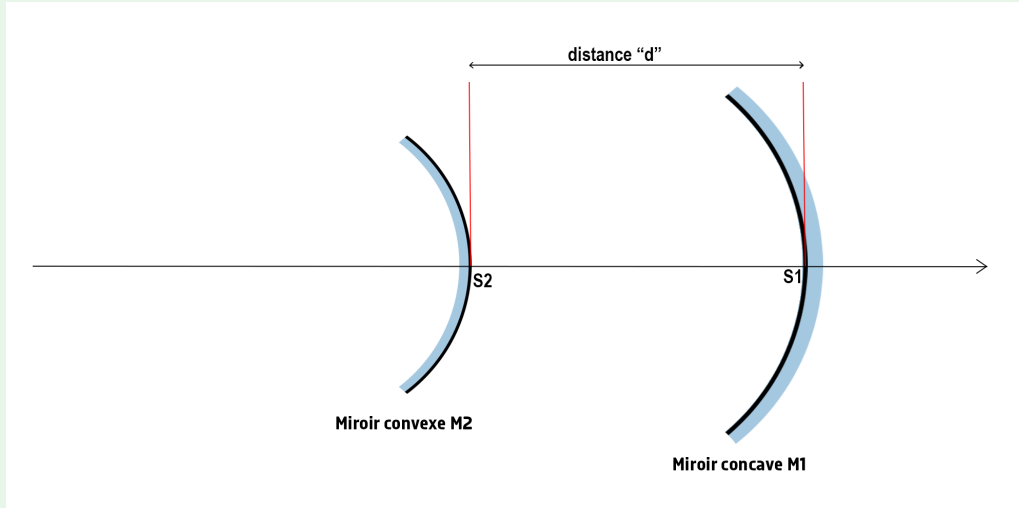
Si vous êtes confronté à un exercice faisant appel à des notions hors programme et que vous ne maîtrisez pas les formules nécessaires, n'hésitez pas à le signaler poliment à l'examinateur. Il serait regrettable de se pénaliser dans une telle situation, d'autant plus que cela arrive réellement. Un candidat a déjà obtenu la possibilité de repasser une épreuve orale de physique après avoir signalé au bureau du concours qu'un exercice reposait sur des notions hors programme et ne pouvait être résolu sans celles-ci.

Analyse du problème

Le dispositif étudié, dont le schéma de principe est présenté en figure cassegrain, est un système centré composé de deux miroirs sphériques. Cette configuration, typique d'un télescope de Cassegrain, comprend :

- **Miroir primaire (M_1)** : Un miroir concave de grande dimension, caractérisé par sa distance focale f_1 .
- **Miroir secondaire (M_2)** : Un miroir convexe plus petit, de distance focale f_2 , placé face au miroir primaire.

L'objectif est de déterminer la distance d séparant les sommets des deux miroirs pour qu'un objet situé à l'infini donne une image finale convergeant exactement sur la surface du miroir concave.



Formation des images

Première réflexion sur M_1

L'objet étant à l'infini, les rayons arrivent parallèles à l'axe optique. Le miroir primaire M_1 en donne une image intermédiaire A' située à son foyer principal F_1 . La distance au sommet S_1 est :

$$S_1A' = f_1$$

Seconde réflexion sur M_2

L'image A' sert d'objet pour le miroir secondaire M_2 . Notons d la distance S_1S_2 entre les deux sommets.

- **Position de l'objet (p)** : L'objet pour M_2 est situé à une distance $p = -(f_1 - d)$. (appliquer Chasles, le sens positif est vers la droite)
- **Position de l'image (p')** : L'image finale A'' doit se former sur S_1 . Sa distance par rapport au sommet S_2 est donc $p' = d$.

Mise en équation et résolution

En utilisant la formule de conjugaison pour le miroir M_2 avec origine au sommet, et en considérant f_2 comme la valeur algébrique de la distance focale du miroir convexe ($f_2 < 0$ dans cette configuration, ainsi que f_1) :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f_{M2}} \implies \frac{1}{d} - \frac{1}{f_1 - d} = -\frac{1}{f_2}$$

En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{(f_1 - d) - d}{d(f_1 - d)} = -\frac{1}{f_2} \implies \frac{f_1 - 2d}{f_1d - d^2} = -\frac{1}{f_2}$$

On aboutit à l'équation du second degré suivante en d :

$$d^2 + (2f_2 - f_1)d - f_1f_2 = 0$$

Résultat final

La distance d recherchée est la solution positive de cette équation :

$$d = \frac{(f_1 - 2f_2) + \sqrt{f_1^2 + 4f_2^2}}{2}$$

22.14 Corrigé de l'énoncé 31

Solution

Analyse physique

Le système est constitué de deux tiges mobiles couplées mécaniquement par un ressort et électriquement par le circuit conducteur qu'elles forment. L'énoncé suggère que le mouvement devient sinusoïdal sur une longue durée.

- Si la résistance électrique R était non nulle, l'énergie mécanique serait dissipée par effet Joule ($P = Ri^2$), conduisant à l'arrêt des oscillations relatives.
- L'existence d'un régime sinusoïdal permanent impose donc de considérer le circuit comme **supraconducteur** ($R = 0$) et il est clairement attendu que le candidat prenne l'initiative

pour le dire, et de prendre en compte son **auto-induction** L

Modélisation

Soient x_1 et x_2 les positions des deux tiges sur l'axe (Ox) . Notons a la distance entre les rails. On définit la variable d'écartement relatif par rapport à la longueur à vide l_0 :

$$u(t) = x_2(t) - x_1(t) - l_0$$

1. Équation électrique (Conservation du flux)

Le flux magnétique Φ à travers la boucle est la somme du flux extérieur et du flux propre :

$$\Phi(t) = B_0 \cdot S(t) + L \cdot i(t) = B_0 a(l_0 + u(t)) + Li(t)$$

La loi de Faraday dans un circuit sans résistance : $e = -d\Phi/dt = Ri = 0$ car $R = 0$, implique la conservation du flux magnétique ($\Phi = \text{cte}$). Si on considère l'état initial au repos ($u = 0, i = 0$), la constante vaut $B_0 a l_0$.

$$B_0 a(l_0 + u) + Li = B_0 a l_0 \implies Li = -B_0 a u$$

$$i(t) = -\frac{B_0 a}{L} u(t)$$

Le courant induit est proportionnel à l'allongement et de signe opposé : l'induction crée une force de rappel magnétique.

2. Équations mécaniques

Bilan des forces sur chaque tige (de masse m) :

- Force de rappel du ressort : $\vec{F}_{el} = \pm k u \vec{e}_x$ (suivant la tige à gauche $-$ ou celle de droite $+$)
- Force de Laplace : $\vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Pour la tige 2, $d\vec{l} = a \vec{e}_y$ (si circuit orienté trigonométriquement), donc $\vec{F}_{L2} = i a B_0 \vec{e}_x$.

PFD appliqué aux tiges :

$$m\ddot{x}_1 = +ku - iaB_0 \tag{17}$$

$$m\ddot{x}_2 = -ku + iaB_0 \tag{18}$$

Résolution

On combine les équations pour obtenir le mouvement relatif $\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$:

$$m\ddot{u} = m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -2ku + 2iaB_0$$

En injectant l'expression du courant :

$$m\ddot{u} = -2ku + 2aB_0 \left(-\frac{B_0 a}{L} u \right)$$

$$m\ddot{u} + 2\left(k + \frac{B_0^2 a^2}{L}\right)u = 0$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique libre :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{m} \left(k + \frac{B_0^2 a^2}{L}\right)}$$

Discussion

Mouvement : Sur une durée longue, les deux tiges oscillent sinusoïdalement en opposition de phase l'une par rapport à l'autre, avec une pulsation ω augmentée par l'effet magnétique. Le centre de masse du système conserve une vitesse constante.

Énergie : Le système est conservatif. Il y a conversion réversible entre trois formes d'énergie :

1. Énergie cinétique mécanique : $E_c = m\dot{u}^2$ (dans le référentiel barycentrique).
2. Énergie potentielle élastique : $E_{el} = \frac{1}{2}ku^2$.
3. Énergie magnétique : $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{B_0 a}{L}u\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B_0^2 a^2}{L}\right)u^2$.

L'induction ajoute un terme d'énergie potentielle quadratique en u , ce qui équivaut à "raidir" le ressort d'une constante $k_{mag} = B_0^2 a^2 / L$.

Extra :

Cet oral est très classique, je l'ai au moins croisé 3 fois, dans le td en colle et en préparation pour le concours dans des problèmes, quand vous arriver sur un tel jackpot il faut foncer. Si vous arrivez au dernier point de la résolution à l'oral, il est conseillé de commencer à "valider" vos calcul en disant ce qui se passe si B_0 est grand a grand et de le vérifier qualitativement, par exemple il est trivial que si le champs $B_0 = 0$ il faut que l'effet de tous ce qui est magnétique disparaisse ce qui est bien le cas. Cela sert à deux choses, montrer que vous avez un esprit physique, en plus de se rassurer soit même que vous n'avez pas fait d'erreurs de calcul, que de bonne choses pour diffuser le stress dans l'oral.

22.15 Corrigé de l'énoncé 32

Solution

Introduction Avoir une intuition quant à la forme que va prendre le film aidera certainement à la résolution de cet exercice. Cette année la tension superficielle fut le sujet de plusieurs exercices et sujets d'ADS. Bien sûr, aucune connaissance sur la théorie n'est exigible, mais avoir quelques connaissances de l'ordre qualitatif vous donnera un avantage certain.

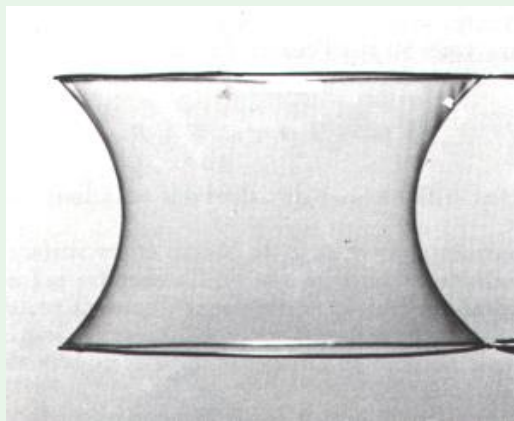


Figure 7: Film de savon entre deux anneaux

Dans toute la suite du problème, on néglige le poids du film savonneux. La justification quantitative nécessite de faire appel à la théorie de la tension superficielle (notion HP en MP), on s'attend donc à ce que l'examineur pousse le candidat à adopter cette hypothèse si jamais ce dernier ne prend pas cette initiative.

Analyse du problème On voit clairement qu'il y a invariance par rotation autour de l'axe vertical. On considère un plan contenant cet axe et on le munit d'un repère approprié :

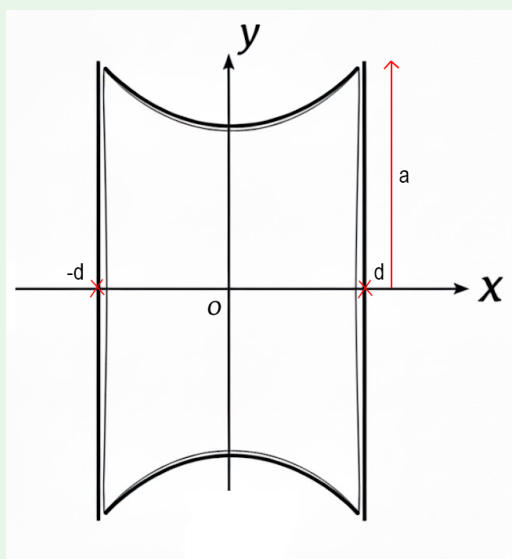


Figure 8: Figure 2D

Analogie avec la chaînette La courbe supérieure nous rappelle la forme que prend une chaînette de masse linéique constante suspendue entre deux points de même altitude. Il s'agit d'un exercice instructif (bizarrement jamais trouvé dans un TD), vous trouverez une explication <https://youtu.be/Y2Zo89aaZFI?si=r99SIXAwaSbIeaKp>.

Surface et énergie L'énergie étant proportionnelle à la surface du film, on note γ le coefficient de proportionnalité et S la surface du film. On a donc :

$$E = \gamma S$$

Tout système physique cherche à minimiser son énergie au repos, le système cherche donc à avoir la surface S la plus petite possible.

Intéressons-nous à la formule de la surface Considérons la courbe $y(x)$ décrivant le profil du film. Un élément infinitésimal de longueur dl le long de cette courbe est donné par :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Lors de la rotation autour de l'axe (Ox) , cet élément engendre une surface élémentaire dS correspondant à un ruban de périmètre $2\pi y(x)$. On a alors :

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

En notant $2d$ la distance séparant les deux spires, la surface totale S est obtenue par intégration entre les deux anneaux placés en $x = -d$ et $x = d$:

$$S = \int_{-d}^d 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Minimiser la surface revient donc à minimiser cette intégrale.

Retour sur l'exercice de la chaînette Pour une chaînette de masse linéique λ (en kg.m^{-1}) suspendue entre deux points, l'équilibre est atteint lorsque son énergie potentielle de pesanteur E_p est minimale. Si l'on note $y(x)$ la hauteur de la corde à l'abscisse x , l'énergie potentielle d'un petit élément de corde dl s'écrit $dE_p = dm \cdot g \cdot y = (\lambda dl)gy$. L'énergie potentielle totale est alors :

$$E_p = \int \lambda g y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

On constate que, les constantes λ et g mises à part, la fonctionnelle à minimiser est rigoureusement identique à celle de la surface du film de savon ($S = \int 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$). Cette similitude mathématique explique pourquoi le profil du film de savon est, lui aussi, une chaînette (courbe en cosinus hyperbolique).

Ansï voit-on que S et E_p sont proportionnelles. De plus, minimiser E_p revient à trouver la fonction y dont $E_p(y)$ est minimale, c'est-à-dire trouver le profil de la chaînette à l'équilibre mécanique. D'après la vidéo jointe plus haut, on trouve que le profil minimisant E_p est :

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x}{C}\right) \quad \text{où } C \text{ est un paramètre du système.}$$

Pour trouver la constante C , on écrit $y(x = d) = a$ et on obtient une équation qui permet de conclure (résolution numérique requise).

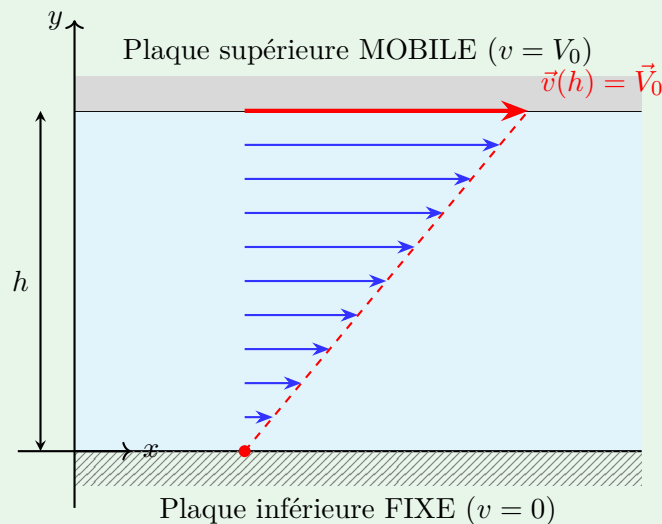
Quelques bonus :

Calcul de la distance critique La condition de raccordement $\frac{a}{d} = \frac{\cosh u}{u}$ (avec $u = d/C$) n'admet de solution que si le rapport a/d est supérieur au minimum de la fonction $f(u) = \frac{\cosh u}{u}$. Ce minimum est atteint pour u_c tel que $\tanh u_c = 1/u_c$, soit $u_c \approx 1,20$. On en déduit que la demi-distance maximale est $d_c = \frac{a}{f(u_c)} \approx 0,663 a$. Au-delà d'une distance totale $2d \approx 1,325 a$, la surface minimale n'existe plus et le film se rompt.

Autre méthode de résolution Il est possible de résoudre cet exercice en utilisant la formule de Laplace qui relie la différence de pression de part et d'autre d'une surface courbée. Elle est cependant HP et il est nécessaire de connaître les formules des rayons de courbure transversaux et longitudinaux pour utiliser cette méthode.

22.16 Corrigé de l'énoncé 33

Solution



1. Modélisation et hypothèses

- L'écoulement est laminaire et stationnaire selon l'axe (Ox) i.e le fluide à l'altitude y se déplace de $v(y)$: $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$.
- **Condition de non-glissement** : Le fluide "colle" aux parois.
 - En $y = 0$ (paroi fixe) : $v(0) = 0$.
 - En $y = h$ (paroi mobile) : $v(h) = V_0$.

Isolons une tranche de fluide (système fermé) de surface S et d'épaisseur dy , située à l'altitude y . Le fluide étant visqueux, les couches exercent des forces entre elles. On veut trouver la force tangentielle entre deux couches.

2. À la physicienne (dédicace Mr.chabchi)

On va essayer de chercher la loi qui régit les interactions entre deux couches.

Il est déjà clair que la surface va entrer en jeu. La force exercée doit être proportionnelle à la surface (suivant $\vec{e}_x$) : plus celle-ci est grande, plus la force nécessaire pour déplacer les couches est grande.

Ainsi, la force tangentielle est proportionnelle à la surface :

$$T \propto S$$

Ensuite, plus la variation de vitesse est brusque, plus la force exercée entre deux couches est grande. C'est logique : si cette variation est infinie, alors on s'attend à ce que la force exercée soit infinie aussi.

D'où la dépendance au gradient de vitesse :

$$T \propto \frac{dv}{dy}$$

De ces deux résultats, on en déduit la loi de Newton pour la viscosité :

$$T = \eta S \frac{dv}{dy}$$

où η est une constante de proportionnalité dite **viscosité dynamique**.

3. Méthode du mathématicien (théorie cinétique)

La viscosité résulte d'un transfert de quantité de mouvement par agitation thermique entre des couches de vitesses différentes.

Soit un gaz de densité particulaire n , de masse m et de vitesse thermique u^* . On considère une surface S à l'altitude y . Les molécules traversant cette surface proviennent en moyenne d'une distance ℓ (libre parcours moyen).

- Les molécules venant du haut ($y + \ell$) transportent une quantité de mouvement : $p_{\downarrow} \approx mv(y + \ell)$.
- Les molécules venant du bas ($y - \ell$) transportent : $p_{\uparrow} \approx mv(y - \ell)$.

La force tangentielle par unité de surface τ correspond au flux net de quantité de mouvement transféré à travers S :

$$\tau = \Phi_{part} \times (p_{\downarrow} - p_{\uparrow})$$

Avec un flux surfacique de particules $\Phi_{part} \approx \frac{1}{6}nu^*$, $\frac{1}{6}$ pour les 6 directions, $\pm x, \pm y, \pm z$.

$$\tau = \frac{1}{6}nu^*m[v(y + \ell) - v(y - \ell)]$$

En effectuant un développement limité au premier ordre ($v(y \pm \ell) \approx v(y) \pm \ell \frac{dv}{dy}$) :

$$\tau \approx \frac{1}{6}nu^*m \left(2\ell \frac{dv}{dy} \right) = \frac{1}{3}nmu^*\ell \frac{dv}{dy}$$

On identifie la loi de Newton $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$ avec l'expression de la viscosité dynamique du gaz :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3}\rho u^*\ell}$$

(avec $\rho = nm$ la masse volumique), une expression que vous avez certainement croisée en sup dans la thermo, ou dans le classique des chutes libres d'une bille dans un liquide avec frottement visqueux.

$T = S\tau = \eta S \cdot \frac{dv}{dy}$ est la force recherchée.

4. Application du PFD sur une particule fluide

Bilan des forces sur la tranche selon l'axe (Ox) :

- Force exercée par la couche du dessous (en y) : Freine la tranche $\rightarrow -T(y)$.
- Force exercée par la couche du dessus (en $y + dy$) : Entraîne la tranche $\rightarrow +T(y + dy)$.

Le fluide est en régime stationnaire, son accélération est nulle ($\vec{a} = \vec{0}$). Le Principe Fondamental de la Dynamique donne :

$$\sum F_x = 0 \implies T(y + dy) - T(y) = 0$$

Cela implique que la contrainte de cisaillement $T(y)$ est **constante** dans toute l'épaisseur du fluide.

3. Profil de vitesse et Force

Puisque $T = \eta S \frac{dv}{dy} = \text{Cste}$ et que la viscosité η et la surface S sont constantes, alors le gradient de vitesse $\frac{dv}{dy}$ est constant.

$$\frac{dv}{dy} = A \implies v(y) = Ay + B$$

Le profil de vitesse est donc **linéaire** (une droite). Pour respecter les conditions aux limites (0 en bas, V_0 en haut), la pente est nécessairement :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{V_0 - 0}{h} = \frac{V_0}{h}$$

La force exercée par la plaque mobile sur la couche d'air supérieure est donc :

$$F = \eta S \frac{V_0}{h}$$

22.17 Corrigé de l'énoncé 34

Solution

Considérons une montagne modélisée par un prisme droit de hauteur H , de largeur transversale W et de longueur à la base L .

- **Surface de contact (Base)** : $S = L \times W$.
- **Volume du prisme** :

$$V = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{2}(L \times W) \times H = \frac{1}{2}SH$$

- **Masse** :

$$M = \rho V = \frac{1}{2}\rho SH$$

Le prisme glisse sur une distance inconnue d . La force normale est le poids $N = Mg$. Le travail W_{meca} dissipé par la force de frottement ($F = \mu N$) sur la distance d est :

$$W_{meca} = F \cdot d = \mu(Mg) \cdot d$$

En remplaçant la masse M :

$$W_{meca} = \mu \left(\frac{1}{2} \rho S H g \right) d = \frac{1}{2} \mu \rho S H g d$$

La chaleur produite Q est absorbée par la surface de base S sur une épaisseur de rugosité e , qui est bien indépendante de la taille de la montagne.

$$Q = m_{chauffe} C_p \Delta T = \rho(S \cdot e) C_p \Delta T$$

On égalise l'énergie produite et l'énergie absorbée ($W_{meca} = Q$) :

$$\frac{1}{2} \mu \rho S H g d = \rho S e C_p \Delta T$$

Il reste :

$$\frac{1}{2} \mu H g d = e C_p \Delta T$$

D'où l'expression finale de l'élévation de température très jolie:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu g}{e C_p} \right) \cdot (H \times d)$$

Interprétation Physique

1. **Le facteur H (Pression)** : Plus la montagne est haute, plus elle "appuie" fort sur le sol ($P \propto H$). Chaque mètre glissé dégage donc plus d'énergie.
2. **Le facteur d (Distance)** : Plus la montagne glisse sur une grande distance, plus la chaleur s'accumule.
3. **Retour au modèle d'échelle ($d \approx H$)** : Si l'on suppose (par analyse dimensionnelle géométrique) que l'objet glisse sur une distance comparable à sa propre taille, alors $d = H$, et on retrouve :

$$\Delta T \propto H^2$$

C'est ce qui confirme que les grands objets sont doublement défavorisés : ils appuient plus fort ET glissent plus loin.

On suppose à présent $d \approx H$

- Pour un objet petit ($H \sim 1$ m), ΔT est faible.
- Pour une montagne ($H \sim 1000$ m), le facteur H^2 est multiplié par 10^6 .
 ΔT dépasse la température de fusion d'une roche normale ($T_f \approx 1200^\circ\text{C}$).

Conclusion : Une grande montagne est fluidifiée avec une bien plus grande aisance, c'est la raison pourquoi dans la terre on n'a "que" des montagnes de taille 8848m (everest).

Crédits

Contributeurs

Ce projet n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide précieuse des étudiants suivants :

- Abdelkarim Ait Omar – Lydex – *École polytechnique*
- Abderrahmane Bachar – Lydex – *CentraleSupélec*
- Adam Baali – Lydex – *CentraleSupélec*
- Adam Fejry – Lydex – *Centrale Lille*
- Ahmed Hmamou – Lydex – *École polytechnique*
- Ayoub Guenbib – Zahraoui – *École polytechnique*
- Ayoub Lachkar – Lydex – *École nationale des ponts et chaussées*
- Aymane Bouhsain – Lydex – *École polytechnique*
- Ayoub Saoud – Lydex – *École polytechnique*
- Chayma Azzimani – Lydex – *CentraleSupélec*
- Deyaa-Eddine Naciri – Lydex – *CentraleSupélec*
- Maroua Zaidouni – Lydex – *École polytechnique*
- Marouane Derqaoui – Lydex – *CentraleSupélec*
- Mehdi Assalih – Lydex – *CentraleSupélec*
- Mohamed Loudili – Lydex – *Centrale Lille*
- Mohamed Yassine Talea – Lydex
- Rida Oulaasri – Lydex – *Mines Saint-Étienne*
- Yasser Abouseir – Lydex – *École polytechnique*
- Yassine Bennani – Lydex – *École polytechnique*
- Youssef Bakkouri – Lymed – *École polytechnique*
- Youssef Houta – Lydex
- Zainab Ramsis – Lydex – *IMT Atlantique*
- Zakaria Hamdoun – Lydex – *CentraleSupélec*

Auteurs

Mathématiques

Adam Bennaceur – Lydex – *École polytechnique*

Yassine Kamal – Lydex – *École polytechnique*

Physique

Akram El Omrani – Lydex – *École polytechnique*

Mohamed Amine Khalil – Lydex – *École polytechnique*