RAPPORT

ORAUX X-POLYTECHNIQUE & ENS

PROMO X23

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

ORAUX X/ENS

Concours 2023

29 novembre 2023

Les lydexiens candidats aux oraux X/ENS

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

0.1 Concours X

Les entretiens de ce concours ont lieu à l'École Polytechnique, à Palaiseau. Il est recommandé de rechercher un hébergement sur place, que ce soit auprès d'un étudiant de l'école ou à l'ENSTA, qui se trouve à proximité(Les élèves du Lydex en 1A et 2A essaient généralement d'héberger le maximum des admissibles). Ces entretiens, qui s'étendent généralement sur une semaine, constituent une période importante. Les rapports du jury sont accessibles en ligne à l'adresse `https://gargantua.polytechnique.fr/`.
Coefficients des épreuves orales :

Epreuve	Coefficient
Mathématiques 1 – 50 min	16
Mathématiques 2 – 50 min	16
Physique – 50 min	20
Chimie– 40 min	9
ADS– 40 min	15
Français– 30 min	8 (seulement si la note augmente la moyenne)
LV1 obligatoire– 30 min	8
LV2 facultative – 30 min	4 (pour les points au dessus de 10)
Sport	5

Notez bien que, à l'exception des épreuves de langues, de l'ADS, et du français, toutes les autres épreuves ne permettent aucune préparation préalable.

Le concours de l'École Polytechnique se distingue par la prédominance des épreuves orales, représentant 92 coefficients sur 140, soit 65 % de la note finale. Il est donc impératif de bien se préparer pour ces entretiens, qui s'étendent souvent sur une semaine, incluant des épreuves parfois éprouvantes telles que le sport.
Les épreuves de mathématiques et de physique sont réputées difficiles en raison du besoin de classer des candidats de niveau élevé. L'entraînement sur des annales est essentiel, et même en cas de difficulté à trouver la solution, l'examinateur peut fournir des indications si les pistes suggérées par le candidat sont prometteuses. En chimie, bien que les exercices soient parfois longs, ils sont généralement dénués de difficultés particulières, offrant ainsi une opportunité de gagner des points précieux.
L'épreuve spécifique de l'ADS, redoutée par de nombreux candidats en raison de sa difficulté et de son coefficient important, nécessite une préparation minutieuse. Il s'agit de travailler sur un document de mathématiques ou de physique inconnu pendant deux heures, suivi d'une présentation de 15 minutes à l'examinateur et de 15 minutes de questions. L'entraînement sur des sujets antérieurs est fortement recommandé.
L'épreuve de français diffère des concours comme Mines-Ponts, avec un résumé adoptant le point de vue narratif de l'auteur (similaire aux résumés écrits de CCP) et un commentaire exigeant un niveau élevé, en particulier pour les exemples. L'utilisation d'exemples, même issus de la culture populaire, est encouragée.
Les épreuves de langues comportent une préparation de 30 minutes suivie d'un passage de 20 minutes avec deux examinateurs. Elles portent sur un document vidéo et exigent un niveau linguistique et une maîtrise méthodologique plus élevés que d'autres concours. Ceci (`https://youtu.be/tjPtSuFzRd4` - entre min 5 et min 10) est le lien d'un oral d'arabe dont vous trouverez le déroulement exemplaire passé par un élève l'année dérnière dans le reste de ce rapport.
En ce qui concerne l'épreuve de sport, bien qu'elle ait une importance relative, une note inférieure à 2 pour la

note finale, qui prend en compte les trois épreuves, peut être éliminatoire. Cette épreuve comprend la natation sur 50m, la course sur 100m (80m pour les filles), et la course sur 1000m (600m pour les filles). Il est crucial de s'entraîner au 1000m pour déterminer le rythme optimal et fixer des objectifs. Un peu d'entraînement en natation, en particulier le plongeon depuis un podium, peut également être bénéfique.

0.2 Conours ENS

Les entretiens pour les Écoles Normales Supérieures (ENS) se déroulent principalement à l'ENS de Paris, située au 45 rue d'Ulm. Un seul entretien, celui de Math Saclay-Rennes, a lieu à l'ENS de Paris Saclay. La période des entretiens s'étend sur une semaine entière. Les rapports de jury, accessibles à l'adresse suivante : `https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours/concours-voie-cpge`, fournissent des exemples d'exercices.

Les épreuves et leurs coefficients varient en fonction du lieu (U pour Ulm, L pour Lyon, S pour Saclay, R pour Rennes).
Coefficients des épreuves orales :

Epreuve	Coefficient
Mathématiques U – 50 min	30
Mathématiques L – 50 min	6
Mathématiques SR – 50 min	12
Mathématiques ULSR – 50 min	U : 15 / L : 4 / SR : 8
Physique U – 50 min	25
Physique LSR – 50 min	L : 4 / SR : 6
LV1 (épreuve passée à l'X)	U : 3 / L : 1.5 / SR : 2
TIPE – 40 min	U : 8 / L : 2 / SR : 2

Il est important de noter que, à l'exception de l'épreuve de langue, toutes les épreuves aux ENS se déroulent sans période de préparation dédiée. Les entretiens occupent une place significative dans le processus de sélection des ENS, contribuant à 75% des évaluations à l'ENS Ulm. Cela signifie que l'admissibilité ne garantit en rien une admission, soulignant la nécessité de préparer sérieusement l'entretien.
Il est à noter que les entretiens de Mathématiques et de Physique occupent une part prépondérante, tandis que la seule épreuve de langues orale est la LV1, partagée avec l'École Polytechnique (voir la section précédente). Tout comme à l'X, les épreuves de Mathématiques et de Physique aux ENS sont reconnues pour leur difficulté. Bien que certains exercices soient préétablis, les problèmes posés visent à évaluer la réflexion du candidat face à des situations nouvelles, requérant un esprit d'initiative voire de la créativité. En particulier à l'ENS Ulm, ces entretiens offrent l'opportunité d'un véritable échange avec l'examinateur. Il peut arriver que ce dernier engage une discussion avec le candidat au tableau ou rédige lui-même l'énoncé, bien que cela soit assez rare. Il est essentiel de profiter de cette interaction pour établir un dialogue constructif afin de progresser dans la résolution du problème, souvent complexe.
L'épreuve du Travaux d'Initiative Personnelle Encadrés (TIPE) est spécifique aux ENS. Elle implique une nouvelle rencontre avec un jury composé de deux personnes. Contrairement à d'autres épreuves, l'objectif principal n'est pas de présenter rapidement votre travail dans un laps de temps limité. L'entretien commence souvent par une brève présentation, mais évolue rapidement vers une discussion approfondie sur votre sujet, voire une sorte de mini-colle. À cet égard, cette épreuve présente des similitudes avec l'Analyse de Documents Scientifiques (ADS) à l'École Polytechnique.

1
ORAUX ENS

1.1 Maths U

1.1.1 • Exercice 1

1.1.1.1 • Enoncé

Montrer que $]0,1[$ n'est pas réunion disjointes de fermés d'intérieurs non vides.

1.1.1.2 • Solution

Bon je n'ai pas aboutit à grand chose. L'idée en soit que j'ai suivi était d'écrire par absurde que $]0,1[= \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i]$ où I dénombrable. Ensuite j'ai construit une sous suite de ces bornes qui tend vers 0 pour cela il faut à chaque fois prendre un ε qui tend vers 0 cette élement étant dans au moins un de mes intervalle j'initalise ensuite le prochain ε est inferieur à la borne inf de l'intervalle initial n.b : justifier l'existence en disant que 0 ne peut être borne d'une de mes $[a_i,b_i]$ et donc il existe bien un autre ε qui soit plus "proche" du 0 sans pour autant être dans mon intervalle initial. Une fois la suite de borne construite j'en déduit que 0 est valeur d'adhérence des mon ensemble de bornes. L'idée suivante était de montrer que l'ensemble de ces bornes est un fermé (pas vraiment d'idée outre la caractérisation de fermé par l'intersection avec des boules), une fois cela fait la conclusion est simple, 0 est valeur d'adhérence des mes bornes et cette ensemble est un fermé donc y appartient ainsi il existe un intervalle $[a_{i0},b_{i0}]$ tel que $a_{i0}=0$ donc $0\in\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i]=]0,1[$ d'où l'absurde.

1.1.1.3 • Déroulement. Note : 8

De loin l'oral le plus horrible que j'ai passé, examinateur parfaitement silencieux et impassible, on dirait dit un élément du décor. Une unique indication m'a été proposée 5 mins avant la fin de l'épreuve et c'était de démontrer que l'ensemble des bornes était un fermé de $]0,1[$. L'examinateur m'a laissé couler pendant toute l'heure sans me tendre de perche et la note était tout aussi lamentable que le déroulement.

1.1.2 • Exercice 2

1.1.2.1 • Enoncé

Soient n et d des entiers strictement positifs et $G=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$. Soit $S=\{\pm e_1,\dots,\pm e_d\}$, avec e_i est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Soient X une v.a. uniformément distribuée dans G et $f:G\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que :

$$\mathbb{E}(|f(X)-\mathbb{E}(f(X))|)\leq\frac{dn}{2}\max_{s\in S}\mathbb{E}(|f(X)-f(X+s)|)$$

1.1.2.2 • Déroulement-Solution. Note : 13

L'examinateur m'a donné l'exercice dans une feuille et a sorti pendant un dizaine de minutes, ce temps m'a suffit pour absorber les notations et pour suivre une piste fastidieuse et calculatoire dans laquelle j'ai introdui des événements qui conditionneront l'espérance selon que $f(X)$ est assez proche de $\mathbb{E}[f(X)]$ (c'est-à-dire leur différence est un élément de S) ou non mais du début j'ai compris que ce n'est pas la meilleure méthode. L'examinateur était silencieux (ne donnant aucune indication) mais très attentif, je lui ai dit que je veux simplifier les deux termes de gauche et droite sans utiliser aucune inégalité triangulaire, après ces calculs (gros calculs, avec beaucoup d'erreurs grossières de type $Card(G)=nd$ au lieu de n^d). Là, j'ai fait apparaitre une symétrie dans le terme de gauche et je lui ai dit que je doit utiliser l'inégalité triangulaire de la manière la plus fine possible (j'ai pu exhiber un cas d'égalité mais je n'y rappelle pas, donc il faut être prudent avec les inégalités). J'ai ensuite utilisé l'inégalité trianguaire de plusieurs manières sans pouvoir faire apparaitre le terme de droite, je lui ai dit donc que je doit comprendre le $\frac{nd}{2}$, et pourquoi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au lieu de {0,1,. . .,n-1} et il m'a dit que c'est une bonne idée. Après un temps de reflexion j'ai compris que la distance maximale entre deux points de $(\{0, 1, \dots, n-1\})^d$ est nd (voir ce dernier comme un (hyper)parallélogramme) et dans ce cas, G n'est que cette figure en y joignant les bords extrémaux (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n = 0) et ainsi, la distance maximale entre deux éléments de G est $\frac{nd}{2}$. Ceci étant géométriquement, j'ai prouvé ceci rigoureusement et le temps s'est écoulé avant de conclure (mais c'était l'idée).

1.1.3 • Exercice 3

1.1.3.1 • Enoncé

Soit n impair
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$det(A + M) = 0$$

Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

1.1.3.2 • Déroulement

Après plusieurs études, j'ai montrer qu'il suffit de montrer que si A = $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Dans les 10 dernières minutes j'ai supposé que λ_1 et λ_2 sont différents de 0 puis j'ai essayé de trouver M $\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $det(A + M) \neq 0$, Apres plusieurs tentatives L'examinateur m'a proposé la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$ En effectuant les calculs, j'en ai pensé non appropriée (alors que c'était malheureusement celle qui va résoudre l'exercice)

1.1.4 • Exercice 4

1.1.4.1 • Enoncé

Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ décroissante et qui tend vers 0 en $+\infty$ et :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$$

Vérifier que g est bien définie pour $x > 0$, puis donner sa limite en 0^+

1.1.4.2 • Déroulement 1. Note : 11

— La vérification que $]0; +\infty[\subseteq D_g$ était évidente (critère spécial pour certaines séries alternées)

— J'ai commencé par essayer $f : x \mapsto e^{-x}$, pour laquelle

$$(\forall x > 0) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{1}{2}$$

(le résultat était décevant, car j'espérais qu'il soit 0)

— J'ai constaté que

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x f(nx) = xf(0) - xf(x) + xf(2x) - \dots$$

ce qui représente une surface ; ainsi j'ai obtenu une sorte de somme d'intégrales.

— J'avais l'idée d'utiliser le théorème de la valeur moyenne pour "estimer" chacune de ces intégrales, sans succès

— Puis j'avais l'idée d'écrire

$$g(x) = (f(0) - f(x)) + (f(2x) - f(3x)) + \dots$$

et d'utiliser le théorème des accroissements finis sur chacune des différences entre parenthèses, en écrivant

$$g(x) = -xf(c_{1x}) - xf(c_{2x}) - \dots$$

j'espérais obtenir une somme qui "converge" vers une intégrale sur f (ou sur sa dérivée, voire sur une primitive F de f), sans succès

— Après une phase d'inertie, j'ai repris :

$$\begin{aligned} g(x) &= (f(0) - f(x)) + (f(2x) - f(3x)) + \dots \\ &= \int_x^0 f'(t)\, dt + \int_{3x}^{2x} f'(t)\, dt + \dots \\ &= -\left(\int_0^x f'(t)\, dt + \int_{2x}^{3x} f'(t)\, dt + \dots \right) \end{aligned}$$

— Là, l'examinateur m'a indiqué d'essayer d'écrire cette somme d'intégrales comme une seule intégrale, donc j'ai écrit :

$$g(x) = -\int_0^{\infty} f'(t) \mathbb{1}_{E_x}(t)\, dt$$

où

$$E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2nx; (2n+1)x]$$

— Puis j'ai essayé d'approximer la fonction indicatrice par des fonctions affines par morceaux, et qui y convergent (démarche classique, je pensais), mais sans succès. Fin d'épreuve.

1.1.4.3 • Déroulement 2. Note : 8

Examinateur silencieux , il a sorti les premiers 10min de la salle , ayant rentré je lui fait part de ce que j'ai trouvé :

— J'ai justifié g existe

— La formule :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t)\,dt$$

— Un développement limité de f selon x tendant vers 0

J'ai essayé de détailler le développement pour que je puisse développer la formule (1) et tendre x vers 0 mais vainement . Voyons que plus de 15 min a été perdus . Je considère un exemple $f(x) = e^{-x}$. je remarque que la limite est f(0)/2 , puis je déclare que ce n'est pas intuitif , l'examinateur parait surpris comme si la limite doit me paraître directement .

il me dit de bien regarder la formule (1) : j'ai rien remarqué . il me dit trace les domaine d'intégration , c'est ici que je remarque que c'est le demi de$[0, \infty[$ et l'intégration sur l'intervalle entier est évidemment f(0).

je pose une expression qui traduit mon intérêt :

$$2 * \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t)\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2nx}^{2*(n+1)x} f'(t)\,dt \;+\; L_n(x)$$

avec :

$$L_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{nx}^{(n+1)x} f'(t)\,dt = x * \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{n}^{(n+1)} f'(tx)\,dt$$

En fait j 'ai fait une faute dans l'expression que l'examinateur m'a réglé

Il me reste 5 min , j'essaie de faire vite pour finir en affirmant qu'on doit chercher une expression de $L_n(x)$ sommable et qui tend vers 0 quand x tend vers 0 . le temps ne m'a pas suffire pour terminer.

1.2 Maths L

1.2.1 • Exercice 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Montrer que

$$||exp(iA) - exp(iB)|| \leq ||A - B||$$

avec ||.|| une norme d'algèbre

1.2.2 • Exercice 2

1.2.2.1 • Enoncé

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ harmonique c'est-à-dire $\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
Montrer que $(\forall r \in [0,1])\ f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$

Exemple : Vérifier que $f : (r, \theta) \mapsto \frac{1-r^2}{|r-e^{i\theta}|^2}$ est harmonique

1.2.2.2 • Indication

On pourra montrer que

$$f(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

1.2.2.3 • Solution

On définit une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \phi(x,y) = -\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(0,t)dt$$

ϕ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$, et admet une dérivée partielle selon x, avec :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(0,t)dt\right) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 0$$

Et en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral à la fonction $(s,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)$, on montre que ϕ admet une dérivée partielle selon y, avec :

$$\begin{aligned}
(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(0,t)dt\right) \\
&= -\int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y)ds + \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \\
&= \int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,y)ds + \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\right]_{s=0}^{s=x} + \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

On a ainsi établi l'existence d'une fonction ϕ de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$
On pose :

$$(\forall r \in [0,1]) g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

Calculons la dérivée de g (voir déroulement pour justification) :

$$\begin{aligned}
(\forall r \in [0,1]) g'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sin\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\phi(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta \\
&= [\phi(r\cos\theta, r\sin\theta)]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où : g est constante, et $(\forall r \in [0,1]) g(r) = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0)d\theta = f(0)$.

1.2.2.4 • Déroulement. Note : 15

- Une fois que j'ai posé g, mon but fut de montrer que g est constante. (en montrant qu'elle est dérivable et que sa dérivée est nulle, par exemple)
- Pour exploiter le fait que f est harmonique, j'ai exprimé sa première, puis sa deuxième dérivée : (en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$(\forall r \in [0,1]) g'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta})d\theta$$
$$(\forall r \in [0,1]) g''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(re^{i\theta})d\theta$$

- On pose $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$, alors, d'après la formule des chaines :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- J'ai donc constaté que :

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

  (Ce que j'ai fait, en effet, c'était de retrouver l'expression du laplacien en coordonnées polaires)
- En revenant à g, j'ai donc conclu que :

$$\begin{aligned}(\forall r \in [0,1]) g''(r) - \frac{1}{r}g'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)(re^{i\theta})d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(re^{i\theta})d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2}\left[\frac{\partial f}{\partial \theta}(re^{i\theta})\right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

- g est donc solution de l'équation différentielle $g''(r) - \frac{1}{r}g'(r) = 0$, mais ceci n'était pas suffisant pour prouver que g est constante.

1.2.3 • Exercice 3

1.2.3.1 • Enoncé

Exo 1 :

1. Calculer $F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} e^{-sx} dx$
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx$

Exo 2 : Soit $p > 1$
Montrer qu'il existe $k_p \geq 0$ tel que

$$(x-y)^2 \leq k_p(4-(x+y)^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x|^p + |y|^p = 2$$

1.2.3.2 • Déroulement-Solution. Note : 18

L'exo 1 a été déjà traité avec le prof Karakhi , j'ai fait comme si je le découvre et essayé de faire vite .
J'ai utilisé la méthode de Reyman.
J'ai justifié que :

$$F \in C^1(]0, +\infty[)$$

je dérive par rapport à s puis j'intègre et en utilisant sa limite en infini en majorant l'intégrale($sin(x) < x$) , j'ai trouvé la constante d'intégration.

$$F = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$$

pour la deuxième question : il faut montrer la continuité de F en 0 , comme je l'ai déjà dit on l'a fait en classe

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(x)}{x} e^{-sx} dx$$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{sin(x)}{x} e^{-sx} dx$$

une série alterné qui converge uniformément puisque le reste est majoré par son premier terme , cqfd. Pour le deuxième exo , il ne reste que 15 min , le prof discutait avec moi tout au long de ces 15 min :
On a réduit le problème au x,y positifs
On a réécrit l'inégalité

$$\frac{(x-y)^2}{(4-(x+y)^2)} \leq k_p$$

on a tracé l'ensemble de $\{(x, y) \in R/|x|^p + |y|^p = 2$ $\}$ pour p = 2 et celui de $\{(x, y)/4 - (x + y)^2{=}0\}$ et remarqué qu'il y a problème sauf pour un certain voisinage ou se coupe les deux ensemble .
J'ai changé les coordonnées en polaire pour mieux traiter le problème .
Puis le temps s'est écoulé.
Posons :

$$x = 1 + r * cos(\theta)$$

$$y = 1 + r * sin(\theta)$$

On considère

$$f(x) = \frac{(x-y)^2}{(4-(x+y)^2)}$$

avec :

$$y = (2 - x^p)^{\frac{1}{p}}$$

on réalise un développement limité de f en 1 et on conclut qu'elle est borné en 1 . et comme A=$[(x, y) \in R/|x|^p + |y|^p = 2$] est compacte , f est borné sur l'ensemble complémentaire du voisinage donc elle est bornée.

1.2.4 • Exercice 4

1.2.4.1 • Enoncé

$E = \{f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \text{ polynomiale } / \quad f(PAP^{-1}) = f(A) \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})\}$
$F = \{f : D_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \text{ polynomiale } / \quad f(A) = f(A_\sigma) \quad \forall \sigma \in S_n\}$
$D_n(\mathbb{C})$: l'ensemble des matrices diagonales
Si $A = diag(a_1, ..., a_n)$ alors $A_\sigma = diag(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$

Montrer que E et F sont isomorphes.

1.2.4.2 • Solution

On pose :

$$\begin{array}{rcl} h : E & \to & F \\ f & \mapsto & f_{|D_n(\mathbb{C})} \end{array}$$

Le but est de montrer que h est bijective.
Pour l'injectivité :
Soient $f, g \in E$ telles que $h(f) = h(g)$ alors $f_{|D_n(\mathbb{C})} = g_{|D_n(\mathbb{C})}$
Donc f et g coïncident sur l'ensemble des matrices diagonalisables.
Or ce dernier étant dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ Alors $f = g$.
Pour la surjectivité :
Soit $f \in F$. Pour comprendre l'idée il faut voir f comme un polynôme à n indéterminées. Donc F est formé de polynômes symétriques qui se décomposent en polynômes symétriques élémentaires et donc s'écrivent comme combinaison linéaire des sommes de newton et du produit.
Alors

$$f(\lambda_1, .., \lambda_n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k S_k(\lambda_1, .., \lambda_n) + a \prod_{k=0}^{n} \lambda_k$$

Où $S_k(\lambda_1, .., \lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k$
On considère alors la fonction :

$$g(A) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k Tr(A^k) + a\, det(A)$$

Alors $h(g) = f$ et $g \in E$.
Conclusion : $E \cong F$

1.2.4.3 • Déroulement 1. Note : 11

Aprés quelques tentatives initiales pour établir une application bijective entre les espaces E et F , l'examinateur m'a demandé de caractériser les applications polynomiales f qui appartiennent á E. Ensuite l'examinateur m'a aidé pour considérer l'application suivante entre E et F :

$$\begin{array}{rcl} h : E & \to & F \\ f & \mapsto & f_{|D_n(\mathbb{C})} \end{array}$$

En fait j'ai eu cette idée pour la simple raison de la densité de $D_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.
Sauf que j'ai pas arrive a montrer la subjectivité.

1.2.4.4 • Déroulement 2. Note : 18

L'examinateur était très sympa , toujours le grand sourire . il m'a donné la question et s'est demandé si je l'ai bien saisie. j'ai posé l'application attendue et j'ai montré qu'elle est injective, pour cela j'ai utilisé le fait que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis il m'a demandé la démonstration de ce résultat je l'ai fait rapidement et je passais à la surjection,après des tentatives un peu proches de la solution le problème était que la fonction que je posais est n'est pas continue, or toute fonction polynomiale est continue(je l'ai remarqué en lui disant que cela ne marche pas) .l'examinateur intervient en me demandant si je peux caractériser les éléments de F, j'ai donné des exemples mais c'était pas sufisant, après un petit temps de reflexion j'ai dit que les éléments de F sont des polynomes symetriques donc s'écrivent comme combinaison linéaire des sommes de Newton et du produit. pour le produit on généralise par le déterminant , et les sommes de Newton par $Tr(A^k)$.il a apprécié mon idée et m'a demandé de démontrer cette assertion (qui est compliqué), je lui répondait que je savais pas la démonstration mais je peux essayer ,mais il n'a pas voulu (m'embeté) et il m'a proposé un autre exercice moyen mais qui sert juste à passer le reste du temps de l'oral.

1.2.5 • Exercice 5

1. Soit $T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T^i X \quad \text{admet une limite finie et la calculer.}$$

2. Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$, tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|TX\| \leq \|X\|$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T^i X \quad \text{admet une limite finie et la calculer.}$$

1.2.6 • Exercice 6

1.2.6.1 • Enoncé

1. Soit A et B deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ tel que $A+B$ est négative
   on pose : $sp(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ et $sp(B) = \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n$
   soit i_1 et i_2 dans $\{1, 2, 3...n\}$
   Montrer que si $i_1 + i_2 < n+2$ alors $\lambda_{i_1} + \mu_{i_2} \leq 0$
2. Soit A_1, A_2,..., A_k des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ tel que $A_1 + A_2 + ... + A_k$ est négative
   on pose : $sp(A_j) = \lambda^1_{A_j} \leq \lambda^2_{A_j} \leq ... \leq \lambda^n_{A_j}$
   Montrer que si $i_1 + i_2 + ... + i_k < n+k$ alors $\lambda^{i_1}_{A_1} + \lambda^{i_2}_{A_2} + ... + \lambda^{i_k}_{A_k} \leq 0$

1.2.6.2 • Solution

D'après le théorème spectral, il existe une B.O.N $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de H_1 associés aux valeurs propres $(\lambda_1(H_1), \ldots, \lambda_2(H_1))$ (et respectivement une B.O.N $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pour H_2).

On considère les deux espaces vectoriels $S_1 = Vect(e_{i_1}, \ldots, e_n)$ et $S_2 = Vect(f_{i_2}, \ldots, f_n)$.
Supposons par absurde que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, alors la somme $S_1 + S_2$ est directe, ainsi
$\dim(S_1 \bigoplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) = 2n + 2 - (i_1 + i_2)$.

Or $S_1 \bigoplus S_2$ un sev de $\mathbb{R}^n$, donc $\dim(S_1 \bigoplus S_2) \leq n$, ainsi $2n+2-(i_1+i_2) \leq n$, ce qui donne que $i_1+i_2 \geq n+2$, ce qui est absurde. Donc $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, on prend alors X un vecteur de norme 1, appartenant à cette intersection.

On pose $X = \sum\limits_{j=i_1}^{n} x_j e_j$, alors :

$$
\begin{aligned}
{}^tXH_1X &= (\sum_{j=i_1}^{n} x_j {}^te_j)(\sum_{j=i_1}^{n} \lambda_j(H_1)x_je_j) = \sum_{j=i_1}^{n} \lambda_j(H_1)x_j^2 \\
&\geq \lambda_{i_1}(H_1) \sum_{j=i_1}^{n} x_j^2 = \lambda_{i_1}(H_1)\|X\|^2 = \lambda_{i_1}(H_1)
\end{aligned}
$$

De la même manière, on montre que :

$$
{}^tXH_2X \geq \lambda_{i_2}(H_2)
$$

Donc, puisque $H_1 + H_2$ est négative :

$$
\lambda_{i_1}(H_1) + \lambda_{i_2}(H_2) \leq {}^tX(H_1+H_2)X \leq 0
$$

1.2.6.3 • Déroulement. Note : 11

L'examinateur était sympa, premièrement il m'a demandé justifier pourquoi on peut ordonner les valeurs propres de A et B, j'ai répondu rapidement à l'aide du théorème spectral puis j'ai écrit en extension l'expression ${}^tXAX$ en décomposant X sur la base canonique, il m'a dit que c'est mieux de travailler avec la base orthonormale de diagonalisation de A ensuite il m'a demandé de comparer ${}^tXAX$ avec la norme de X, j'ai trouvé que ${}^tXAX \geq \lambda_1 {}^tXX$ après j'ai resté bloqué pendant 2 min, il m'a proposé de poser le sous espace engendré par le i1ème vecteur de la base jusqu'à le dernier vecteur, j'ai dit directement que si on considère que X dans ce sev on trouve que ${}^tXAX \geq \lambda_{i1} {}^tXX$ de même pour B, j'ai dit qu'on doit prendre un X non nul dans les deux sev et pour cela je dois montrer que leurs intersection n'est pas réduit au singleton 0, j'ai raisonné par absurde j'ai trouvé que la dimension de la somme est strictement supérieur à n après je trouve sans problème l'inégalité souhaitée, puis il m'a dicté la deuxième question avant 1 min de la fin de l'oral, j'ai répondu rapidement qu'on doit raisonner par récurrence et utiliser la question précédente, il n'a fait aucune réaction. Je me sentais que j'ai rien fait l'examinateur m'a donné beaucoup d'indications, la note était logique.

1.2.7 • Exercice 7

1.2.7.1 • Enoncé

Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$, H un sous-groupe de G fermé, et

$$
h = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, exp(tX) \in H\}
$$

1. Montrer que h est un s-ev. de $M_n(\mathbb{R})$
2. Determiner h si $H = SL_n(\mathbb{R})$

1.2.7.2 • Indication

$$
(exp(\frac{1}{n}X)\ exp(\frac{1}{n}Y))^n \underset{n\to+\infty}{\sim} exp(\frac{1}{n}(X+Y))^n \tag{1}
$$

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

1.2.7.3 • Déroulement. Note : 13

La partie de la première question qui méritait un temps de réflexion était le fait de montrer que $\forall A, B \in h,\ A + kB \in h$. J'ai commencé par traiter le cas où A et B commutent puisque dans ce cas $exp(A)exp(B) = exp(A+B)$, je lui dit que je vais montrer la relation pour $k \in \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{Q}$ puis pour $k \in \mathbb{R}$ en utilisant que H est fermé et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'examinateur a approuvé cette premiere tantative et m'a demandé de donner un exemple de deux matrices A et B, où la relation exp(A)exp(B)=exp(A+B) n'est pas vérifiée, j'ai proposé plusieurs matrices de taille 2, mais sans autant pouvoir trouver un exemple, l'examinateur me propose ensuite deux matrices qui répondent à la question. J'ai attaqué par la suite le cas où A et B ne commutent pas. je lui ai dit que par la compacité de H et son caractère de groupe si on arrive à trouver une suite produit des expo qui converge vers expo de la somme l'exercice est résolu . L'examinateur a répondu "oui c'est exactement ce que tu dois chercher". Je n'ai pas pu conjecturer la suite, il m'a proposé donc la suite exacte et il m'a demandé de montrer la relation (1).
La conclusion est alors établit en utilisant la compacité de H. Il me demande donc d'attaquer la dernière question dans les dernières 5 min. La question était simple en se rappelant que $det(exp(A)) = exp(tr(A))$, il m'a demandé de montrer la relation que j'ai posé, je le réponds que c'est valable pour les matrices diagonalisables et par densité de ces matrices dans $M_n(\mathbb{C})$ et avec la continuité des fonctions mises en scène, la relation reste valable.

1.3 Maths ULSR

1.3.1 • Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 comme racine de χ_A.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- $Ker(A) = Ker(A^2)$
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad B^m = A$
- $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad B^k = A$

1.3.2 • Exercice 2

1.3.2.1 • Enoncé

Exo 1 :
On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(n) = v_5(\prod_{k=1}^n k^k)$, où $v_p(n)$ est la valuation p-adique de n. Donner un équivalent simple de $E(n)$ quand $n \to \infty$.
Exo 2 :
Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, et $\mathcal{K}$ un fermé, borné, convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $A(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Montrer que A admet un point fixe.

1.3.2.2 • Solution

1. On a

$$v_5\Big(\prod_{k=1}^n k^k\Big) = \sum_{k=1}^n k v_5(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k v_5(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n v_5(k)$$

donc

$$v_5\Big(\prod_{k=1}^{n} k^k\Big) = nv_5(n!) - \sum_{i=1}^{n} v_5((i-1)!)$$

d'après la formule de Legendre, on a

$$v_5(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$$

on montre alors que $v_5(n!) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4}$
or $v_5((n-1)!) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4}$ et $\sum_{n\geq 1} n$ diverge, donc $\sum_{i=1}^{n} v_5((i-1)!) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n(n+1)}{8} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{8}$
on conclut que

$$v_5\Big(\prod_{k=1}^{n} k^k\Big) = \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{8} + o(n^2)$$

Donc

$$v_5\Big(\prod_{k=1}^{n} k^k\Big) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{8}$$

2. Soit $a \in \mathcal{K}$, on définie la suite (y_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k(a)$$

C'est évident que pour tout entier $y_n \in \mathcal{K}$ (car $\mathcal{K}$ convexe)
on a :

$$A(y_n) - y_n = \frac{A^n(a) - a}{n}$$

quitte à extraire une sous-suite de (y_n), on suppose que (y_n) converge vers un $x \in \mathcal{K}$ (puisque $\mathcal{K}$ est un compact).
or pour tout entier $A^n(a) \in \mathcal{K}$, soit donc ϕ une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, strictement croissante tel que $(A^{\phi(n)}(a))$ converge, on a donc :

$$A(y_{\phi(n)}) - y_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par la convergence de (y_n) et la continuité de A, on a :

$$A(x) = x$$

1.3.2.3 • Déroulement 1. Note : 16

— J'avais pensé à faire une disjonction des cas : $n = 5m, n = 5m+1; ...n = 5m+4$
— Pour le premier cas (le plus simple) :

$$E(5m) = v_5(\prod_{k=1}^{5m} k^k) = \sum_{k=1}^{5m} kv_5(k) = \sum_{l=1}^{m} 5lv_5(5l)$$

(parce que $v_5(k) = 0$ si $k \neq 0 \bmod 5$) Donc :

$$E(5m) = 5\sum_{l=1}^{m}(1+v_5(l)) = 5\sum_{l=1}^{m} l + 5\sum_{l=1}^{m} lv_5(l) = 5\frac{m(m+1)}{2} + 5E(m) = E(5m+1) = ... = E(5m+4)$$

— J'ai donc abouti à la formule de récurrence suivante :

$$E(n) = \frac{5}{2}\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1\right) + 5E\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right)$$

— En appliquant la formule autant de fois que nécessaire, j'aboutis à :

$$E(n) = \frac{5}{2}\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1\right) + \frac{5^2}{2}\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{5} \right\rfloor + 1\right) + ...$$

— Et puis je commençais à encadrer :

$$\frac{n}{5} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \leq \frac{n}{5} \Rightarrow \frac{5}{2}\left(\frac{n}{5} - 1\right)\frac{n}{5} < \frac{5}{2} \times \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1\right) \leq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{5} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5} + o(n^2) < \frac{5}{2}\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1\right) \leq \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5} + o(n^2)$$

— De même :

$$\frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^2} + o(n^2) < \frac{5^2}{2}\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{5} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{5} \right\rfloor + 1\right) \leq \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^2} + o(n^2)$$

— Ainsi j'écris :

$$\frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5} + o(n^2) + \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^2} + o(n^2) + ... \leq E(n) \leq \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5} + o(n^2) + \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^2} + o(n^2) + ...$$

Et comme :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{4}$$

j'écris immédiatement :

$$E(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{n^2}{4}$$

— L'examinatrice m'a arrêté, et m'a demandé de justifier le dernier passage, surtout le fait que $o(n^2) + o(n^2) + ... = o(n^2)$ (ce qui n'est pas forcément vrai si la somme est infinie)

— Là j'ai dû mieux encadrer le terme reste :

1. j'ai remarqué qu'il est, en effet, $O(n)$ et pas juste $o(n^2)$
2. j'ai dû compter le nombre de termes dans ma formule de $E(n)$, qui était de l'ordre de $\log_5(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(5)}$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor log_5(n) \rfloor} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^k} + O(n)\right) \leq E(n) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor log_5(n) \rfloor} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n^2}{5^k} + O(n)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - (\frac{1}{5})^{\lfloor \log_5(n) \rfloor}}{1 - \frac{1}{5}} + O(n\ln(n)) \leq E(n) \leq \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - (\frac{1}{5})^{\lfloor \log_5(n) \rfloor}}{1 - \frac{1}{5}} + O(n\ln(n))$$

Cela justifie plus rigoureusement que $E(n) \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^2}{8} + o(n^2)$ d'où :$E(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{8}$

— A ce moment-là, il ne restait que 5 minutes de la durée de l'épreuve ; l'examinatrice m'a demandé si j'avais une idée avec laquelle attaquer le second exercice. Je me suis simplement planté.

1.3.2.4 • Déroulement 2. Note :12

Mon tout premier oral, j'avais un peu de stress en arrivant dans le couloir. Quand je suis rentré, j'ai remarqué que la salle était très ancienne et le tableau de craie très mal entretenu ce qui a affecté mon écriture au tableau et surtout que je n'étais pas habitué à la craie en prepa. L'examinateur était sympa (comme tous les examinateurs de l'ENS) et m'a guidé pour résoudre l'exercice. Parfois l'examinateur me testait en me demandant de redémontrer quelques théorèmes, ou juste donner l'idée de démonstration. En gros, les examinateurs de l'ENS sont très sympas, ils ne vous laissent pas bloquer sur un exercice, et vous aident tous le temps.
Je n'avais pas fini l'exercice 1, pour passer à l'exercice 2.

1.3.3 • Exercice 3

1.3.3.1 • Enoncé

X, Y deux v.a.r discrètes
On définit $\leq$ tq :

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall f \text{ convexe}, \mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y)) \tag{2}$$

1. Montrer que : $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$
2. Donner un exemple de $X \leq Y$
3. Montrer que :
$$X \leq Y \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \\ V(X) = V(Y) \end{cases}$$
4. Montrer que :
$$X \leq Y \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \\ \forall a \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(x \leq X)\, dx \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(x \leq Y)\, dx \end{cases}$$

1.3.3.2 • Déroulement

Les 3 premières questions sont faciles je l'ai ait fait rapidement sauf la 2ème question j'avais proposé au début un exemple non valide puis je l'ai corrigé .
Pour la dernière question l'impication directe se fait en remarquant que l'inégalité avec l'intégrale peut se transformer en l'inégalité (2) avec :

$$f(x) = 1(a \leq x)$$

C'est l'implication réciproque qui est tordues, j'ai dit que l'inégalité est déja vrai pour :

$$h_a(x) = 1(a \leq x)$$

l'identité et les fonctions constantes.
j'en essaie de faire quelque chose mais puisque le temps n'est pas suffisant il me donne la première indication. tracer le graphe d'une fonction convexe .ici je remarque qu'on peut sur chaque partie construire une demi droite avec les h_a et on peut construire une suite de fonctions qui tend vers notre fonction (remarquer que puisque X,Y est discret on peut s'intéresser seulement à un segment).
Le temps n'était pas suffisant pour la rédiger.

1.3.4 • Exercice 4

1.3.4.1 • Enoncé

Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1. si A est k-contractante ie $||A(x) - A(y)|| \leq k||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $k \in [0, 1[$. Montrer que A admet un point fixe.
2. si A dilatante ie $||A(x) - A(y)|| \leq ||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et K un compact, convexe tel que $A(K) \subset K$. Montrer que A admet un point fixe.

1.3.4.2 • Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$
   On pose alors la suite définie comme suit : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = A(x_n)$
   $||A(x_{n+1}) - A(x_n)|| \leq k||x_{n+1} - x_n|| \Rightarrow ||x_{n+2} - x_{n+1}|| \leq k||x_{n+1} - x_n||$
   Alors $||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n||x_1 - x_0||$
   et on a pour $m \geq n$:
$$\begin{aligned}
||x_m - x_n|| &\leq \sum_{i=n}^{m-1} ||x_{i+1} - x_i|| \\
&\leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i ||x_1 - x_0|| \\
&\leq k^n ||x_1 - x_0|| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \\
&\leq k^n ||x_1 - x_0|| \sum_{i=0}^{+\infty} k^i \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} ||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$
2. Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^n}{1-k}||x_1 - x_0|| \leq \varepsilon$ donc pour $m, n \geq N$ on a $||x_m - x_n|| \leq \varepsilon$
   Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}^n$ est de Banach alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.
   Par continuité de A on a $A(\alpha) = \alpha$
   D'où le résultat.

1.3.4.3 • Déroulement 1. Note : 13

Un oral très classique. l'objectif de l'oral était une troisième question et ces deux premières étaient préliminaires , je commencait par réciter la méthode que j'ai appris pour cet exercice , la deuxième question je l'ai oublié et donc je me suis stressé et j'ai proposé deux méthodes mais sans utiliser la convexité et alors ils n'étaient pas vrais , puis j'ai essayé de tracer un shéma pour ne pas donner une vision de paresse à l'examinateur,après 20 min de reflexion il m'a proposé de considérer l'application $x \to A(\lambda x)$ et utiliser la première question ,je l'ai fait et quand il m'a donné l'autre question l'oral s'est terminé.

1.3.4.4 • Déroulement 2. Note : 13

Pour la première question qui semble être classique, j'ai perdu une partie considérable de temps. En fait j'ai essayé de la faire vite en introduisant les suites de cauchy $x_n = f^n(x)$, mais l'examinateur m'a freiné en disant que ce n'est pas au programme de la prepa. j'ai essayé de refaire par une autre méthode plus détaillée sans introduire la notion des suites de cauchy explicitement.

Pour la 2ème question j'ai commencé par traiter un cas particulier où A est linéaire en prenant $x \in \mathcal{K}$ et en posant la suite $x_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f^j(x)$ qui est bien dans $\mathcal{K}$ vu sa convexité, une suite qui m'a permit de conclure rapidement dans le cas linéaire. L'examinateur m'a demandé ensuite de passer au cas général, je lui ai dit que je compte utiliser la première question en posant $f_p = \frac{p-1}{p} f$ contractante et on se ramènant à la première question, mais je fais attention que les valeurs de f_p ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{K}$, en se rappelant que $\mathcal{K}$ est convexe j'ai discuté deux cas : si $0 \in \mathcal{K}$ les valeus de f_p sont dans $\mathcal{K}$ et on peut donc conclure par la premiere question et par le caractère compacte de $\mathcal{K}$, j'ai ataqué le 2eme cas si $0 \notin \mathcal{K}$ en restant bloquée pour un instant, , l'examinateur intervient donc et me demande de montrer qu'on peut sans perte de généralité supposer que $0 \in \mathcal{K}$ pour conclure. J'ai essayé de suivre son raisonnement qui est bien compatible avec les cas traités précédemment, il m'a donné l'indication (1) qui répond à la question, et on se ramène donc au cas traiter précédemment, ce qui conclut le raisonnement. Il m'a donné une troisième question dont je me rappelle pas, et que je n'ai pas traité, car l'oral touche à sa fin. Avant de sortir il m'a demandé un exemple d'une fonction qui satisfait les hypotheses de la 2ème question au lieu de prendre l'identité sur un segment, j'ai donné un exemple d'une autre fonction qui était plus compliquée mais qui satisfait à son tour les hypothèses évoquées.

1.3.5 • Exercice 5

1.3.5.1 • Enoncé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 = 2$ et a_n le nombre de 3 entre le $n^{\text{ième}}$ 2 et le $(n+1)^{\text{ième}}$ 2. Calculer la proportion de 3 dans la suite.

1.3.5.2 • Indication

$$(a_n) = (2,3,3,2,3,3,3,2,3,3,3,2,3,3,2,\dots)$$

1.3.6 • Exercice 6

Soit I un ensemble fini et $(P_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}[X])^I$ une famille de polynômes qui vérifie que : $\forall i \in I : P_i'$ appartient à cette famille (la famille est stable par dérivation).
On note la fonction :

$$sgn\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-1,0,1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$$

On prend une fonction $\varepsilon\colon I \longrightarrow \{-1,0,1\}$.
On note $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} / \forall i \in I : sgn(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$.

1. Montrer que A_ε est soit :
   (a) Vide.
   (b) Un point.
   (c) Un intervalle ouvert.
2. On note $A_{\overline{\varepsilon}} = \{t \in \mathbb{R} / \forall i \in I : sgn(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.
   Montrer que $A_{\overline{\varepsilon}}$ est fermé et que $\forall a,b \in A_{\overline{\varepsilon}} : [a,b] \subset A_{\overline{\varepsilon}}$.

1.3.7 • Exercice 7

Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $k \geq 1$, tel que $x \longmapsto \sum_{T=0}^{k} f^{(T)}(x)$ admet une limite finie en $+\infty$. Discuter le comportement asymptotique de f en $+\infty$ suivant la valeur de k.

1.3.8 • Exercice 8

1.3.8.1 • Enoncé

On dit que $(q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est un pseudo-polynome si : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > m$ alors $n - m \mid q_n - q_m$.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{Z}[X]$, alors $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un pseudo-polynome.
2. On pose pour tout entier naturel n, $x_n = \lfloor n!e \rfloor$. Montrer que $(x_n)_n$ est un pseudo-polynome, mais qu'il n'existe pas de polynome $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = x_n$.

1.3.8.2 • Solution

1. Il suffit juste d'écrire les choses.
2. On a

$$n!e = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

donc

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \left\lfloor \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \right\rfloor$$

or

$$0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k-n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} < 1$$

ainsi

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\ldots(k+1) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} (i+n-k)$$

on pose $P_k(X) = \prod_{i=1}^{k} (i-k+X) \in \mathbb{Z}[X]$

pour $n > m > 0$ on a

$$x_n - x_m = \sum_{k=0}^{n} P_k(n) - \sum_{k=0}^{m} P_k(m) = \sum_{k=0}^{n} (P_k(n) - P_k(m)) + \sum_{k=m+1}^{n} P_k(m)$$

on remarque pour $m+1 \leq k \leq n$ $P_k(m) = 0$ donc

$$x_n - x_m = \sum_{k=0}^{n} (P_k(n) - P_k(m))$$

on conclut par la première question que x_n est un pseudo-polynôme
pour la deuxième partie de la question il suffit de raisonner par absurde

supposons que $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = x_n$
donc

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha n^k$$

avec $\alpha \neq 0$ et $k = deg(P)$
donc

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} en! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}e\left(\frac{n}{e}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \alpha n^k$$

ce qui est absurde, d'où le résultat.

1.3.8.3 • Déroulement. Note : 11

La première question était facile, je l'ai fait rapidement, puis l'examinatrice m'a dicté la deuxième question, après plusieurs tentatives, j'ai écrit que $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ puis j'ai séparé la somme pour les k inférieurs à n et les k supérieurs strictement à n puis j'ai multiplié par n!, j'ai remarqué que l'expression qui contient la somme des k inférieurs à n est dans $\mathbb{N}$ et l'expression qui contient la somme des k supérieurs strictement à n est dans]0,1[, mais pour être sûr j'ai essayé de calculer cette expression pour n = 2, dans cette étape j'ai fait une grosse erreur de calculs, l'examinatrice a remarqué cette erreur, elle l'a directement noté sur son ordinateur, j'ai pensé que j'ai raté mon oral, l'examinatrice m'a aidé dans les calculs pour montrer que cette expression est bien dans]0,1[, enfin j'ai trouvé l'expression de x_n, j'ai resté bloqué, l'examinatrice m'a dit de penser à utiliser la première question, j'ai posé directement le polynôme convenable qui donne le résultat. J'ai pas eu le temps de réfléchir sur la deuxième partie de la question. Les fautes de calculs banals m'ont fait perdre beaucoup de points.

1.3.9 • Exercice 9

1.3.9.1 • Enoncé

Soit I un ensemble fini et $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes stable par dérivation . Soient $sign$ la fonction signe (avec $sign(0) = 0$) et $\varepsilon : I \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$
On note $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} / sign(P_i(t)) = \varepsilon(i), \forall i \in I\}$
Montrer que A_ε est soit vide, soit un singleton, soit un intervalle ouvert.

1.3.9.2 • Déroulement

Je n'ai pas absorbé les notations et pour s'approprier l'exercice , j'ai passé 10min sur le cas évident de ε constante valant 1. Ensuite l'examinatrice m'a demandé de chercher tous les A_ε possibles pour les familles $X^n, nX^{n-1}, .., n!, 0$, après avoir traité les cas $n = 2, n = 3$, j'ai compris que c'est juste l'une des demi droites d'origine 0, l'ensemble vide ou bien le singleton 0. L'examinatrice m'a dit qu'il me reste 7min et que je devais formuler la réponse, j'ai donc rédigé une récurrence en éliminant à chaque fois un polynome de degré maximal avec un argument de monotonie (ou Th.de Rolle).

1.3.10 • Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un graphe de n sommets.
Chaque sommet est lié à d'arètes ($d \geq 1$) (il n y'a pas de boucles).
Soit A la matrice d'adjacence de G définie par :

$$\begin{cases} [A^l]_{i,j} & \text{si i et j sont liés par une arète} \\ [A]_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $[A^l]_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur l liant i et j
2. Soit P_l la matrice telle que $[P_l]_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur l liant i et j et tel qu'on passe pas 2 fois consécutives par la meme arete (une directement et l'autre en retournant). Trouver une relation de récurrence entre P_{l+1} , P_l , P_{l-1} et A
3. Calculer P_0 et P_1

1.3.11 • Exercice 11

1.3.11.1 • Enoncé

Soit X une v.a.r.d. . On dit que X est infiniment divisible si et seulement si :
— $\mathbb{E}(X^2)$ est finie.
— $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists X_1, \dots, X_n$ i.i.d. tel que $\sum_{i=1}^n X_i = X$ presque sûrement.
Montrer que si X bornée et infiniment divisible, alors X presque sûrement constante.

1.3.11.2 • Solution

On montre d'abord que $X_0 < M/n$ presque sûrement (M étant le majorant des X_i), on passe à la variance et on fait tendre le n à l'infini.
(Pour plus de précisions, voir Maths 2 de Centrale 2015 II/A)

1.3.11.3 • Déroulement

Le jury me présente la question comme étant la première et me laisse livré à moi-même. Je suis resté bloqué pendant longtemps, puis il a essayé de me guider pour penser à la variance sans me le dire (il me demandait une caractérisation de presque sûrement constante par l'espérance par exemple). Il m'a demandé de trouver une condition suffisante pour la montrer, piste que j'ai été incapable de suivre et n'ayant rien à voir avec la solution proposée ci-dessus. L'exercice a sûrement d'autres questions que j'étais incapable d'atteindre.

1.3.12 • Exercice 12

1.3.12.1 • Enoncé

Soit $m \geq 1$ et $r \geq 2$. Calculer la portion de morphismes surjectifs de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

1.3.12.2 • Déroulement

L'examinateur était sympa et souriait à chaque fois que je propose une idée. Je commence par regarder ce qui se passe si pour un tel morphisme surjectif f on a $f(0, 0, .., 1, 0..)$ est inversible, chose qu'il apprécie, puis il me propose de me focaliser sur une condition nécessaire pour qu'un morphisme soit surjectif. J'utilise ensuite Bézout et j'arrive à établir le résultat uniquement pour le cas $m = p^n$ pour p premier et n entier.

1.4 Maths SR

1.4.1 • Exercice 1

1.4.1.1 • Enoncé

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, et $(X_n)_{n\geq\lceil\lambda\rceil}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$(\forall n \geq \lceil\lambda\rceil) X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, p_n = \frac{\lambda}{n}\right)$$

   Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq\lceil\lambda\rceil}$ converge en loi vers X.
2. Soient $n \geq \lceil\lambda\rceil$ fixé, $P_1, ..., P_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $P_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(p_i = \frac{\lambda_i}{n}\right)$, avec $0 < \lambda_i < \lambda$.
   On pose : $\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Trouver la loi de $P_1 + P_2$ et en déduire la loi de $\widetilde{X}$
3. Soient $Q_1, ..., Q_n$ des variables aléatoires indépendantes, indépendantes de $P_1, ..., P_n$, telles que $Q_i \hookrightarrow \mathcal{B}(q_i)$, avec $q_i = 1 - (1 - p_i)e^{p_i}$.
   On pose $B_i = \mathbb{1}_{\{Q_i\neq 0\}\cup\{P_i\neq 0\}}$, et $\widetilde{X}_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$;
   — Vérifier que $0 \leq q_i \leq 1$, et donner la loi de B_i ;
   — Calculer $\mathcal{P}(B_i \neq P_i)$;
   — Déterminer la loi de $\widetilde{X}_n$.

1.4.1.2 • Déroulement. Note : 15

Épreuve assez simple, sauf pour la première question, qui était très calculatoire (j'ai dû utiliser la formule de Sterling trois fois !). Note finale : 15/20 (Note méritée vu que je n'ai pas donnée la bonne distribution de la loi de Bernoulli..).

1.4.2 • Exercice 2

1.4.2.1 • Enoncé

L est la courbe d'équation $|z|^2 = cos(2arg(z))$

1. Trouver une équation cartésienne réelle de **L**
2. Trouver une paramétrisation $(x(r), y(r))$ tq $r \in [0,1]$ de $\mathbf{L} \cap {\mathbb{R}^+}^2$
3. Montrer que la longueur de la courbe de **L** entre $(0,0)$ et $(x(r), y(r))$ est :
$$A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$
4. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}_*^+$, tel que :
$$\begin{aligned} A\colon [-1,1] &\longrightarrow [-\omega, \omega] \\ r &\longmapsto A(r) \end{aligned}$$
soit bijective.

1.4.2.2 • Déroulement. Note : 13

C'est mon oral de math le plus décevant,puisque je n'aime pas la géométrie. la première question était très facile, il suffit juste de poser $z = x + iy$ et conclure en utilisant $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$, mais l'examinateur m'a demandé de montrer cette relation. je suis resté bloqué un petit moment, l'examinateur m'a dit que je doit juste remarquer que cos(2x) = cos(x+x), j'étais frustré parce qu'il m'a rendu stupide, et je lui disait que c'est évident et que moi j'essayais de la démontrer à nouveau. j'ai passé à la deuxième, j'ai posé $r = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,l'examinateur n'a pas apprécié mon initiative et il m'a dit de réfléchir simplement en disant que r toujours représente un module ou un rayon dans la géométrie et après j'ai posé $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.quand j'ai passé à la troisième question je disait à l'examinateur qu'il y a une relation entre la longueur de la courbe et la dérivé de la la paramétrisation et il m'a donné la relation et après c'était juste un calcul simple.la question 4 ne figurait pas dans l'énoncé,j'ai dit qu'il y a juste un problème de la continuité de A en 1 et -1 pour enfin dire que A est continue et strictement croissante sur [-1,1] avec $w = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$.

1.4.3 • Exercice 3

1.4.3.1 • Enoncé

On note $J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t))dt$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $J(0)$.
2. Étudier la régularité de J.
3. Montrer que $J(x) = \mathcal{O}(x^{\frac{-1}{2}})$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

1.4.3.2 • Déroulement. Note : 15

Un examinateur très jeune et sympa je me sentais qu'il avait 22 ans, c'était l'oral le plus facile, je ne savais pas qu'elle était l'intérêt de la première question j'ai donné la valeur oralement, pour la deuxième question j'ai commencé par montrer que J est continue sur $\mathbb{R}$ l'examinateur m'a laissé faire les calculs, il m'a dit qu'on peut dire mieux que ça j'ai réfléchi un peu et j'ai dit que J est de C^∞ sur $\mathbb{R}$ vu la présence de cosinus et sinus, il m'a confirmé la réponse, je l'ai fait rapidement (j'ai bien écrire les hypothèses du théorème utilisé), la troisième question était difficile, l'indication était donné dans l'énoncé de l'exercice j'ai décomposé l'intégrale entre 0 et π en trois parties de 0 à $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, de $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ à $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et de $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ à π, je me suis concentré sur la partie entre $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ et $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ j'ai proposé d'étudier la fonction $h(x)=x^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\cos(x\sin(t))dt$ lorsque ε est très petit, il m'a dit que c'est une bonne idée mais se serait un peu compliquée si vous travaillez par cette expression, j'ai dit qu'on peut faire un développement limité de sinus au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, il a répondu en souriant " oui c'est ça l'idée " cela m'a donner un peu de confiance, j'ai fait les calculs et en fin j'ai trouvé une expression un peu compliquée il m'a dit "maintenant c'est le travail des physiciens vous pouvez remplacer $\sin(x)$ par x et $\cos(x)$ par $1-\frac{x^2}{2}$" j'ai continué les calculs, avant 2 min de la fin de l'oral j'ai trouvé une expression qui dépend de ε j'ai dis qu'on doit choisir un epsilon qui dépend de x de telle sorte à majorer cette expression par une constante, il m'a dit est-ce que vous pouvez me donner un epsilon convenable, j'ai parachuté sans réfléchir $\varepsilon=x^{\frac{-1}{10}}$ il n'était pas d'accord, j'ai dit qu'on peut étudier cette expression qui dépend de x et epsilon et puis voir la valeur de epsilon qui sera en fonction de x de telle sorte à majorer cette expression par une constante au voisinage de $+\infty$, il m'a dit " très bien c'est ça l'idée on doit étudier cette fonction et choisir un epsilon en fonction de x ". l'interaction avec l'examinateur était agréable il m'a suivi dans mon raisonnement et mes calculs.

1.4.4 • Exercice 4

1.4.4.1 • Enoncé

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose :

$$X_n=\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}B_k \quad \text{et} \quad u_n=\frac{1}{2^n}X_n$$

1. Montrer que $\exists f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=f(X_n,B_{n+1})$.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![0,2^n-1]\!]$
3. Montrer que $\forall\omega\in\Omega,\forall x\in[0,1],\quad u_n(\omega)$ converge, puis montrer que si on pose $u=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ alors :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(u_n+\frac{1}{2^n}\leq x)\leq\mathbb{P}(u\leq x)\leq\mathbb{P}(u_n\leq x)$$

1.4.4.2 • Solution

La première question est facile. Pour répondre à la 2ème question j'ai utilisé une récurrence simple en traitant le cas impair et le cas pair pour l'événement
$$\{X=k\}$$
Pour la 3ème question il s'agit de montrer que la suite est bornée croissante puis conclure, la 4ème question se déduit par des simples inclusions entre des événements bien choisis.

1.4.4.3 • Déroulement. Note : 10

L'exercice était si simple comme on peut clairement le remarquer, en essayant d'aller très vite l'examinateur me freine à chaque fois en posant des questions bizarres qui ne me laissent pas avancer ; par exemple pour la récurrence il m'a demandé pourquoi penser à la récurrence ? pourquoi traiter les 2 cas ? Pourquoi k est bien dans l'intervalle demandé ? je réponds à ces questions rapidement pour avancer,mais il revient aux même questions après un certain moment ce qui m'a beaucoup dérangé tout au long de l'oral, j'ai essayé de rester calme et de répondre aux questions posées.

1.4.5 • Exercice 5

1.4.5.1 • Enoncé

1. Énoncer et démontrer le théorème de projection
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$
3. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ est un produit scalaire
4. Calculer la distance de 1 à $\mathrm{Vect}(x, x^2, ..., x^n)$ pour $n \geq 1$ et pour le produit scalaire ci-dessus.

1.4.5.2 • Déroulement. Note : 18

L'examinatrice était très sympathique et l'exercice était classique, donc au lieu de faire beaucoup d'exercices je me suis focalisé sur la bonne manipulation des outils qu'on utilisait (justifier la convergence de l'intégrale de la question 2, bien poser l'hypothèse de récurrence, justifier qu'on peut intégrer par parties...). Pour la dernière question je lui ai dit que je veux utiliser les matrices de Gram, elle m'a suivie jusqu'à l'instant où j'ai posé le bon déterminant et elle m'a dit qu'on vas procéder autrement avec une méthode moins calculatoire, et pour le faire elle m'a aidé par 3 questions supplémentaires.

1.4.6 • Exercice 6

1.4.6.1 • Enoncé

Exo 1 :
Soit $\Omega = S_n$ et $\mathbb{P}$ la loi de probabilité équiprobable sur Ω.
- A_i l'événement "Les permutations possèdent i comme point fixe"
- N la variable aléatoire désignant le nombre de points fixes d'une permutation
- d_n le nombre de dérangements de S_n (permutations à points fixes)

1. (a) Rappeler la loi équiprobable
   (b) Calculer $\forall I \subseteq [\![1, n]\!]$ non vide, $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$
   (c) En déduire $\mathbb{P}(N > 0)$ (**On admet la formule du crible de Poincarré)**
   (d) En déduire d_n
2. (a) Comportement asymptotique de d_n lorsque n tend vers $+\infty$
   (b) Calculer $\mathbb{P}(N = k)$, $\quad \forall k \in [\![0, n]\!]$
   (c) Comportement asymptotique de $\mathbb{P}(N = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (k fixé)

Exo 2 :
Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}^*$, où M^k est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable. Que peut-on dire si $M \in GL_n(\mathbb{R})$?
Exo 3 :
Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$ tel que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ où $M^n = I_2$. Que dire de M ?

1.4.6.2 • Solution

Exo 1 :

1. (a) Voir cours

(b) Si le cardinal de $I = k$, alors pour choisir une permutation de $\bigcap_{i\in I} A_i$, c'est équivalent à fixer les k points déterminés par l'ensemble I et permuter $n-k$ points. Il y en a $\binom{n}{k}$ permutations de ce type. Et grâce à la probabilité uniforme, on a $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \binom{n}{k}/n!$.

(c) L'événement $(N > 0)$ est l'événement "La permutation admet au moins un point fixe" càd. qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ où i est un point fixe, ainsi on remarque que : $(N > 0) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On applique directement la formule du crible avec la question précedente. On retrouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N>0) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\\ &= \sum_{I\subseteq [\![1,n]\!],\, I\neq\varnothing} (-1)^{|I|-1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\\ &= \sum_{I\subseteq [\![1,n]\!],\, I\neq\varnothing} (-1)^{|I|-1}\,\frac{\binom{n}{|I|}}{n!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{(n-k)!k!}\end{aligned}$$

(d) Grâce à la probabilité uniforme, on peut calculer d_n qui est égale à $d_n = n!\,.\mathbb{P}(N=0)$. On peut retrouver $\mathbb{P}(N=0) = 1 - \mathbb{P}(N>0)$ par complémentarité des événements. On conclut finalement $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2. (a) On sait que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(-1)$. Donc $d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!e^{-1}$

(b) Pour choisir une permutation de $(N = k)$, il faut tout d'abord choisir les k points fixes : il y a alors $\binom{n}{k}$ choix possible. On choisit après un dérangement sur les points qui restent (il ne doivent pas être fixes) : il y a alors d_{n-k} choix possible. Ainsi avec la probabilité uniforme : $\mathbb{P}(N=k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{(n-k)!\,k!}$.

(c) Avec k fixé, on a $\mathbb{P}(N=k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}}{k!}$. C'est la loi de poisson comme paramètre $\lambda = 1$.

Exo 2 :
Par définition, le polynome minimal de M^k, π_{M^k}, est scindé à racines simples; on écrit alors : $\pi_{M^k} = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)$. On remarque alors que $\prod_{i=1}^{r}(X^k-\lambda_i)$, est un polynome annulateur de M, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, ainsi M est diagonalisable dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ce raisonnement ne fonctionne pas sur $GL_n(\mathbb{R})$, car ces types de polynomes ne sont pas forcément scindés sur $\mathbb{R}[X]$. Voir X^k-1, si $k \neq 1, 2$.

1.4.6.3 • Déroulement. Note : 16

Maths SR est l'oral le plus simple des X/ENS, c'est entre le niveau des Mines et X, avec un penchon vers le niveau des Mines. L'examinatrice était un peu frustrante, puisqu'elle me bloquait pour signaler une simple erreur d'inattention (oublier le signe -, même si je l'ai corrigé dans la ligne suivante..), mais dans l'ensemble c'était assez plaisant. Elle questionne beacoup sur le cours, et le côté qualitatif des probabilités et algèbre linéaire, càd. essayer d'estimer ce qui va se passer à l'infini, ou d'avoir l'intuition d'exemples de matrices en tête pour tout hypothèse... La feuille de l'oral c'est terminé à la question 1/d de l'exo 1, le reste m'a été dicté oralement, puisque j'avais fini assez rapidement les questions de la feuille, (je conaissais déjà les dérangements à priori, puisque je l'avais comme colle en spé). En gros, Maths SR c'est un oral à ne pas rater. Malgré la frustration d'avoir à faire 1h30 de trajet pour arriver à l'ENS Paris-Saclay depuis Montrouge, l'oral était assez plaisant, avec de bon examinateurs et des exos assez faciles pour se rappeler du cours et préparer à l'X, et pourquoi pas avoir l'ENS Paris-Saclay, et/ou Rennes.

1.4.7 • Exercice 7

1.4.7.1 • Enoncé

L'énoncé comportait des questions sur l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. elles concernaient les conditions pour qu'il soit un corps, les éléments inversibles dans l'ensemble des polynômes à coefficients dans cet anneau, leur cardinal dans des cas particuliers puis dans le cas général.

1.4.7.2 • Déroulement

Les questions étaient assez classiques et l'examinatrice m'interrompait à multiples reprises pour des questions de cours ou pour me demander de justifier les passages même les plus élémentaires. Elle me demande de traiter certaines questions de l'énoncé avec différentes méthodes et s'intéresse à la signification réelle du résultat.

2
ORAUX X

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

2.1 Maths

2.1.1 • Exercice 1

2.1.1.1 • Enoncé

On admet que

$$\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} g(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^t g(x,y)dydx$$

pour $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\not{\,2}} / x < y\}$ On pose

$$f : x \to \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} cos(t)^{2x} dt$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f
2. Montrer que
$$f(x) = \frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)}$$
3. Montrer que
$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2(x+1/2)}}{\sqrt{1-e^{-t^2}}} dt$$
4. En déduire que
$$\frac{1}{\sqrt{x+1/2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+1/4}} \leq 1$$

2.1.1.2 • Solution

4) Monter par étude de fonction que :

$$2 \leq \frac{t}{\sqrt{1-e^{-t^2}}}$$

et

$$\frac{te^{-\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-e^{-t^2}}} \leq 1$$

puis utiliser :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$$

2.1.1.3 • Déroulement

La question 1 est facile
Pour la question 2 , j'ai multiplié f avec Γ et j'ai essayé de le développer , j'ai proposé le changement de variable u=cos(t) et u=tan(t/2) je trouve que chacun des deux n'est pas plausible . l'examinateur me propose $u = cos^2(t)$ j'y travaille mais je fait une faute qu'y a impliqué que mes calculs suivant sont faussés et je trouve une intégrale incalculable. C'est à ce moment que l'examinateur me dit de vérifier le calcule . je le refait je trouve :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-\frac{1}{2}}}{2(1-u)^{\frac{1}{2}}} du$$

je propose de faire faire le changement de variable u=t*v (t c'est la variable de l'intégrale de Γ puis j'inverse les deux intégrale du produit $f * \Gamma$ en utilisant la formule donné , après un calcul j'obtiens la formule demandé.
la question 3 était facile il suffit de poser

$$cos(u) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

J'arrive à la question 4 , il me reste 2min , j'en est rien fait.

2.1.2 • Exercice 2

2.1.2.1 • Enoncé

Soit X un ensemble fini . $F \subset \mathcal{P}(X)$ tel que F stable par union dénombrable et

$$\bigcup_{A \in F} A = X$$

1. Donner un exemple simple
2. Montrer qu'il existe un sous ensemble C de X tel que :
   $\forall A \in F - \{\emptyset\} \quad A \cap C \neq \emptyset$ et $\forall c \in C \quad \exists A \in F, \quad A \cap C = \{c\}$
   On note $F_x = \{A \in F / x \in A\}$
3. Montrer que $card(F) \leq \sum_{c \in C} card(F_c)$
4. Montrer que $card(C) \leq \log_2(card(F) + 1)$

2.1.2.2 • Déroulement 1. Note : 12

L'examinateur était calme. en premier lieu, j'ai proposé un exemple convenable puis l'examinateur m'a donné la deuxième question,j'essayais de l'écrire au tableau puis j'ai resté bloqué pendant 5 min , l'examinateur intervient pour savoir qu'est ce que je raconte je lui disait que je parametrise le problème, il a remarqué que je suis bloqué et m'a aidé un peu pour bien comprendre et m'a proposé de considérer un plus petit ensemble tel que l'intersection avec tous les éléments de F soit non vide puis j'ai pensé à raisonner par l'absurde et finalement j'ai pu résoudre le problème avec un peu d'aide de l'examinateur. la deuxième question était sans difficulté et quand j'ai passé à la troisième question le temps s'est écoulé.

2.1.2.3 • Déroulement 2. Note : 8

Examinateur très silencieeeeux!!! Il reste assis dans le fond de la salle en regardant sa tablette durant presque toute l'épreuve. Il m'a dicté l'énoncé brièvement (qui était très théorique) avant de rester silencieux pendant 40 min. J'ai beau essayé de reformuler les problème et de proposer quelques pistes mais il ne faisait que .... Étant donné que j'avais aucune idée par où commencer, j'ai pensé que le plus simple est de montrer l'existence par absurde (surtout que je vais avoir un « pour tout » au lieu de « il existe » ce qui me permettra de prendre les cas particuliers que je veux). Le problème était dans le « ou » que j'ai eu au lieu de « et », tous les ensembles que j'ai essayé de poser vérifient une propriété sans pour autant vérifier l'autre. Après 40 min de manipulations individuelles, l'examinateur a parlé pour la première fois en me disant un fameux : « on considère l'ensemble suivant ... » (voir énoncé). Il m'a demandé de justifier l'intérêt de cet ensemble, question auquel j'ai su répondre facilement, puis j'ai utilisé cet ensemble dans mon raisonnement par absurde, et dans les 2 dernières minutes l'examinateur m'a demandé de finir le raisonnement oralement vu la contrainte de temps. FIN D'ORAL.

2.1.3 • Exercice 3

2.1.3.1 • Enoncé

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f(0) \neq 0$. On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+tx} dt$.

1. Trouver un équivalent de g en $+\infty$.
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver une majoration de la différence entre g et son équivalent dans ce cas.

2.1.3.2 • Solution

1. Tout d'abord, g est définie au moins sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. De plus, pour deviner l'équivalent de g, on prend $f = \lambda$ constante sur $[0,1]$, ainsi on obtient que, pour $x > 0$:

$$g(x) = \lambda \int_0^1 \frac{1}{1+tx} dt = \lambda \frac{\ln(1+x)}{x}$$

En remarquant que $f(0) = \lambda$, on obtient comme équivalent :

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} f(0) \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Peut-on montrer d'une manière plus générale que (2) est un équivalent de g ?
Soit $x > 0$:

$$g(x) - f(0)\frac{\ln(1+x)}{x} = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+tx} dt - \int_0^1 \frac{f(0)}{1+tx} dt = \int_0^1 \frac{f(t)-f(0)}{1+tx} dt$$

Donc :

$$|g(x) - f(0)\frac{\ln(1+x)}{x}| \leq \int_0^1 \frac{|f(t)-f(0)|}{1+tx} dt$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue en 0, alors il existe $0 < \eta < 1$ tel que $\forall t \in [0,\eta] : |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$. Et donc :

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(0)\frac{ln(1+x)}{x}| &\leq \varepsilon \int_0^\eta \frac{1}{1+tx} dt + \int_\eta^1 \frac{|f(t)-f(0)|}{1+tx} dt \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{1+tx} dt + 2\|f\|_\infty \int_\eta^1 \frac{1}{1+tx} dt \\
&\leq \varepsilon \frac{\ln(1+x)}{x} + 2\|f\|_\infty (\frac{\ln(1+x) - \ln(1+\eta x)}{x})
\end{aligned}$$

On a $\frac{\ln(1+x)-\ln(1+\eta x)}{x} = o(\frac{\ln(1+x)}{x})$, donc il exite $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$:

$$|\frac{\ln(1+x) - \ln(1+\eta x)}{x}| \leq \varepsilon \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Ainsi pour tout $x \geq A$:

$$|g(x) - f(0)\frac{ln(1+x)}{x}| \leq (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On déduit que :

$$|g(x) - f(0)\frac{ln(1+x)}{x}| = o(f(0)\frac{\ln(1+x)}{x})$$

D'où :

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} f(0)\frac{\ln(1+x)}{x}$$

2. Comme f est $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $t \in [0,1]$: $|f(t) - f(0)| \leq \|f^{'}\|_\infty t$ (Inégalité des accroissements finis). Ainsi :

$$|g(x) - f(0)\frac{ln(1+x)}{x}| \leq \|f^{'}\|_\infty \int_0^1 \frac{t}{1+tx}dt$$

Par le changement de variable $u = tx$, on trouve que :

$$\int_0^1 \frac{t}{1+tx}dt = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Donc, pour tout $x > 0$:

$$|g(x) - f(0)\frac{ln(1+x)}{x}| \leq \frac{\|f^{'}\|_\infty}{x}$$

2.1.3.3 • Déroulement. Note : 13

Pour la première question, le problème primordial était de deviner l'équivalent de g. J'ai pensé à caluler la limite de g en $+\infty$ qui est nulle, en utilisant la CVD généralisée. Ainsi, j'ai déclaré que je dois trouver un équivalent qui tend aussi vers 0. Mais, l'examinateur m'a interrompu pour me demander s'il est vraiment de passer par un outil assez fort pour calculer la limite, et donc j'ai passé autrement en majorant g par une intégrale qui s'avère être utile par la suite. A ce stade, l'équivalent n'est pas encore trouvé, j'ai pensé alors à passer par des cas particuliers pour f (une astuce que j'ai apprise pendant les oraux d'ENS), j'ai pris alors f constante, et ayant le sentiment que l'éauivalent doit nécessairement faire figurer $f(0)$, j'ai pu deviné finalement celui-là. L'examinateur m'a incité directement à considérer la différence entre g et cet équivalent. En manipulant cette différence, j'ai commis une erreur qui m'a sûrement coûté des points, j'ai fait figuré dans le tableau des symboles $\Longrightarrow$ (comme si j'écris dans un brouillon). L'examinateur m'a demandé pourquoi ces implications, j'ai dit que c'est pas vraiment une implication, c'est juste par rapidité que je les ai écrites, et il a noté cette faute grave dans son cahier. Donc faites attention à ce que vous écrivez sur le tableau ! ! Après, j'ai pensé utiliser la définition classique d'équivalence entre deux fonctions, et en utilisant la continuité de f en 0, j'ai pu diviser le segment d'intégration. L'examinateur m'a confirmé que c'est une bonne idée, et puis m'a laissé manipuler les majorations nécessaires, en chattant parfois sur son téléphone, un comportement qui m'a paru irrespectueux. De plus, dès que j'annonce une idée avant de la développer, il me dit simplement : 'C'est à vous de voir !'. Et à un certain stade, il m'a demandé de montrer que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. Face à toutes ces provocations, j'ai pu rester calme. Donc ne vous déstabilisez pas face aux provocations de l'examinateur ! Passons à la deuxième question, j'ai eu plus de 15 minutes pour traiter cette question simple, mais je l'ai ratée en allant dans une fausse piste, car j'ai essayé de faire une IPP pour faire figurer $f^{'}$, mais ça ne donne pas une bonne majoration. Avant une minute de la fin, l'examinateur m'a demandé qu'est ce qu'on a de plus maintenant sur $f(t) - f(0)$, j'ai écrit alors sur le tableau l'inégalité des accroissements finis, et l'oral s'est terminé. En général, les examinateurs de l'X sont souvent silencieux et provocants, contrairement à ceux de l'ENS, il faut alors s'habituer à être autonome face à de telles situations !

2.1.4 • Exercice 4

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

2.1.4.1 • Enoncé

On pose

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pour } n \geqslant 3 \end{cases}$$

1. Calculer : $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$
   On veut calculer le nombre moyen de lancers possibles d'une piéce de monnaie pour obtenir pour la première fois la séquence (F, F)
2. Interpréter la valeur de S d'me manière problabiliste
3. Modéliser le problème en introduisant une V.A.D X
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$

2.1.4.2 • Solution

1. on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{2^k}$
   on peut directement poser $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $$a_n = \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n$$
   avec φ : le nombre d'or , on déduit directement que (S_n) converge
   à l'aide de la relation de récurrence de a_n on a :
   $$S_{n+2} = \frac{S_{n+1}}{2} + \frac{S_n}{4} + \frac{1}{4}$$
   par passage à la limite on trouve que $S = 1$
2. cours
3. on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux faces consécutives. Pour $n \geq 2$ on note p_n la probabilité $P(X = n)$
   on note A :" obtenir (F, F) pour les deux premièrs lancers "
   B :" obtenir (F, P) pour les deux premièrs lancers "
   C :" obtenir (P, F) pour les deux premièrs lancers "
   D :" obtenir (P, P) pour les deux premièrs lancers "
   on a $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$
   les événements A, B, C et D forment un système complet d'événements donc
   $$P(X = n+2) = \frac{1}{4}[P(X = n+2|A) + (P(X = n+2|B) + (P(X = n+2|C) + (P(X = n+2|D)]$$
   donc
   $$p_{n+2} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{4}$$
   or $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n = \frac{a_n}{2^n}$
4. on a
   $$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} np_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{na_n}{2^n}$$
   en utilisant la relation de récurrence de (p_n), on trouve que $E(X) = 6$

2.1.4.3 • Déroulement 1. Note : 9

C'était l'oral qui m'a détruit psychologiquement, pour la première question j'ai trouvé l'expression explicite de a_n puis j'ai essayé de calculer S, l'examinateur m'a dit que vous devez établir la convergence de S_n, je l'ai fait, après des lignes de calculs (plus le stress), quelle surprise je trouve $S = 0$, j'ai essayé de trouver où j'ai fait l'erreur mais j'ai pas réussi, j'ai essayé de demander à l'examinateur où j'ai trompé, il m'a dit "c'est moi qui doit vous poser cette question ce n'est pas vous", j'ai essayé de rester calme, puis l'examinateur m'a demander de trouver une relation de récurrence de S_n, je l'ai fait mais avec beaucoup d'erreurs de calculs, enfin je trouve la valeur S, puis l'examinateur m'a dicté les trois questions, au moment où je veux exprimer mon idée, il m'a dit " à titre indicatif la première question c'est une question préliminaire", cela m'a vraiment affecté, j'ai continué mon raisonnement en restant calme, j'ai définit p_n et j'ai proposé d'établir que $p_n = \frac{a_n}{2^n}$, j'ai introduit les événements A, B, C et D, l'examinateur ne faisait aucune réaction, il regardait juste son ordinateur, j'ai continué à présanter mon idée, au moment où j'avais écrit la formule de probabilité totale, l'oral était terminé. J'était vraiment déçu de ma prestation vu que l'exercice était très facile, un conseil à l'oral de l'X, il faut éviter les erreurs de calculs.(Note : 9) c'était ma note minimale à l'X, heureusement, j'ai pu rattraper cette note catastrophique.

2.1.4.4 • Déroulement 2. Note : 12

L'examinateur était neutre, pour la première question, j'ai calculé le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et puis j'ai remplacé dans l'expression de S , c'est une série géométrique mais qui nécessite un peu d'attention aux calculs faits.l'examinateur m'a ensuite proposé une autre méthode plus facile et plus rapide en notant $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ et en utilisant la relation récurrente , ce qui donne $S(x) = \frac{x^2}{1-x-x^2}$ et on remplace par $1/2$. la deuxième question consistait à utiliser la première question en remarquant que la probabilité pour avoir FF la première fois au n-ième tirage est $\frac{a_n}{2^n}$ et donc pour trouver le nombre moyen de tirages demandé il suffit de calculer l'espérance de la variable aléatoire qui représente le rang du premier tirage de FF. c'est bien ce que j'ai fait mais je me suis bloqué pour montrer que la probabilité pour avoir FF la première fois au n-ième tirage est $\frac{a_n}{2^n}$,l'examinateur m'a proposé de voir la suite des tirages comme une séquence de P et F et puis raisonner par dénombrement. j'ai réfléchit un peu puis j'ai répondu.la troisième question était évidente mais j'ai pas fait les calculs puisque l'oral s'est terminé. attention aux erreurs de calcul , ils m'ont coûté au moins 2pts dans cet oral.

2.1.5 • Exercice 5

2.1.5.1 • Enoncé

Exo 1 : Soient G un groupe fini d'ordre $m \geq 1$ et ϕ un automorphisme de G vérifiant :

- $(\forall g \in G)$ si $\phi(g) = g$, alors $g = 1$
- $\phi^n = id_G$, $n \geq 1$ ($n \neq m$ à priori)

1. Calculer le produit $g\phi(g)...\phi^{n-1}(g)$ pour $g \in G$
2. Pour n=2, montrer que G est abélien
3. Pour n=3, montrer que g et $\phi(g)$ commuttent pour tout $g \in G$

Exo 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$
On suppose que f' ne s'annulle qu'une fois seulle fois en un point $M \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $(\exists!\, m \in \mathbb{R})$ / $\int_{-\infty}^{m} f(t)dt = 1/2$
2. Tracer le tableau de variations de f
3. Soit $0 < \alpha < f(M)$
   Montrer que $(\exists!\, (x_1, x_2) \in]-\infty, M[\times]M, +\infty[)$ / $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$

2.1.5.2 • Déroulement. Note : 14

J'ai commencé par traiter la cas évident où G est abélien (dans ce cas, il suffisait de calculer $\phi(x\phi(x)...\phi^{n-1}(x)))$. Ensuite, une dizaine de minutes de silence s'est établie suite à mon blocage, l'examinateur m'a demandé de regarder le cas où $x = g^{-1}\phi(g)$ mais en calculant le produit j'ai fait beaucoup d'erreurs en confondant les puissances de $\phi(g)$ en tant qu'élément de G et les composés $n-$èmes de ϕ... Après avoir finis les calculs, je lui ai dit que je veux comprendre $\{g^{-1}\phi(g)/g \in G\}$ et plus précisément qu'il est égale à G (sans raison intuitive à priori). J'ai de même commencé par traiter le cas abélien en remarquant que $g \mapsto g^{-1}\phi(g)$ est un morphisme injectif de groupes finis, donc surjectif. Pour le cas générale, j'ai essayé de résoudre l'équation $x = g^{-1}\phi(g)$ d'inconnu $g \in G$ et de paramètre $x \in G$ mais je n'y ai pas parvenus. Après un temps de réflexion, j'ai remarqué que le groupe est fini donc l'application $g \mapsto g^{-1}\phi(g)$ allant de G dans lui même est surjective ssi elle est injective, et son injectivité est évidente. Le reste des questions ne présentait aucune difficulté particulière et ainsi je n'avait aucun échange intéressant avec l'examinateur en traitant celles-ci.

2.1.6 • Exercice 6

2.1.6.1 • Enoncé

1. Quel est le domaine de définition de la fonction :

$$f : x \to \int_0^{\pi/2} cos(t)^{2x} dt$$

2.1.6.2 • Solution

Il suffit de constater que $cos(t) \leq \pi/2 - t$ lorsque $0 \leq t \leq \pi/2$ et conclure d'après le critère de Reimann, sans oublier la continuité. On trouve le domaine de définition $]-1/2, +\infty[$.

2.1.6.3 • Déroulement. Note : 6

Question très facile (début d'un exercice plus dur, voir l'oral numéro 51), mais à cause du stress puisque c'était ma première épreuve à l'X, je l'ai raté. L'examinateur n'a pas aidé ; il se moquait de moi en me demandant de tracer la courbe de cosinus et en me disant est-ce que j'ai jamais étudié le cosinus. Il m'a demandé ce qu'était le cosinus de 0 et $\pi/2$, quelle est la fonction dérivée de cosinus en se moquant et me disant "Tu as fait ça dans la terminale non ?", puis il m'a demandé de réciter le critère de Reimann. J'ai réussi enfin à me rappeler de l'inégalité, mais c'était trop tard. Ça m'a affecté beacoup cette épreuve, puisque je pensais que l'X était fini pour moi (c'était en plus ma première épreuve à l'X), mais Dieu avait d'autres plans. Un 6/20 bien déservé. J'ai probablement eu un 6 au lieu d'un 2, car j'ai raisonner graphiquement à l'aide de la convexité pour retrouver des inégalités, qui certes n'ont aidé à rien, mais m'ont aidé à ne pas resté figé devant le tableau. Il faut toujours faire quelque chose et essayer de donner des idées, même s'ils n'aboutissent à rien, ça aide pour le raisonnement, et ça aide aussi l'examinateur à vous évaluer sur vos compétences.

2.1.7 • Exercice 7

2.1.7.1 • Enoncé

On pose :

$$C(x) = card\{(k,m) \in \mathbb{N}^2 / k^2 + m^2 \leq x^2\}$$

Trouver un équivalant simple de C au voisinage de $+\infty$

2.1.7.2 • Solution

On a

$$C(x) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{N}^2/k^2+m^2\leq x^2} 1 = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor} \sum_{m\in\mathbb{N}/m\leq\sqrt{x^2-k^2}} 1$$

Donc

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(1 + \lfloor\sqrt{x^2-k^2}\rfloor)$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(1 + \lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor^2-k^2}\rfloor) \leq C(x) \leq \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor+1}(1 + \lfloor\sqrt{(\lfloor x\rfloor+1)^2-k^2}\rfloor)$$

pour un entier n, on pose :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n}(1 + \lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2} \leq f(n) \leq \sum_{k=0}^{n}(1+\sqrt{n^2-k^2})$$

or

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi n^2}{4}$$

donc

$$f(\lfloor x\rfloor+1) \underset{+\infty}{\sim} f(\lfloor x\rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\lfloor x\rfloor^2}{4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi x^2}{4}$$

Ainsi

$$C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi x^2}{4}$$

2.1.8 • Exercice 8

2.1.8.1 • Enoncé

Soit A et B deux matrices symétriques positives, et soit $C = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$. Montrer que C est symétrique positive.

2.1.8.2 • Déroulement. Note : 9

Examinateur un peu sympa même s'il ne parle pas trop. La symétrie était très facile à montrer et je l'ai faite rapidement. Il reste la positivité, j'ai explicité le calcul matriciel et l'examinateur m'a demandé si on pouvait conclure sur un cas particulier de B (oui le cas ou $B = {}^tXX$ avec X une matrice colonne), puis il m'a demandé de généraliser, j'ai pensé à appliquer le théorème spectral sur B pour avoir la forme $B = {}^tMM$ mais le problème est que $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors que X est une matrice colonne. L'examinateur m'a dit qu'il apprécie ma démarche mais la première forme des matrice (${}^tXX$) est un cas très particulier qui a une spécificité (matrice de rang 1) il m'a demandé ensuite de lui citer les caractéristiques des matrices de rang 1 (classique), à ce stade j'ai conjecturé que pour répondre à la question il faut montrer que toute matrice symétrique s'écrit comme somme de matrices de rang 1 (on peut facilement montrer que toute matrice de rang 1 s'écrit comme le cas particulier du début), le problème réside dans la nature de ces vecteurs colonnes choisis qui vont faire l'affaire, après quelques manipulations j'ai pu montrer que ces colonnes doivent être nécessairement des vecteurs propres de B, l'examinateur m'a dit que c'est juste mais ils doivent vérifier une condition supplémentaire, j'ai pensé un peu, j'ai proposé de prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux, l'examinateur a répondu par OUI mais l'oral est terminé.

2.1.9 • Exercice 9

2.1.9.1 • Enoncé

On dit que $E \subset \mathbb{N}^*$ est indépendante si : $\forall \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $\forall n_i \in E$, $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{i=0}^{r} \varepsilon_i n_i \neq 0$ Montrer que si E est une partie indépendante alors :

$$Card(E \cap [1, x]) \underset{x \to +\infty}{=} O(ln(x))$$

2.1.9.2 • Déroulement. Note : 9

Un examinateur silencieux qui ne réagit pas avec les différentes idées que je proposais, après plusieurs tentatives qui n'ont pas aidé à la résolution de l'exercice, j'ai pensé à chercher une partie E infinie et indépendante pour montrer le résultat dans ce cas particulier, l'examinateur a enfin parlé en disant que cela peut aider à résoudre le cas général, J'ai pensé au premier lieu à l'ensemble des impaires mais une fois que je l'ai posé j'ai trouvé un contre-exemple, puis j'ai posé $E = \{2^p, p \in \mathbb{N}\}$ en raisonnant toujours sur la parité des elts, l'examinateur n'était pas convaincu que cet ensemble répondait aux contraintes, mais il était effectivement indépendant, après que j'ai démontré le résultat pour cette partie, l'examinateur m'a dit qu'on doit passer maintenant au cas général, j'ai d'abord trouvé une autre définition plus simple d'une partie indépendante, puis j'ai élaboré une première inégalité que j'ai trouvé inutile à la résolution mais l'examinateur pensait au contraire, l'oral était fini. La note était raisonnable après que j'ai su qu'un autre candidat avait pu résoudre cette question et plein d'autre questions.

2.1.10 • Exercice 10

2.1.10.1 • Enoncé

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha A + \beta B$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les racines de A et B sont entrelacées. (Entre chaque racine de A, il existe une racine de B)

2.1.10.2 • Indication

À démontrer comme seconde question. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière au voisinage de $c \in U$, et tels que $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad f(z) \underset{z \to c}{=} O((z-c)^k)$, alors pour $r > 0$ suffisamment petit, il existe $(z_1, \dots, z_{2k}) \in U^{2k}$ où $\forall i \in [\![1, 2k]\!] \quad |z_i - c| = r$ et $f(z_i)$ réel.

2.1.10.3 • Déroulement. Note : 13

J'ai commencé tout d'abord par mentionner les polynômes orthogonaux et après 1 min de réflexion, j'ai déduit que je ne l'ai utiliserais pas. L'examinateur m'a ensuite posé l'indication et m'a demandé de l'utiliser, il a ensuite allumé son téléphone et a commencé un appel de 15min qui m'avait choqué, car quand j'esseyais d'expliquer mon raisonnement au tableau, je me retourne et je le vois en train de regarder par la fenêtre en parlant avec quelqu'un sur le téléphone. J'ai conclu que c'est peut-être une méthode pour bouleverser les candidats, et les stresser (comme le font beaucoup d'autres examinateurs), j'ai resté calme, et j'ai continuer l'exercice. Quand l'examinateur a remarqué que j'ai presque fini la première question en utilisant les séries entières, il m'a dit que je pouvait utilisé le résultat de Maths B 2023 qu'on a passé : "Une fraction de séries entières est une série entière". J'ai utilisé le résultat et j'ai conclut par l'absurde. IL restait 20min pour la seconde question, j'ai remarqué que c'était de l'analyse complexe, et donc je devais utiliser le calcul différentiel, mais je n'arrivais pas à voir comment. Pour passer le temps, j'ai fait des schémas au tableau, que l'examinateur a bien aimé, puis j'ai essayé de travailler sur l'exemple $x \longmapsto x^n$, et après le temps s'est écoulé, et j'ai finit l'épreuve. L'examinateur était très sympa, si on néglige le fait qu'il était sur son téléphone pendant la séance.

2.1.11 • Exercice 11

2.1.11.1 • Enoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \sim \mathbb{U}\{1, \dots, n\}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que, si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors :
$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = e_{X_i}$

1. Calculer $\mathbb{E}(\text{rang}(f))$
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note μ_z la variable aléatoire désignante la multiplicité de z comme valeur propre de f. Calculer $\mathbb{E}(\mu_z)$.

2.1.11.2 • Déroulement. Note : 8

Au début j'essaie de calculer les proba de f : $P(rg(f) = k)$ puis $P(k \leq rg(f))$ mais en vain , après 20 min de réflexion , il me propose d'écrire :

$$rg(f) = \sum_{k=0}^{n} 1_i$$

avec 1_i est la fonction indicatrice si l'image de f contient e_i
il suffit donc de calculer :

$$P(e_i \in Im(f))$$

c'est aussi difficile à calculer , je propose l'opposé

$$P(e_i \notin Im(f)) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

la question 2 était pour moi hyperdifficile il m'a dit de commencer d'abord par z=0 , mais la difficulté n'a pas changé .
je fait la faute en s'intéressant à ker(f) qui était facile plutôt que l'espace caractéristique de 0 .
après qu'il me déclare ma faute , j'y essaie d'avancer mais vainement , il me demande de montrer l'égalité : c'est jusqu'à après 15min qu'il me donne une autre indication .

$$\{i \in [1, n] / \exists k \in N f^k(e_i) = e_i\} = Im(f^{n!})$$

je le montre .
temps fini. Jusqu'au moment, je sais pas pourquoi il m'a donné cette note pour en tenant en considération l'oral était tordu.

2.1.12 • Exercice 12

2.1.12.1 • Enoncé

Soit $n, k \geq 1$ et $0 \leq e_1 < e_2 < \ldots < e_k$ des entiers tels que $n = \sum_{i=1}^{k} 2^{e_i}$.
Montrer que le nombre de coefficients binomiaux impairs dans la décomposition de $(a+b)^n$ (pour a, b des réels) est 2^k

2.1.12.2 • Indication

Montrer que $v_2(n!) = n - k$

2.1.12.3 • Déroulement. Note : 12

Face à cet exercice, la seule idée que j'avais est de passer par une récurrence. Je me suis demandé alors si une telle écriture de n est valable pour tout $n \geq 1$ et j'ai remarqué que ce n'est que l'écriture de cet entier dans la base 2, c'était une remarque très utile pour la suite. Je me suis entamé donc dans ma récurrence, mais c'était inutile, l'examinateur m'a demandé de montrer l'indication ci-dessus, et pour la seconde fois, j'ai opté pour une récurrence, le cas où n est pair étant simple, je me suis bloqué alors dans le deuxième cas, après quelques tentatives inutiles, l'examinateur m'a demandé de voir la somme de n et 1 en base 2 et m'a expliqué comment cela donne le résultat voulu, je n'ai pas compris ça au début, et donc j'ai décidé de ne pas bluffer et passer cette indication sans la comprendre, par contre je me suis arrêté pour bien assimiler ses explications et j'ai même reformulé ce que j'ai compris avant de passer. A ce stade, je dois chercher les entiers i pour lesquels $v_2(\binom{n}{i}) = 0$, j'ai trouvé une égalité qui doit être vérifiée, l'examinateur m'a dit qu'on a toujours une inégalité dans un sens et m'a demandé de trouver les cas d'égalité. Je me suis bloqué un peu avant qu'il m'annonce qu'il correspond au cas où on n'a pas de retenus dans la somme en base 2 de i et $n - i$ et m'a demandé de réfléchir à cela tout seul puisque l'oral s'est terminé.

2.1.13 • Exercice 13

2.1.13.1 • Enoncé

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p ($n \geq 2$ et $p \in]0,1[$) et soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_n \leq k) = (n-k)\binom{n}{k} \int_p^1 t^k (1-t)^{n-1-k} dt$
2. On pose $f_{n,k} = (n-k)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-1-k}$
   Montrer que $\int_0^1 f_{n,k}(t)dt = 1$
3. Calculer $\mu_{n,k} = \int_0^1 t f_{n,k}(t)dt$
4. Étudier la monotonie de $f_{n,k}$ et déterminer son maximum sur $]0,1[$, on note le point où ce maximum est atteint $M_{n,k}$

2.1.13.2 • Déroulement 1. Note : 11

L'examinateur était sympa et attentif, l'exercice était sans difficulté majeure, il y avait beaucoup de calculs à faire, il n'y avait pas un échange intéressant.

2.1.13.3 • Déroulement 2. Note : 13

L'exercice était fort calculatoire et ne présentait aucune difficulté fondamentale, j'ai fait beaucoup d'erreurs de calculs lors de l'oral mais, dans la majorité des cas, je les ai corrigés en autonomie.

2.1.14 • Exercice 14

2.1.14.1 • Enoncé

Considérons la suite suivante :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = sin(a_n).$$

Étudier la convergence de $\sum\limits_{n \geq 1} a_n^2$.

2.1.14.2 • Solution

En effet, $]0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sin, le premier terme étant 1, alors $(a_n)_n$ est bornée. De plus, sur cet intervalle $sin(x) < x$, donc $(a_n)_n$ est décroissante, et admet une limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a $sin(l) = l \implies l = 0$.

Ici, l'idée du début est qu'il faut développer la grandeur suivante :

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{sin^2(a_n)} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{(a_n - \frac{a_n^3}{6} + O(a_n^4))^2} - \frac{1}{a_n^2}$$
$$= \frac{1}{a_n^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{a_n^2}{3} + O(a_n^3)} - 1\right) = \frac{1}{a_n^2}\left(\frac{a_n^2}{3} + O(a_n^3)\right) = \frac{1}{3} + O(a_n) \sim \frac{1}{3}$$

On en déduit alors que $\sum(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2})$ diverge, on obtient alors un équivalent de la somme partielle :

$$\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\right) \sim \frac{n}{3} \implies a_n^2 \sim \frac{3}{n}$$

On en déduit alors que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sim 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme harmonique qui diverge.

2.1.14.3 • Déroulement. Note : 6

Un exercice à première vue pas très difficile, c'est en fait un exercice de Maths en tête Analyse page 218, je ne l'avais jamais vu avant, j'ai commencé alors à montrer des résultats facilement remarquables. Dès les premières minutes, j'avais établi que $(a_n)_n$ était bornée et décroissante de limite nulle, rien de bien difficile pour l'instant. Le comportement de la suite était alors connu mais encore insuffisant, connaître la vitesse de convergence était primordial pour résoudre la question. J'essayais de comparer $(a_n)_n$ à des fonctions usuelles, l'examinateur est resté neutre et silencieux. Je tournais en rond pendant au moins 20 minutes, en essayant de trouver un équivalent, une inégalité, une domination, mais rien de ce que j'ai fait n'aboutissait, l'examinateur observait ce que je faisais mais n'intervenait pas. J'avais jusque là établi que $a_n \sim a_{n+1}$, mais c'était évident et pas trop intéressant, pendant ces 20 minutes, j'ai suggéré d'étudier le comportement de $a_{n+1} - a_n$ puis de $a_{n+1}^2 - a_n^2$ pour voir comment se comportent ces différences, je me suis plongé dans des calculs trop compliqués. J'essayais d'échanger avec l'examinateur, mais il demeurait indifférent et assez distant en commentant ce que je faisais sans dire si c'était bon ou pas. Après quelques minutes de blocages, je me plongeais à chaque fois dans des calculs plus lourds où j'ai fait quelques fautes qui ont sûrement coûté des points, toutefois je n'arrivais pas à exhiber une comparaison de $(a_n)_n$ avec des suites usuelles. A ce stade il ne restait plus que 15 minutes pour la fin de l'oral, je commençai à me décourager, mais l'examinateur me lança une indication et me dit de montrer que $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ce qui permettra de conclure sur une divergence de la série, je lui dit qu'un raisonnement par récurrence me paraissait convenable, il ne me contestait pas, je m'y suis alors lancé, j'ai avancé dans mon raisonnement sans pouvoir conclure. L'oral était fini, un exercice bien technique, dont le bout du fil n'était pas facile à remarquer, cependant il reste très intéressant.

2.1.15 • Exercice 15

2.1.15.1 • Enoncé

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que ω admet un polynôme annulateur minimal à coefficients dans $\mathbb{Q}$
2. Expliciter le polynôme π_ω.
3. Montrer que $(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ est libre.
4. Montrer que $Vect_{\mathbb{Q}}(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ est un corps.

Remarque : L'examinateur a donné l'énoncé question par question, et non pas tout le sujet au début de l'épreuve orale.

2.1.15.2 • Déroulement

J'ai bien aimé le sujet, car nous avions déjà vu en classe des exercices similaires sur l'existence et la recherche du polynome minimal. On peut donc qualifier cet exercice de "classique".

1. C'était simple. Il suffit de s'en rappeler des formules vu au bac et en sup. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. Une fois polynome annulateur dans $\mathbb{Q}[X]$, la suite du raisonnement est connu par tout le monde !
2. Je pense que c'est la question la plus dure de l'exercice !
   - C'est elle qui m'a pris presque la moitié de la séance !
   - J'avais pris une initiative pour montrer que :

$$\pi_\omega = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

et c'était un bon choix. Mais pour le montrer, j'ai bloqué sur un passage. Heureusement l'examinateur m'a donné une indication.

3. C'était évident
4. J'ai juste commencé à réfléchir et la séance est finie. En gros j'ai expliqué à l'examinateur, que ce je voulais faire mais je ne l'ai pas fait au tableau !

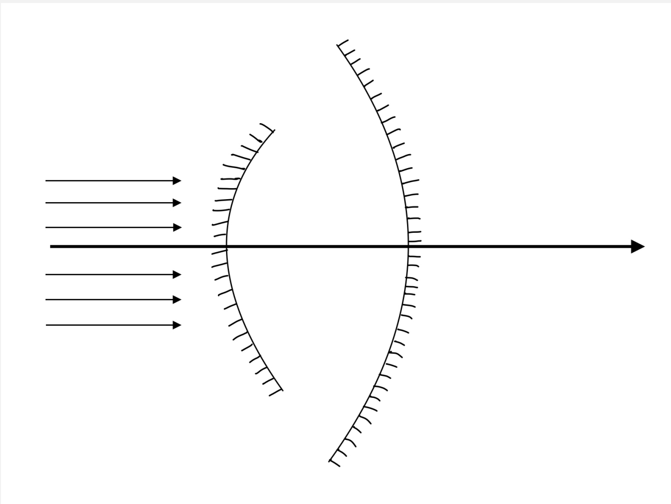
Les notes et les déroulements présentés ci-dessous sont le résultat d'élèves très bien notés et sont fournis à titre illustratif uniquement. Ils ne reflètent pas nécessairement la réalité des accomplissements ou des compétences de tous les étudiants. Les performances académiques individuelles peuvent varier, et ces exemples ne doivent pas être considérés comme représentatifs de l'ensemble de des candidats. Le but de partager ces exercices est de présenter un travail exemplaire plutôt que de faire des généralisations sur les capacités académiques de tous les étudiants. Les lecteurs sont encouragés à interpréter le contenu en tenant compte du contexte spécifique et des différences individuelles dans les expériences éducatives et les résultats.

Il est fortement recommandé de consulter les statistiques officielles et de ne jamais oublier de solliciter l'avis du professeur. N'oubliez jamais l'importance du travail acharné dans votre parcours académique. Les réussites varient d'un individu à l'autre, et il est essentiel de rechercher des informations précises tout en maintenant un engagement constant envers l'effort et la persévérance.

2.2 Physique

2.2.1 • Exercice 1

Donner la condition sur la distance entre les deux miroirs pour que l'image des rayons soient sur la miroirs à droite .(c'est à vous de fixer la distance focale des deux miroirs)



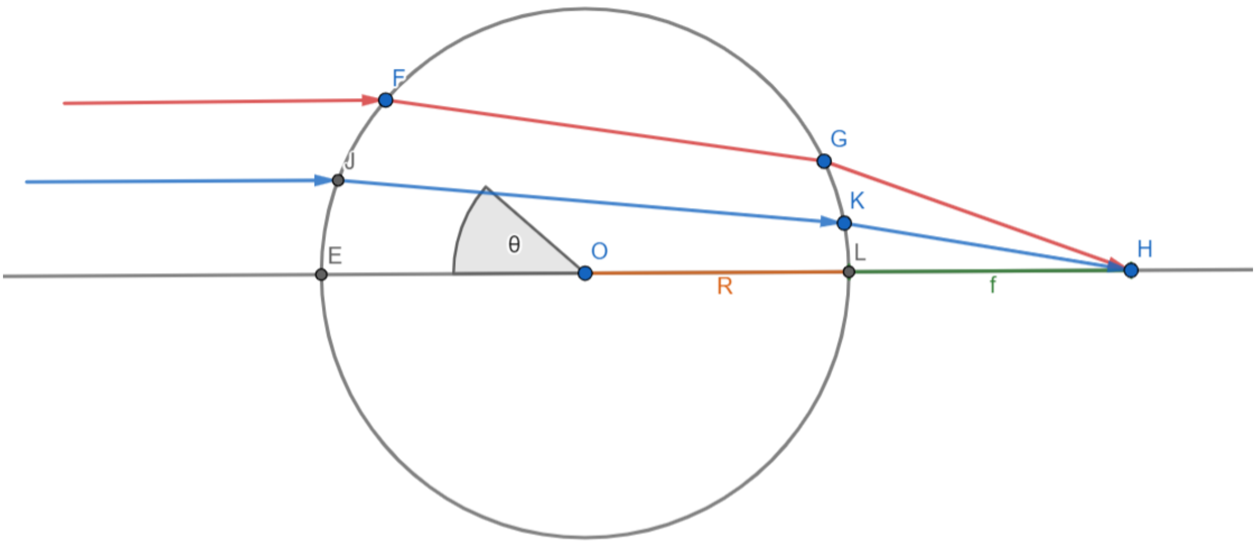
2.2.2 • Exercice 2

2.2.2.1 • Enoncé

Calculer la distance focale d'une boule de verre.

2.2.2.2 • Déroulement. Note : 11

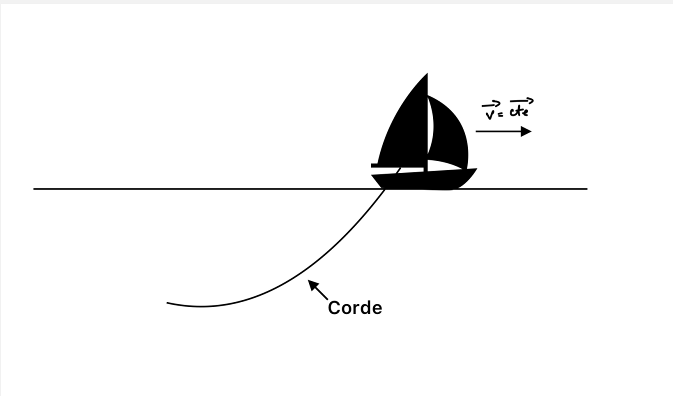
J'ai commencé par essayer de tracer un schéma :



Puis j'ai essayé de simplifier le problème en supposant que le rayon de la sphère est très grand, pour que je puisse travailler avec un gradient d'indice, et que je retourne à la fibre optique. L'examinateur m'a donc informé que l'indice d'une sphère est constant, et que le rayon doit rester normal (pas d'approximation). J'ai ensuite essayé de calculer la déviation d'une onde venant de l'infini parallèle à l'axe optique, en fonction de l'angle θ qui représente l'angle entre le premier point de collision de l'onde avec la sphère et l'axe optique. Après du calcul et des schémas, en utilisant la relation de Snell-Descartes, j'ai retrouvé $D(\theta)$. J'ai ensuite procédé par conclure avec une équation. Même si j'avais cité que je travaillais dans les conditions de Gauss au début de l'exercice, j'avais oublié de l'appliquer pour linéariser l'équation ; l'examinateur me l'a rappelé, j'ai ainsi retrouvé $f(n)$. J'avais fini 15 min plus tôt, l'examinateur m'avais dit que j'avais fini l'exercice, et a procédé par me demander plusieurs questions de cours. L'optique géométrique, que je n'avais révisé qu'avant l'écrit, n'étais pas mon point fort, j'ai donc raté toute les questions de cours sur l'aplanitisme, l'aperture, le stigmatisme... Le fait que j'avais raté toutes les questions de cours m'a diminué la note de plusieurs points, malgré que j'avais résolu l'exercice. Pendant toute l'épreuve, avant les questions de cours, l'examinateur avait seulement dit : "Calculer la distance focale d'une boule de verre." "n est constant et la boule est normale". "Conditions de Gauss". C'est tout.

2.2.3 • Exercice 3

Un bateau tire une corde , étudier sa forme.



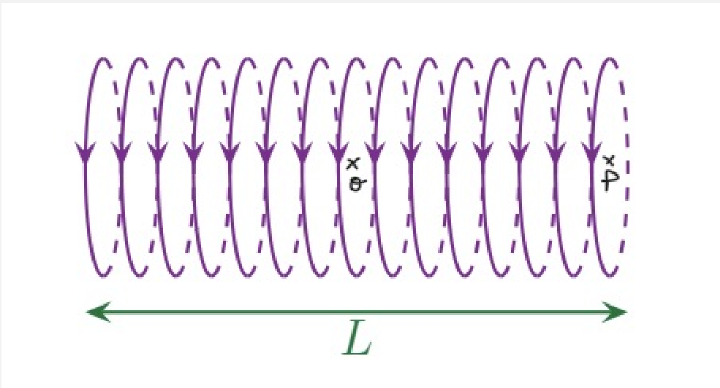
2.2.3.1 • Déroulement. Note : 20

Cet orale était typique , l'examinateur était ivre , pour les candidats qui ont passé le matin , ils ne l'ont pas trouvé , pour mois c'était le dernier de la journée , j'étais surpris car il ne m'as laissé entrer jusqu'à 15min après(il devais je pense récupérer le temps perdu).Bon il m'as donné le premier exos , je m'était surpris car c'est une application directe du cours mais hors programme pour les français (les premier 7min j'étais figé a se rappeler du cours) , directement je les ait résout . Pour le deuxième , par chance j'avais le réflexe de faire une analogie avec l'étude d'une corde comme on l'avait en spé , mais ici puisque la vitesse est constante , l'accélération est nul ce qui donne lieu à une simplification entre les coordonnées selon x et y , j'avais commis la faute d'oublier la force de frottement de l'eau avec la corde , mais bon heureusement , l'examinateur n'a pas fait attention. une fois que j'ai fini , il m'a demandé de refaire l'étude mais cette fois ci avec une masse attaché. vers la fin j'ai mené avec lui une étude sur la masse afin de simplifier l'expression obtenu voire un dessin de la corde dans chaque cas , moi j'ai traité seulement le cas la masse est hyper grande comme c'est le cas pour l'ancre, il m'a parlé de sa part d'une étude récent mise dans la méditeranée où ils avait besoin comme objet attaché juste une appareil pour les sonde , et donc la masse peut même être petite, j'ai donc donné la formule dans ce cas là.l'examinateur au début ne donnait aucune importance à ce que je faisait, il ne faisait même pas attention , je devait à chaque fois répéter ma réflexion, c'est jusqu'à la fin qu'il est devenu attentif.

2.2.4 • Exercice 4

2.2.4.1 • Enoncé

Soit un solénoîde de rayon R et de longueur L



1. Calculer le champs au centre de l'axe de symétrie O dans le cas ou L » R.
2. Calculer le champs B dans le point P situé sur l'axe de symétrie et à la sortie du solénoïde.
3. Calculer le flux du champs B à la sortie du solénoïde.
4. Dessiner les lignes de champs et commenter.

2.2.4.2 • Déroulement. Note : 14

L'examinateur était assis au fond de la table et me dictent les questions. Il m'a demandé de tracer un solénoïde infini, la question était * de calculer le champs B au centre O (question classique dans laquelle j'ai fait une petite erreur de calcul mais je me suis rectifié rapidement). Après on a passé de la modélisation infinie à celle finie et m'a demandé de calculer le champ au point P (voir figure), une question non évidente qui nécessite un peu de réflexion, j'ai pensé d'abord à une modélisation trop simplifiée pour dire que le champ s'annule brusquement et du coup on pourra considérer la surface contenant P comme une surface séparant deux milieux et appliquer les relations de passage. L'examinateur a attiré mon attention sur le fait que le champ ne s'annulera pas nécessairement d'une manière brusque et m'a demandé d'essayer d'utiliser la première question. J'ai pensé ensuite à considérer une superposition de deux solénoïdes et par suite le point P sera le centre du solénoïde équivalent (on le confond avec O' dont l'expression a été déjà établie :)) d'autre part on applique théorème de superposition et, par des raisons de symétries, on aura : 2xB(P)=B(O'). Ensuite, l'examinateur m'a demandé de calculer l'expression de flux à la surface contenant P (question astucieuse et calculatoire, il suffit de donner l'expression générale du champs magnétique B en fonction des diverses indépendances et symétrie et d'établir l'expression de l'élément de surface et faire quelques simplifications bien justifiées) à la fin l'examinateur m'a demandé d'essayer de tracer les lignes de champs à l'intérieur du solénoïde finie et d'interpréter pourquoi le champs à la surface de sortie n'est que la moitié de celui au centre. FIN D'ORAL.

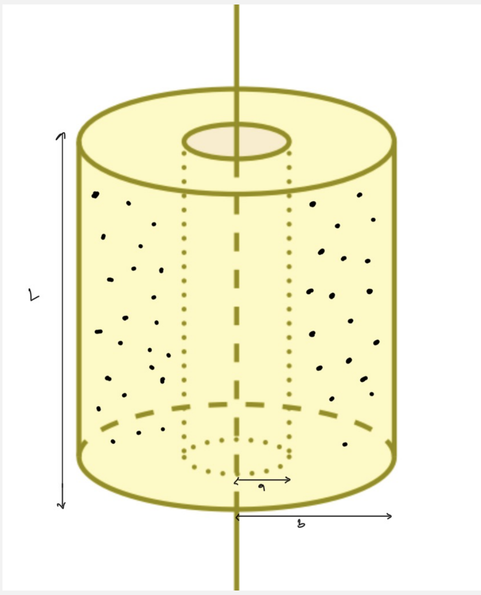
2.2.5 • Exercice 5

2.2.5.1 • Enoncé

Des particules diélectriques non chargées de masse m arrivent avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_z}$, une différence de potentielle U est appliqué entre les deux cylindres, on considère $L >> b$

1. Que se passe-t-il qualitativement ?
2. Donner une condition pour piéger les particules dans le petit cylindre.

On donne : $\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$ et $\vec{F} = \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$



2.2.5.2 • Solution

1. Qualitativement, le milieu entre les deux cyclindres est neutre du fait que les particules sont diélectriques, en plus par l'hypothèse que $L >> b$, on peut dire que le champs électrique entre les deux cylindres est porté par $\vec{e_r}$ et par conséquent le champs électrique va dévier les particules (car $\vec{F} = \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$)
2. soit une particule diélectrique qui arrive avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{OM_0} = r_0\vec{e_r}$, on considère l'origine O du repère au fond du cyclindre.

D'après la deuxième loi de Newton appliquée sur la particule :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Puisque le milieu entre les deux cylindres est neutre alors $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$, ce qui implique que $\vec{E}=\frac{A}{r}\vec{e_r}$ par raison de la symétrie et l'invariance, avec A une constante à déterminer
or :

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{A}{r}dr = A\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc :

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)r}\vec{e_r}$$

et

$$\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E} = \frac{\alpha\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)r}\vec{e_r}$$

d'où la force crée par le champs électrique est :

$$\vec{F} = \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} = \frac{-\alpha\varepsilon_0 U^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2 r^3}\vec{e_r}$$

On revient au deuxième loi de Newton, donc : $\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & = \frac{-\alpha\varepsilon_0 U^2}{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2 r^3} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & = 0 \\ \ddot{z} & = 0 \end{cases}$

Par la deuxième équation, $r^2\dot{\theta} = Cte = r_0^2\dot{\theta}_0$, or la vitesse initiale de la particule est suivant l'axe $\vec{e_z}$, donc $\dot{\theta}_0 = 0$, ainsi $\dot{\theta}=0$, on conclut que le mouvement de la particule se fait dans le plan $(\vec{e_r},\vec{e_z})$ avec θ est contante.

donc :

$$\begin{cases} \ddot{r} & = \frac{-\alpha\varepsilon_0 U^2}{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2 r^3} \\ z & = v_0 t \end{cases}$$

Alors :

$$\dot{r}^2 = \frac{\alpha\varepsilon_0 U^2}{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$$

Remarque : $\dot{r} < 0$ car les particules sont déviées vers le cylindre intérieur.
On note Δt_{r_0} la durée pour que la particule arrive au petit cylindre, pour piéger la particule dans le petit cylindre, il faut que $z = v_0\Delta t_{r_0} < L$ soit donc $\Delta t_{r_0} < \frac{L}{v_0}$. or :

$$\Delta t_{r_0} = \int_{r_0}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} = \int_a^{r_0}\sqrt{\frac{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\alpha\varepsilon_0 U^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)}}\mathrm{d}r = r_0\sqrt{\frac{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(r_0^2 - a^2\right)}{\alpha\varepsilon_0 U^2}}$$

En traitant toutes les possibilités de point de départ des particules c-à-d tout les valeur de r_0 entre a et b. Ainsi pour piéger les particules dans le petit cylindre, il faut que :

$$\max_{a\le r_0\le b}(\Delta t_{r_0}) < \frac{L}{v_0}$$

Soit donc :

$$b\sqrt{\frac{m\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(b^2-a^2\right)}{\alpha\varepsilon_0 U^2}} < \frac{L}{v_0}$$

2.2.6 • Exercice 6

Dans un cristal, on travaille sur un atome en interaction avec ses voisins le long de l'axe x. On définit le potentiel suivant :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}k'x^4$$

Déterminer la chaleur spécifique d'un atome de cristal.

2.2.6.1 • Déroulement-Solution. Note : 19

L'examinateur m'a donné l'énoncé et au fur et à mesure, j'ai essayé de schématiser l'atome et noter les données (Sans avoir besoin de tout écrire : juste l'essentiel). Quand il a finit, j'ai hésité de commencer à répondre car je n'étais pas sûr de ma compréhension déjà de la question et particulièrement du terme "Chaleur spécifique". Du coup, j'ai reformulé à l'examinateur la situation : "Bien, ce qu'on a ... Donc on cherche la chaleur spécifique" et il m'a confirmé en disant "Oui exactement, on cherche la capacité calorifique de l'atome". Ainsi, j'ai compris ce qu'on veut.
Par suite, on a la relation donnant la capacité calorifique $\frac{d<E>}{dT} = C$, cherchons donc $< E >$ en fonction de T.
L'exercice de base est celui de quantique mais au début je l'ai vu autrement : D'un point de vue thermique, j'ai donc posé l'hypothèse * suivante :

$$E_c = \frac{p}{2}k_BT$$

comme le nombre de degré de liberté selon l'énoncé est 1 (Translation suivant x), donc : $E_c = \frac{1}{2}k_BT$
Cherchons $< V >$: si $k' = 0$: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, on peut assimiler le système à un ressort de raideur k, on note m la masse de l'atome. Soit

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
J'ai posé des conditions initiales $x(0) = 0$ (au point O) pour trouver A, puis pour $\dot{x}(0)$, je me suis basée sur l'hypothèse *, en écrivant :

$$\frac{1}{2}k_BT = \frac{1}{2}m\dot{x}$$

j'ai posé à $t = 0$, $T = T_{ambiante}$, puis j'ai calculé $< x^2 >$.
Tout ce qui précède si $k' = 0$, j'ai écrit si $k' \neq 0$ et j'ai dit qu'on doit mobiliser le terme $\frac{1}{4}k'x^4$, en essayant sur le tableau, j'ai noté :

$$\frac{1}{4}k'x^4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{k'}x^2\right)^2$$

L'examinateur est venue chez moi au tableau il m'a proposé qu'on note $k'' = \sqrt{k'}$ soit donc l'équivalent d'une constante de raideur d'un ressort d'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}\sqrt{k'}x^2$, il m'a dit qu'on va essayer de continuer avec le même raisonnement pour trouver l'expression de x. Après une longue discussion, car je n'étais pas convaincue de son idée (Jusqu'aujourd'hui), et même il y avait le problème qu'on ne connaît pas la dimension de k'.
J'ai calculé $< x^4 >$, pour trouver à la fin l'expression de C.Après, j'ai essayé de commenter le résultat, j'ai trouvé une variation "illogique" de C en fonction de T, l'examinateur m'a dit et il m'a expliqué que le problème provient de l'hypothèse *. En fait, lorsque j'étais en train de faire ma méthode, j'avais le sentiment que l'exercice peut être traité en quantique. Du coup, je lui dis je vais changer la méthode pour traiter l'exercice : "En va se pencher sur la théorie de Bolzmann". Comme ça on trouve $< x^2 >$ et $< x^4 >$ en calculant la probabilité continue entre $-x_0$ et x_0, qu'on va poser comme l'intervalle où se fait le mouvement.
J'ai pu faire dans le temps restant $< x^2 >$ et au fur à mesure l'examinateur me demande : "Comment calculer cette intégrale physiquement, et j'essaie de donner des réponses et au même temps il m'a même expliqué une façon pour la faire en physique".
Mon épreuve orale c'était la dernière de la journée, c'est pourquoi j'avais la chance de bénéficier d'un temps de

plus : J'ai passé 1h30 d'oral sans y faire attention. Même si je n'ai pas terminé l'exercice et trouvé la solution finale, l'essentiel c'est de proposer, exprimer ses idées, et discuter en se basant sur ses connaissances du cours et parfois des situations rencontrées dans les problèmes.

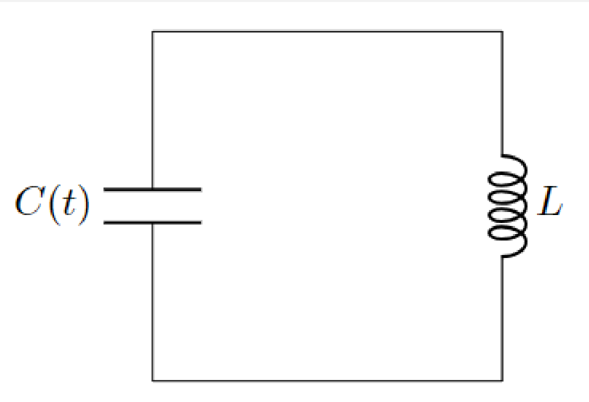
2.2.6.2 • Conseils

1. Lorsque tu seras en face d'un exercice en physique, essaie d'abord de banaliser la situation en la reformulant à sa façon et sous prêt à employer tes connaissances que tu as appris en physique (Un exercice peut être traité de plusieurs façons).
2. Il faut être sûr de ce que tu cherches avant de commencer ta rédaction.
3. Il ne faut pas hésiter de proposer des idées (Qui soient logique d'abord).
4. L'examinateur veut voir comment tu réagis et comment tu penses face à une nouvelle situation.
5. Il y a des relations et des résultats basiques que tu dois connaître par coeur pour passer à l'essentiel (Les valeurs moyennes de cos, sin, $\sin^2$ et $\cos^2$, la solution de l'équation harmonique...) pour éviter de perdre le temps en les redémontrant.

2.2.7 • Exercice 7

2.2.7.1 • Enoncé

On considère le circuit LC suivant :



on note : $d(t) = d_0 + d_1 \sin(\Omega t)$ avec $d_1 << d_0$, la distance entre les deux plaques du condensateur (chargé initialement par une charge q_0). À quelle condition peut-on avoir une amplification du système ?

2.2.7.2 • Déroulement-Solution. Note : 15

L'examinateur m'a donné l'énoncé, j'ai pris mon temps pour comprendre le sujet, au début j'ai pensé que l'exercice est facile, mais c'était pas le cas. Par suite, j'ai dit que la capacité du condensateur est une fonction du temps, il m'a demandé de justifier ça, j'ai donc parachuté la formule suivante :

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{d(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + d_1 \sin(\Omega t)}$$

il avait l'air satisfait, Par suite, j'ai écrit la loi d'additivité des tensions :

$$\frac{q(t)}{C(t)} + L\frac{di}{dt} = 0$$

j'ai trouvé donc cette équation différentielle :

$$\ddot{q}(t) + \frac{d_0 + d_1 \sin(\Omega t)}{L\varepsilon_0 S} q(t) = 0$$

En suite j'ai posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{d_0}{L\varepsilon_0 S}}$, puis j'ai écrit que la pulsation du système avec la perturbation est $\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega(t)$, ensuite j'ai utilisé le fait que $d_1 << d_0$ pour dire qu'on peut supposer que :

$$\delta\omega(t) << \omega_0$$

et donc $\omega(t) = \omega_0$
j'ai étudier le cas où $d_1 = 0$ (étude simple, niveau terminal), ensuite, j'ai écrit :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + f(t)$$

avec f une fonction qui caractérise l'effet de la perturbation sur la charge q, l'examinateur a approuvé ma démarche, il m'a confirmé que tout ça vient du fait que $d_1 << d_0$.
Alors la fonction f vérifier cette équation différentielle :

$$\ddot{f}(t) + \frac{d_1 \sin(\Omega t)}{L\varepsilon_0 S} f(t) = -\frac{q_0 d_1 \sin(\Omega t)}{L\varepsilon_0 S} \cos(\omega t)$$

je me suis bloqué un peu, parce que j'étais pas sûr si je peux résoudre cette équation différentielle directement ou non, à ce stade là, l'examinateur m'a donné la première indication en disant : " c'est le bon moment pour passer à la notation complexe ".
j'ai écrit donc :

$$\underline{f}(t)\left(-\omega_0^2 - \frac{d_1}{L\varepsilon_0 S} j \exp(j\Omega t)\right) = \frac{q_0 d_1}{L\varepsilon_0 S} j \exp(j\Omega t)$$

D'où :

$$\underline{q}(t) = \frac{q_0\omega_0^2}{\omega_0^2 + \frac{d_1}{L\varepsilon_0 S} j \exp(j\Omega t)} = \frac{q_0 d_0}{d_0 + d_1 j \exp(j\Omega t)}$$

Alors :

$$|\underline{q}(t)| = \frac{q_0\omega_0^2}{\omega_0^2 + \frac{d_1}{L\varepsilon_0 S} j \exp(j\Omega t)} = \frac{q_0 d_0}{\sqrt{(d_0 - d_1 \sin(\Omega t))^2 + d_1^2 \cos(\Omega t)^2}}$$

je voulais utilisé encore une fois le fait que $d_1 << d_0$ pour faire un développement limité, mais l'oral est terminé.

2.2.8 • Exercice 8

2.2.8.1 • Enoncé

Des électrons circulent a une vitesse v en formant un tube cylindrique :

1. Que se passe-t-il ?
2. Trouver l'angle de divergence

2.2.8.2 • Déroulement. Note : 6

L'examinateur m'a dit que je peux rajouter des donner si je jugeais utile, j'ai commencer par essayer de trouver l'expression la force électrique, en trouvant E, ou V.
Pour chercher V, j'ai essaye de faire une étude infinitésimale,(j'étais très motivé pour montrer à l'examinateur que j'avais du sens physique) cela m'a mis beaucoup et ne ma amener a rien, l'examinateur m'a fait comprendre cela. Puis il m'a demande de me concentrer sur le champs E. J'ai commence a réfléchir oubliant l'idée évidente qu'il fallait avoir. Il m'a demande si je connaissait un théorème donnant E. Et c'est la ou je me suis rappelé du théorème de Gauss. J'ai commence a suyer quand je l'ai vu prendre des notes, j'ai su que cette idée devait être un réflexe et que j'avais perdu mon temps pour rien. Emporté dans un stress inimaginable, j'ai fait plusieurs erreurs tel que sur l'expression du champs E(symétrie et invariance). Aussi dans le calcul intégral et dans une simplification...
Bon c'était une véritable catastrophe, j'ai sué comme jamais, en effet je viens de montrer a l'examinateur que j'étais un con qui ne savait pas utiliser le théorème de gauss, chose que je savais bien faire en sup et spe(je l'ai fais au une centaine de fois en prepa no joke) Il fallait trouver une autre force la force magnétique, mais j'avais pas le temps pour le faire. L'idée c'était d'appliquer après le pfd. C'était catastrophique, mon pire oral et kholle de toute ma prepa et concours, je ne me suis jamais senti aussi stupide que ce jour, c'était un aid. Je savais que j'allais avoir une mauvaise note et que devais dire adieu a l'X vue le coeff de physique.
Certes ça ma fait très mal, mais ça ne ma pas découragé pour la suite des concours.

2.3 Chimie

2.3.1 • Déroulement 1. Note : 14

Mon oral de Chimie à L'X (La matière que je déteste) était sur l'atomistique, le moment dipolaire et la cinétique chimique (mécanisme réactionnel), c'était le premier oral du jour (un Dimanche à 8h), l'examinatrice était sympa, elle m'a donné une feuille contenant l'énoncé (10 questions), j'ai pris mon temps pour lire l'énoncé et essayer de comprendre l'objectif du sujet (C'était de comprendre le fonctionnement d'un capteur chimique de pression), après environ 5 min de lecture, j'ai commencé à répondre aux questions sans problème, à chaque fois que je termine à répondre à une question, elle me confirme soit la formule, soit la valeur numérique, après 30 min, je me suis arrivé sur la dernière question qui était un peu calculatoire et nécessite plus de concentration, je me suis planché dans les calcules, à un certain moment, l'examinatrice m'a interrompu pour me dire que l'oral est terminé, elle m'a demandé de l'expliquer la suite de mon raisonnement, après mon explication, elle m'a répondu " Oui exactement c'est ça l'idée ".
En général l'oral de chimie est abordable et ne nécessite pas une très bonne préparation, savoir votre cours de chimie est largement suffisant pour obtenir une bonne note.

2.3.2 • Déroulement 2. Note : 13,5

L'oral de chimie à l'X est souvent perçu comme une épreuve redoutable, et obtenir une bonne note semble être un défi insurmontable. Je partageais cette vision, d'autant plus que la chimie était la matière que je négligeais le plus pendant ma prépa. Ainsi, lorsque l'on m'a informé que ma semaine d'oraux à l'X débuterait avec la chimie le lundi à 8 heures du matin, je m'attendais au pire, d'autant plus qu'on m'avait attribué un spectateur. Il est important de noter que lors des oraux à l'X, on peut avoir des spectateurs, généralement des professeurs ou des élèves SUP de grandes prépas parisiennes. Et, contrairement aux épreuves des Mines et de Centrale, on ne peut pas refuser leur présence.
Dans mon cas, je n'étais même pas sûr de la possibilité d'avoir un spectateur, ce qui m'a perturbé au début (J'ai eu comme spectateur un professeur de PC de LYMED :)).
Mon exercice portait sur l'atomistique au début et la thermochimie à la fin. On me donnait la position d'un élément dans le tableau périodique et on me demandait son numéro atomique, les relations entre les grandeurs standards (G,H,S,. . .) de formation et savoir les manipuler etc. J'étais stressé et ai commis quelques erreurs de calcul stupides au début, mais je les ai corrigées automatiquement.

L'examinatrice était très sympathique, bien qu'elle ne parle pas. Elle attendait que je termine la question pour me demander la valeur trouvée, la comparant ensuite avec sa feuille avant de passer à la question suivante.À la fin, j'ai remarqué qu'il me restait une minute pour la dernière question. J'ai donc tenté de la résoudre oralement, expliquant à l'examinatrice les données fournies et comment les exploiter pour obtenir le résultat escompté. L'oral s'est terminé de manière satisfaisante.
Mon conseil pour réussir cet oral est de bien réviser votre cours de chimie à l'avance. Ne le laissez pas à la dernière minute. Une connaissance basique de votre cours suffit généralement pour bien vous en sortir à l'oral de chimie. N'ayez pas peur de la feuille des exercices écrits ni du silence de l'examinatrice, car cela ne reflète pas la qualité de votre performance.
C'est simplement leur consigne de ne montrer aucune réaction envers l'élève. Essayez de parler le maximum possible aux examinateurs et exprimer vos idées clairement, une reformulation de l'énoncé avant de résoudre l'exo demeure fortement conseillée. BONNE CHANCE ;)s

2.3.3 • Déroulement 3. Note : 13

En examinant les statistiques de l'année dernière, j'ai conclu qu'obtenir une bonne note en chimie semblait presque impossible. Pour ma part, au cours de la préparation tout au long de l'année, je me limitais à faire le nécessaire : comprendre le cours, faire les travaux dirigés et quelques exercices par-ci par-là, en espérant que cela me permet de faire les choses correctement.
Le jour de l'examen, le sujet était assez classique, portant sur la thermochimie, sans nécessiter de superpouvoirs. Ce que j'ai remarqué, c'est que les calculs jouent un rôle crucial aux yeux de l'examinateur. Selon elle, si vous obtenez le résultat numérique correct, vous pouvez réussir, sinon vous êtes bloqué. Pour ma part, j'ai commis l'erreur dans une application numérique d'une expression gigantesque.
En résumé, ce que je veux dire, c'est que vous avez la possibilité de faire mieux que moi et d'obtenir une note supérieure à 15 en chimie.

2.4 ADS

2.4.1 • ADS Maths. Note : 15.5

Le sujet parlait des cas d'égalité de l'inégalité isopérimétrique notamment dans le cas des corps convexes, je n'ai pas trouvé la source mais le document était long (18 pages) et prenait une approche intuitive de la géométrie, notamment en parlant des volumes et des faces d'un convexes sans les définir à priori. Pendant le temps de préparation, j'ai eu conscience que je ne pouvais pas traiter le sujet dans sa globalité mais j'ai essayé d'atteindre l'objectif du document ; l'inégalité isopérimétrique et ses cas d'égalité. J'ai pris mon temps pour comprendre les preuves et résoudre les exercices et les bien illustrer, et j'ai laissé 5min à la fin pour numéroter les pages et relire la présentation (que j'ai fait sous forme de beamers). Ma présentation a duré environ 15min et l'examinatrice ne m'a jamais interrompu pendant ma présentation (contrairement à d'autres condidats). J'ai signalé que je me suis placé dans un cadre intuitif de la géométrie comme l'a fait l'auteur du document, mais l'examinatrice m'a demandée de définir le volume dans $\mathbb{R}^{\ltimes}$, et je n'ai pas pu le faire. Elle m'a ensuite demandée de définir les faces d'un convexe, j'ai pu le faire en admettant qu'étant donné un convexe et un points qui ne lui appartient pas, il existe un hyperplan les séparant (conséquence du théorème de Hahn-Banach). Elle a eu l'aire satisfaite et m'a demandée pourquoi on appelle l'enveloppe convexe de n + 1 points de $\mathbb{R}^{\ltimes}$ simplexe et j'ai invoqué le théorème de Carathéodory. Le reste des question était en relation direct avec le document et ne présentait pas de difficultés (tracé de la somme de Minkowski de deux disques, preuve d'un théorème simple en géométrie...) .

2.5 Arabe

2.5.1 • Déroulement. Note : 20

مرحبا، سأحاول من خلال هذا التقرير أن أحدثكم بعض الشيئ عن الاختبار الشفهي للغة العربية، و ذلك من خلال كيفية اجتيازه و بعض النصائح التي ربما قد تساعدكم على الامتياز فيه. أولا وقبل كل شيء تتم المناداة عليكم الى قاعة التحضير رفقة أربعة تلاميذ آخرين كل منهم سيجتاز الاختبار في لغة ما، يعطونكم سماعات و اوراق للمسودة. ستحظون ب 30 دقيقة من اجل التحضير، و هي مدة كافية في نظري لمشاهدة المقطع السمعي البصري مرتين، أنصحكم باستغلال المشاهدة الأولى لتدوين العنوان و الموضوع العام و كذا بعض الافكار الرئيسية، في حين يستحسن تخصيص المشاهدة الثانية لتدوين باقي الأفكار (المهمة فقط، انصح بعدم تجاوز ثلاثة الى اربعة افكار على حد اقصى) و في نفس الوقت محاولة القيام بنوع من العصف الذهني بشكل متزامن لتدونوا على المسودة اي فكرة لها صلة بموضوع المقطع عن قريب او عن بعيد، من شأنها ان تثري و تغني المناقشة. كان مقطعي الصوتي يتحور حول :"الطماطم في غينيا"، ستجدون رابطه مرفقا بهذا التقرير. رغم غرابة هذا الموضوع وعدم توفري على افكار مسبقة عنه، الا انني تمالكت نفسي و دونت مجمل افكاره و حاولت انتقاء اهمها بعد ذلك، وهو ما استغرقني حوالي 15 دقيقة. بعد ذلك حاولت ان اخصص 10 دقائق التالية لتدوين اي فكرة حرفيا يمكن ان تعينني في المناقشة، وهنا ينصح بعدم محاولة كتابة الموضوع كاملا لأن الوقت المخصص غير كاف البتة لذلك، و لهذا انصحكم بكتابة افكار فقط ومحاولة توسيعها بشكل شفهى أثناء المناقشة (يستحب عدم الإطالة في النظر الى المسودة ومحاولة النظر مباشرة الى المخاطَبين لأن ذلك يخلف انطباعا جيدا لديهم) .تجدر بي الإشارة إلى أنني لم اقتصر فقط على موضوع المقطع بل حاولت ان اتطرق الى مواضيع جانبية مثل وضعية مزارعي الطماطم و ردائة مستواهم المعيشي، وكيف ان كل هذه الاسباب تؤدي بهم الى التفكير في الهجرة، وهكذا تمكنت من سحب النقاش من موضوع لا أفقه فيه شيئا البتة الى موضوع "مستهلك" سبق و ناقشناه مع الاستاذ غيرما مرة. عادة ما نكون امام استاذين في الاختبار يطرحان اسئلة بعضها له علاقة بالمقطع و البعض الآخر مجرد ثقافة عامة، على غرار : اذكر لي بعض مدارس الزراعة ببلدك، او كيف يمكن في رأيك ان تساهم الدول الغربية في حل مشكل الهجرة في دول العالم الثالث الخ. و هنا الغاية من الاسئلة ليس تقييم افكار التلميذ فقط بل، و بشكل اهم، تقييم طلاقة لسانه العربي و مدى فصاحته، وكذا قدرته على التعامل مع اسئلة لم يتسن له التحضير لها. و لهذا فإني انصحكم بمحاولة التعود على الحديث بالعربية الفصحى ولو من خلال الحصص الدراسية و كذا محاولة القيام بمحاكاة هذا الاختبار مرتين على الأقل، فهذا من شأنه مساعدتكم على التحضير بشكل جيد و يعطيكم فكرة حول كيفية تقسيم وقتكم خلال فترة التحضير. حظا طيبا.

FIN DU RAPPORT

Alors que nous entamons ce parcours vers l'excellence dans les meilleurs écoles d'ingénieurs de France, et même du monde entier, nous sommes remplis de gratitude pour le soutien indéfectible que nous avons reçu de nos camarades, enseignants et de l'équipe administrative. Notre projet, enrichi par les oraux perspicaces partagés par nos camarades, n'aurait pas été possible sans l'esprit de collaboration qui caractérise notre communauté. Nous exprimons nos plus sincères remerciements à nos amis dont les contributions ont ajouté de la profondeur et de la diversité à notre travail. Une reconnaissance particulière va à nos enseignants dévoués, dont les conseils et encouragements ont été cruciaux dans notre parcours académique. Nous sommes également redevables à l'administration pour leur assistance inestimable qui a concrétisé notre rêve d'être admissible à l'École Polytechnique. Ensemble, célébrons l'esprit d'unité et de partage des connaissances qui caractérise notre communauté éducative.

Remerciements spéciaux :

Solution d'exercices et écriture des exercices
Abdelbar Ghassoub
Amine Saadi
Aymen Haouas
Khalil El Azri
Design et Debugging
Al Hakim Taoufik
1e et 4e Couvertures
Amine Saadi
Déroulement des exercices
Abdelbar Ghassoub
Adam Chakour
Adam El Hachimi
Al Hakim Taoufik
Amine Saadi
Anas Dahbi
Aymen Haouas
Aymane Chaoui Adib
Ayoub El Gourari
Ayoub Yousfi
Badr-Eddine El-Homaydy
Chaymae Faraji
Fatima-zahrae Akhyar
Jaafar Kerdad
Kaoutar Bouaachra
Khalil El Azri
Rayan Mellouk
Taha Meziane
Yassine El Ammari
Younes Jihad Boumoussou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

QUI SOMMES NOUS?

DES LYDEXIENS ADMISSIBLES A L'ECOLE X-POLYTECHNIQUE

$$E = m.c^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

l'X

ENS
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LYCEE
MOHAMMED VI
D'EXCELLENCE