ORAUX X/ENS/MINES

MATH U

énoncé:
Soient $n \geq 2$ et $d \geq 2$ deux entiers, on note $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_1, ..., \pm e_n\}$, avec e_i est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1.
Soient X une variable aléatoire uniformément distribuée dans G et $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que:

$$\mathbb{E}[|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]|] \leq \frac{nd}{2} \underset{s \in S}{max} \mathbb{E}[|f(X) - f(X+s)|]$$

Déroulement (et indication à la résolution): (50min)
L'examinateur m'a donné l'exercice dans une feuille et a sorti pendant un dizaine de minutes, ce temps m'a suffit déjà pour absorber les notations et pour suivre une piste fastudieuse et calculatoire dans laquelle j'ai introduit des événements qui conditionneront l'espérance selon que $f(X)$ est assez proche de $\mathbb{E}[f(X)]$ (c'est à dire leur différence est un élément de S) ou non, mais du début j'ai compris que ce n'ai pas la meilleure méthode. L'examinateur était silencieux (ne donnant aucune indication) mais très attentif, je lui ai dit que je veux simplifier les deux termes de gauche et droite sans utiliser aucune inégalité triangulaire (gros calculs, avec beaucoup d'erreurs grossières de type $Card(G) = nd$ au lieu de n^d). Là, j'ai fait apparaître une symétrie dans le terme de gauche et je lui ai dit que je dois utiliser l'inégalité triangulaire de la manière la plus fine possible (j'ai pu exhiber un cas d'égalité mais je n'y rappel pas, donc il faut être prudent avec les inégalités). J'ai ensuite utilisé l'inégalité triangulaire de plusieurs manières sans pouvoir faire apparaître le terme de droite, je lui ai dit donc que je dois comprendre le $\frac{nd}{2}$, et pourquoi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au lieu de $\{0, 1, ..., n-1\}$ et il m'a dit que c'est une bonne idée. Après un temps de réflexion j'ai compris que la distance maximale entre deux points de $(\{0, 1, ..., n-1\})^d$ est nd (voir ce dernier comme un (hyper)parallélogramme) et dans ce cas, G n'est que cette figure en y joignant les bords extrémaux (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n=0) et ainsi, la distance maximale entre deux éléments de G est $\frac{nd}{2}$. Ceci étant géométriquement, je l'ai prouvé rigoureusement et le temps s'est écoulé avant de conclure (mais c'était l'idée).
Note: 13

MATH SR

énoncé:

- énoncer et démontrer le théorème de projection
- calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$
- montrer que $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ est un produit scalaire
- calculer la distance de 1 à Vect$(x, x^2, ..., x^n)$ pour $n \geq 1$ et pour le produit scalaire ci-dessus

Déroulement (et indication à la résolution): (45min)
L'examinatrice était très sympathique et l'exercice était classique, donc au lieu de faire beaucoup d'exercices je me suis focalisé sur la bonne manipulation des outils qu'on utilisait (justifier la convergence de l'intégrale de la question 2, bien poser l'hypothèse de récurrence, justifier qu'on peut intégrer par parties...). Pour la dernière question je lui ai dit que je veux utiliser les matrices de Gram, elle m'a suivie jusqu'à l'instant où j'ai posé le bon déterminant et elle m'a dit qu'on vas procéder autrement avec une méthode moins calculatoire, et pour le faire elle m'a aidé par 3 questions supplémentaires.

Note: 18

MATH ULSR

énoncé:
Soit I un ensemble fini et $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes stable par dérivation. Soient $sign$ la fonction signe (avec $sign(0)=0$) et $\epsilon : I \longrightarrow \{-1,0,1\}$
On note $\mathbf{A}_\epsilon = \{t\in\mathbb{R}/sign(P_i(t)) = \epsilon(i)\forall i\in I\}$
Montrer que $\mathbf{A}_\epsilon$ est soit vide, soit un singleton, soit un intervalle ouvert.
Déroulement (et indication à la résolution): (45min)
Je n'ai pas bien absorbé les notations et pour s'approprier l'exercice j'ai passé plus que 10min sur le cas évident de ϵ constante valant 1. Ensuite, l'examinatrice m'a demandée de chercher tous les $\mathbf{A}_\epsilon$ possibles pour les familles $X^n, nX^{n-1}, .., n!, 0$, après avoir traité les cas n=2 et n=3, j'ai compris que c'est juste l'une des demi droites d'origine 0, l'ensemble vide ou bien le singleton 0. L'examinatrice m'a dit qu'il me restait 7min et que je devais formuler la réponse, j'ai donc rédigé une récurrence en éliminant à chaque fois un polynôme de degré maximal avec un argument de monotonie (ou le Th. de Rolle).

Note: 12

MATH 1 DE L'X

énoncé:
Soient G un groupe fini d'ordre $m\geq 1$ et ϕ un automorphisme de G vérifiant :

- $(\forall g\in G)$ si $\phi(g)=g$, alors $g=1$
- $\phi^n = id_G$, $n\geq 1$ ($n\neq m$ à priori)

1. Calculer le produit $g\phi(g)...\phi^{n-1}(g)$ pour $g\in G$
2. Pour n=2, montrer que G est abélien
3. Pour n=3, montrer que g et $\phi(g)$ commuttent pour tout $g\in G$

Soit f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$
On suppose que f' ne s'annulle qu'une fois seulle fois en un point $M\in\mathbb{R}$

1. Montrer que $(\exists! m\in\mathbb{R})$ / $\int_{-\infty}^{m} f(t)dt = 1/2$
2. Tracer le tableau de variations de f
3. Soit $0<\alpha<f(M)$
   Montrer que $(\exists!(x_1,x_2)\in]-\infty,M[\times]M,+\infty[)$ / $f(x_1)=f(x_2)=\alpha$

Déroulement (et indication à la résolution): (50min)
J'ai commencé par traiter la cas évident où G est abélien (dans ce cas, il suffisait de calculer $\phi(x\phi(x)...\phi^{n-1}(x))$). Ensuite, une dizaine de minutes de silence s'est établie suite à mon blocage, l'examinateur m'a demandé de regarder le cas où $x=g^{-1}\phi(g)$ mais en calculant le produit j'ai fait beaucoup d'erreurs en confondant les puissances de $\phi(g)$ en tant qu'élément de G et les composés $n-$èmes de ϕ... Après avoir finis les calculs, je lui ai dit que je veux comprendre $\{g^{-1}\phi(g)/g\in G\}$ et plus précisément qu'il est égale à G (sans raison intuitive à priori). J'ai de même commencé par traiter le cas abélien en remarquant que $g\mapsto g^{-1}\phi(g)$ est un morphisme injectif de groupes finis, donc surjectif. Pour le cas générale, j'ai essayé de résoudre l'équation $x=g^{-1}\phi(g)$ d'inconnu $g\in G$ et de paramètre $x\in G$ mais je n'y ai pas parvenus. Après un temps de réflexion, j'ai remarqué que le groupe est fini donc l'application $g\mapsto g^{-1}\phi(g)$ allant de G dans lui même est surjective ssi elle est injective, et son injectivité est évidente. Le reste des questions ne présentait aucune difficulté particulière et ainsi je n'avait aucun échange intéressant avec l'examinateur en traitant celles-ci.
Note: 14

MATH 2 DE L'X

énoncé:
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p ($n \geq 2$ et $p \in]0,1[$) et soit $k \in \{0,1,...,n\}$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_n \leq k) = (n-k)\binom{n}{k}\int_p^1 t^k(1-t)^{n-1-k}dt$
2. On pose $f_{n,k} = (n-k)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-1-k}$

   Calculer $\int_0^1 f_{n,k}(t)dt$ et $\mu_{n,k} := \int_0^1 tf_{n,k}(t)dt$
3. étudier la monotonie de $f_{n,k}$ et déterminer son maximum sur $]0,1[$, on note le point où ce maximum est atteint $M_{n,k}$
4. Soit $m_{n,k} \in]0,1[$ tel que $\int_0^{m_{n,k}} f_{,k}(t)dt = \frac{1}{2}$.
   On admet que $m_{n,k}$ est dans le segment d'extrémités $\nu_{n,k}$ et $M_{n,k}$ (à priori, on ne sait rien sur leur ordre, et tout les cas sont possibles)
5. Montrer que si $p = \frac{k}{n}$, alors:

$$\mathbb{P}(X_n \leq np) < \frac{1}{2} < \mathbb{P}(X_n \leq np - 1)$$

Déroulement (et indication à la résolution): (50min)
L'exercice était fort calculatoire et ne présentait aucune difficulté fondamentale, j'ai fait beaucoup d'erreurs de calculs lors de l'oral mais, dans la majorité des cas, je les ai corrigés en autonomie.
Note: 13

MATH MINES

énoncé:

1. On note $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on veut caractériser les formes linéaires ϕ de E telles que $(\forall f, g \in E)\phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)$
   Vérifier que les formes linéaires $f_k : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}|_0$ sont parmi les formes linéaires qu'on cherche.
   Conclure que l'ensemble de ces formes linéaires est de dimension finie.
2. Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_1, ..., M_r)$ une base de Vect(G) formée d'éléments de G.
   Montrer que l'application $M \mapsto (tr(M_1A, ..., M_rA)$ est injective.
   Déduire que si $(\exists k \in \mathbb{N}_{\geq 1})(\forall g \in G)\ g^k = 1$, alors G est fini
3. Soit σ, σ' deux permutations de $\mathcal{S}_n$
   Montrer que σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si el seulement si leurs matrices sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
4. Soit f une fonction continue sur $\mathcal{B}_f(0,1)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{B}(0,1)$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = 0$ sur $\mathcal{B}(0,1)$.
   On suppose que f est constante sur la sphère unité, montrer que f est constante.

Déroulement (et indication à la résolution): (15min préparation du premier exercice et 55min de passage)
J'ai pensé au premier exercice pendant le temps de préparation, intuitivement, l'ensemble cherché est formé par les combinaisons linéaires des f_k mais ce n'était pas du tout évident. J'ai parvenu à le faire par un argument de densité de l'ensemble des fonctions polynômiales (Th. de Weierstrass), en effet, en

se fixant une telle application linéaire ϕ, et avec une analyse synthèse, on peut trouver les coefficients de la combinaison linéaire $\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, pour la synthèse, j'ai prouvé l'égalité pour les polynômes (en plusieurs variables) et utilisé judicieusement le Th de Weierstrass. L'examinateur n'a pas voulu me suivre mais il a bien apprécié ma démarche, le résultat peut être démontré facilement en remarquant que si $f \in E$, $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)dt$. Le deuxième exercice était classique, il fallait juste montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(C)$ telle que les traces de toutes ses puissances sont nulles, alors A est nilpotente. Pour le troisième exercice, il est également classique, il fallait faire le lien entre le polynôme caractéristique de la matrice d'une permutation et sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Pour le dernier exercice, je l'ai déjà rencontré pendant la préparation sous une autre forme, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un compact de $\mathbb{R}^n$, harmonique et de classe $\mathcal{C}^2$ sur son intérieur atteint ses bornes sur sa frontière (cas particulier du principe de maximum que je recommande vivement de le faire)
Note: 17

PHYSIQUE U:

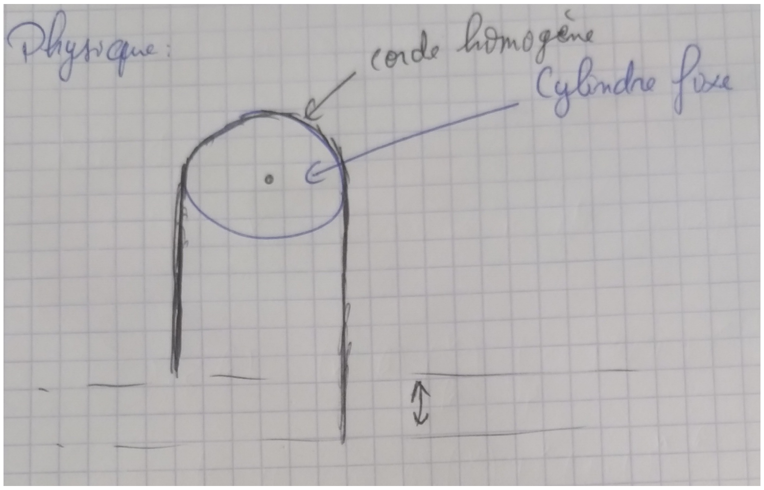
énoncé:

1. Dans la nature, les feuilles des arbres contiennent des petites cavités (l'examinatrice m'a fait un dessin après avoir vu une confusion chez moi, mais il était inutile). Expliquer comment ces cavités permettent d'accélérer la montée de la sève.
2. Donnés numériques: distance terre soleil, rayon de terre, rayon du soleil, flux énergétique surfacique solaire.
   calculer la vitesse de montée de la sève dans l'arbre.
3. Que pouvez vous dire de ces résultats?

Déroulement (et indication à la résolution): (60min)
L'examinatrice a commencé par me dicter l'exercice et m'a demandée d'expliquer qualitativement la situation. Après une réflexion de 7min, je lui ai dit que ça me rappel le phénomène de tension superficielle et la pression négative qui apparaît lorsqu'on place un bout de papier sur un verre complètement rempli d'eau. Elle n'a pas eu l'aire satisfaite mais elle m'a dit que ça ne vas pas sans lien avec ceci, puis elle m'a demandée si je connais la loi de Laplace je lui ai dit non et puis elle m'a demandée de relier la pression d'une goutte d'eau dans l'air avec la pression de l'air en admettant que la goutte est sphérique et que l'énergie de la surface extérieure à la boule est proportionnelle à sa surface. Après un peu de temps, je lui ai dit que je veux écrire la conservation d'énergie lorsque la boule augmente son rayon de dr (par analogie avec l'énergie de constitution d'une masse sphérique ou d'une sphère chargée), ceci m'a donné la relation attendue et m'a permis de conclure facilement. Pour la deuxième question, j'étais perturbé par la nature des données numériques mais j'ai compris que ça veux juste dire que le soleil est la source principale et unique de l'énergie de l'arbre. Après plusieurs lignes de calculs, et en introduisant (en autonomie) beaucoup d'autres facteurs (comme la surface effective des feuilles et la proportion qui peut servir de conduite pour la sève), et en négligeant toute inclinaison (les termes en $cos(\alpha)$) puisqu'on ne cherche qu'un ordre de grandeur, j'ai trouvé une vitesse de l'ordre du $mm/heure$ ce qui est très grand, je lui ai dit que ce n'ai pas l'ordre de grandeur auquel je m'attendais et elle m'a demandé d'expliquer ce résultat, et donc j'ai parlé du fait que l'énergie provenant du soleil est dissipée dans sa route par exemple dans l'atmosphère et l'oral s'est terminé. J'ai bien sûr commis de nombreuses erreurs de calcul et de raisonnement (en ne précisant pas le système étudié par exemple...)
Note: 14

PHYSIQUE X

On considère un cylindre fixe sur lequel on pose une corde homogène de masse linéique λ comme s'y suit.



On écarte la corde de sa position d'équilibre d'une longueur δl, calculer la vitesse de la corde au moment où celle-ci décollerait complètement du cylindre.

Déroulement (et indication à la résolution): (45min pour mon cas, mais en général c'est 50min)

Je n'ai rien dit pendant 10min, l'exercice était d'apparence très calculatoire mais je ne voulais pas m'investir dans la démarche classique d'introduction de la tension de la corde sans en être sûr. Après ce temps de réflexion, j'ai compris que je dois supposer que la tension de la corde est indépendante du temps pour pouvoir fermer le système des variables (sachant les conditions aux limites de la corde). Je me suis plongé dans les calculs astronomiques (je vous conseil de bien garder un espace dans le tableau pour écrire les résultats importants). A la fin, j'ai eu besoin d'une équation que j'ai effacé, l'examinateur qui était très silencieux me la dictée et ainsi j'ai trouvé une équation differentielle vérifiée par la longueur de la corde de l'autre bout du cylindre. Après des arguments de symétrie, j'ai trouvé une formule simple donnant la variation temporelle de cette longueur et le résultat cherché s'en suit rapidement. L'examinateur m'a ensuite posé plusieurs questions à propos de la cohérence des simplifications que j'ai fait et m'a demandé de simplifier dans le cas d'un petit écart et le cas sans frottements et l'oral s'est terminé.

Note: 15

PHYSIQUE MINES

1. On éclaire un système de fentes d'Young avec une source ponctuelle blanche (qu'on modélisera avec un profile rectangulaire), calculer le nombre de franges qu'on peut distinguer sur l'écran.

2. On considère une distribution de charges créant un potentiel $V(r) = \frac{V_0}{r}(1 + \frac{r}{a})e^{\frac{-2r}{a}}$.
Trouver la distribution des charges créant ce potentiel et montrer qu'on a une charge ponctuelle à l'origine et donner un exemple physique concret pouvant être ainsi modélisé.
Définir et calculer une énergie de liaison de la distribution.

Déroulement (et indication à la résolution): (15min préparation des deux exercices, 45min de passage pour mon cas (55min en général)

J'ai commencer par exprimer l'intensité en tout point de l'écran (et faire intervenir le contraste en sinus

cardinal), et pour répondre à la question, j'ai envisagé deux voies; une première dans laquelle je voulais introduire l'épaisseur des fentes et utiliser les formules de diffraction, mais celle-ci ne fait pas différence entre le Laser monochromatique et la lumière blanche, ce qui est incohérent avec ce qu'on peut voir en TP par exemple. J'ai donc dit à l'examinateur que je vais considérer qu'on ne peut distinguer deux franges que s'ils appartiennent au premier pic du contraste, et j'ai trouvé que le nombre de franges est inversement proportionnel à $\Delta\nu$ ce qui est cohérent puisqu'on n'a aucune limitation fondamentale (liée à la source) des nombres de franges dans le cas monochromatique, l'examinateur m'a donc bombardé d'une succession de questions à propos du critère semi-qualitatif de de brouillage, mais il s'est avéré que je ne le maîtrise que très peu. Pour le deuxième exercice, il était plutôt calculatoire, et j'y ai fait beaucoup d'erreurs de calcul. Pour montrer l'existence d'une charge ponctuelle à l'origine, j'ai calculé le champs et identifié le champs crée par une charge ponctuelle. Pour l'exemple de distribution, j'ai insisté sur le Plasma perturbé par une charge ponctuelle et l'effet ecran (le terme $e^{\frac{-2a}{r}}$) mais l'examinateur n'était pas satisfait, il a voulu me faire dire "modèle de l'atome". Pour la dernière question, j'ai parlé des deux approches classiques; la première consistant en la formation de la distribution couche par couche en apportant les charges de l'infini, et la deuxième qui consiste à écrire une conservation d'énergie et integrer l'énergie électrostatique sur tout l'espace, l'examinateur m'a ensuite demandé de poser les calculs et exprimer de volume élémentaire en coordonnés sphériques et l'oral s'est terminé.
Note: 17

ADS MATH

2hr de préparation et 30min de passage
Le sujet parlait des cas d'égalité de l'inégalité isopérimétrique notamment dans le cas des corps convexes, je n'ai pas trouvé la source mais le document était long (18 pages) et prenait une approche intuitive de la géométrie, notamment en parlant des volumes et des faces d'un convexes sans les définir à priori. Pendant le temps de préparation, j'ai eu conscience que je ne pouvais pas traiter le sujet dans sa globalité mais j'ai essayé d'atteindre l'objectif du document; l'inégalité isopérimétrique et ses cas d'égalité. J'ai pris mon temps pour comprendre les preuves et résoudre les exercices et les bien illustrer, et j'ai laissé 5min à la fin pour numéroter les pages et relire la présentation (que j'ai fait sous forme de beamers). Ma présentation a duré $\approx$ 15min et l'examinatrice ne m'a jamais interrompue pendant ma présentation (contrairement à d'autres condidats). J'ai signalé que je me suis placé dans un cadre intuitif de la géométrie comme l'a fait l'auteur du document, mais l'examinatrice m'a demandée de définir le volume dans $\mathbb{R}^n$, et je n'ai pas pu le faire. Elle m'a ensuite demandée de définir les faces d'un convexe, j'ai pu le faire en admettant qu'étant donné un convexe et un points qui ne lui appartient pas, il existe un hyperplan les séparant (conséquence du théorème de Hahn-Banach). Elle a eu l'aire satisfaite et m'a demandée pourquoi on appelle l'enveloppe convexe de $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$ simplexe et j'ai invoqué le théorème de Carathéodory. Le reste des question était en relation direct avec le document et ne présentait pas de difficultés (traçé de la somme de Minkowski de deux disques, preuve d'un théorème simple en géométrie...) .

Note: 15,5.