Astuces AL

▷ $d = \dim E$. $n > d$. $(u_1, \dots, u_n)$ liée dans E.
$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\sum u_i \lambda_i = 0$. Pour chaque dim en + $(n-d)$ on peut imposer une condition en + sur les λ_i : E par $E \times \mathbb{K} \to (u_1, \alpha_1), \dots, (u_n, \alpha_n)$
liée $\to$ $\sum \lambda_i u_i = 0$ et $\sum \lambda_i \alpha_i = 0$ ...

▷ Une matrice échelonnée avec coef diag $\neq 0$ est inv

▷ Pour minorer le rang on a qu'il faut trouver des mineurs de det $\neq 0$

▷ Opérations ne modifiant pas le rg :
- → Supprimer ligne/colonne $= 0$
- → Ajouter à une CL des autres colonnes (lignes)
- → Multiplier une colonne/ligne par $\lambda \neq 0$
- → Echange L C.
- → $\times$ par une matrice inv.

▷ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix} \to J^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix}$ ($k+1$)

▷ $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det M \in \{-1, 1\}\}$

▷ $M \in GL_n(\mathbb{R})$, ~~A~~ $M^t \mathrm{Com}\, M = \det M \, I_n$

▷ $rg_{\mathbb{K}} = rg_{\mathbb{L}}$, $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{L}$

▷ en dim $< +\infty$, inj $\Leftrightarrow$ ~~surj~~ $\Leftrightarrow$ bij. ($E \to E$)

▷ Tout endomorphisme peut se décomposer en somme de projections

▷ $E^{ij} E^{uv} = \delta_{ju} E^{iv}$

▷ On cherche à montrer l'existence de A vérifiant la relation $\mathcal{R}$

$\varphi \begin{cases} \cdot \longrightarrow \cdot \\ A \longrightarrow \mathcal{R}(A) \end{cases}$ → φ linéaire
→ φ inj
→ égalité des dim
⟹ φ surjective → d'où l'exist.

▷ $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

▷ F sev E. G sev de E. W sev de E, $F \subset W$

$E = F \oplus G$
$\Rightarrow W = F \oplus (G \cap W)$

→ $\begin{cases} AD = DA \Leftrightarrow A \text{ diagonale} \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \\ \text{coef} \neq \end{cases}$

→ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \left\{ \varphi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ M \longrightarrow tr(AM) \end{cases} \middle| A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \right\}$

→ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ A nilpotent $\Leftrightarrow$ $trA = trA^2 = \dots = trA^n = 0$

→ $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, $trA^n + a_{n-1} trA^{n-1} + \dots + a_0 tr I_n = 0$
Rec linéaire.

▷ $(Ker(A^k))_{k \in \mathbb{N}}$ ↗ pour $\subset$ puis stationnaire

▷ $(Im A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ↘ pour $\subset$