Auto-Adjoints

▷ **Adjoint** $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists!\, u^* \in \mathcal{L}(E)$ $\forall (x,y) \in E^2 \mid \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$

Alors, $M_B(u^*) = {}^tM_B(u)$

si B BON

▷ $u \in GL(E)$, $u^* = u^{-1} \Leftrightarrow u \in O(E)$

▷ $\chi_u = \chi_{u^*}$; $|||u||| = |||u^*|||$; $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

Auto-adjoint

▷ u autoadjoint ssi $u^* = u$. $S(E)\ \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^* = u\}$

▷ $S(E) \xleftrightarrow[\text{BON}]{B} S_n(\mathbb{R})$: $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$

▷ $u \in S(E)$, $\mathbb{R}[u] \in S(E)$, $\exp(u) \in S(E)$. $S(E)$ PAS stable par $\circ$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Théorème Spectral} \quad u \in \mathcal{L}(E) \\ \quad u \in S(E) \Leftrightarrow u \text{ DZ dans une base ON}\end{array}}$

→ Si F stabilisé par u, $F^\perp$ aussi $\hat{\hat{A}}$.

▷ $u \in S(E)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ VP. $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} E_{\lambda_i}(u)$

▷ Forme Matricielle : $A \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, \Omega \in O_n(\mathbb{R}), D \in D_n(\mathbb{R})$ $A = \Omega D\, {}^t\Omega$

▷ ! Works only in $\mathbb{R}$ not $\mathbb{C}$

→ Les endo de $S(E)$ sont simplement des dilatation de coordonnées $(\circledast \partial X)$

$f \in S(E)$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ VP

▷ Jolie formule $\left\{ \frac{\langle x | f(x) \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\} = [\lambda_1, \lambda_d]$

$\lambda_1 = \cancel{\max}$ $\lambda_r = \inf\ \sup_{x \in F} \langle f(x) | x \rangle$

LoDZ

▷ $f, g \in S(E)$ $\begin{cases} g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \circ f \in S(E) \\ g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \exists B \text{ BON DZ } f \text{ et } g \end{cases}$

▷ $f \in S(E)$. $\forall x \in E\ \langle f(x) | x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$

▷ $S^+(E) = \{ f \in S(E) \mid \forall x \in E\ \langle f(x) | x \rangle \geq 0 \} = \{ f \in S(E) \mid \mathrm{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+ \}$

→ Stable par + et par multiplication par $\lambda \geq 0$.
→ fermé convexe. (de $S(E)$ → de $\mathcal{L}(E)$)

▷ $S^+_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \in S_n(\mathbb{R})\ \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\ {}^tX \cancel{A} X \geq 0 \}$

▷ $S^{++}(E) = \{ f \in S(E) \mid \forall x \in E\ \langle f(x) | x \rangle > 0 \} = \{ f \in S(E) \mid \mathrm{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \}$

$S^{++}(E)$ stable par + et $(\times\ \lambda > 0)$

→ S^{++}, S^+, S généralisés $(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

→ S^{++} ouvert de S / $S^{++} \subset S^+ \subset S$, $\mathring{S^+} = S^{++}$, $\overline{S^{++}} = S^+$

▷ Forme à reconnaître : ${}^t\Lambda A \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} \lambda_j$