# Déterminant

- $\Phi$ $n$-linéaire alternée $\Rightarrow \exists \lambda, \forall X, \Phi(X) = \lambda \det(X)$ Stuce
- $\det_{\mathcal{B}'} (\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$
- $\begin{cases} (u_1, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \det(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \\ f \in GL \iff \det f = \det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) \neq 0 \\ M \in GL_n \iff \det M \neq 0 \end{cases}$
- $\det M = \det_{\mathcal{B}} (C_1(M), \dots, C_n(M))$
- $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\quad rg(M) = \max \{ r \in \mathbb{N} \mid M$ possède un mineur d'ordre $r$ non nul $\}$
- det est polynomial !
- "Prolongement par densité" $\mathcal{P}(GL) \to \mathcal{P}(\mathcal{M}_n)$

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j) j}$$

# Calcul de det

- $\det \begin{pmatrix} a_1 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- Opérations sur les lignes et colonnes

  $\det A = \det(C_1(A), \dots, C_n(A))$

  $= \det(C_1(A), \dots, C_i(A) + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k(A), \dots, C_n(A))$
- Développement | Ligne - Colonne

  Colonne : $\forall j \leq n \quad \det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}$

  Ligne : $\forall i \leq n \quad \det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}$
- Utilisation de la formule explicite

  det est un polynôme en ses coefficients
- Calcul par blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det A \det C$$