Compacité

$$\Lambda(u) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_{p+n} \mid n\in\mathbb{N}\}}$$

$\forall X$ fermé borné, $\sup X \in X$ et $\inf X \in X$

▹ K est compact si t^te suite à valeurs dans E possède une VA.

▹ La compacité est purement topologique

$\bigcup K$ est compact, $K_1 + \dots + K_s$ est compact
Dom
1 fini

$K_1 \times \dots \times K_s$ est compact pour D compatible.

Compact $\underset{\text{Pas tjrs}}{\overset{\Longrightarrow}{\cancel{\Longleftarrow}}}$ fermé et borné

Théorème de Bolzano-Weierstrass :

Les parties compactes de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ sont les fermés bornées

▹ K compact et f $\mathcal{C}^0$ alors $f(K)$ compact.

▹ L'image par f $\mathcal{C}^0$ d'un fermé n'est pas tjrs fermé
borné n'est pas tjrs borné

K compact. f $\mathcal{C}^0$ K présente un min et un max
$f_{|K}$ présente un max

Thm Heine K compact. f continue sur K alors f est uniformément continue

Si $u \in K^{\mathbb{N}}$ possède une seule VA alors u cv

K compact, $f : K \to F$ $\mathcal{C}^0$ et bijective $\Rightarrow f$ homéomorphisme

Dans un compact toute suite de Cauchy cv.

* f uniformément continue $\Leftrightarrow f$ transforme une suite de Cauchy en suite de Cauchy

E compact $\Longleftrightarrow$ Pour toute suite décroissante de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Hell of useful

K compact. $\forall r>0 \ \exists x_1, \dots, x_n \in K \quad K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$

K compact $\Longleftrightarrow K$ vérifie Borel Lebesgue

→ Thm de Riesz
→ Extraction ∞

K compact, K est séparable
→ $\forall p \ \exists x_1^p, \dots, x_{n_p}^p \in K \quad K = \bigcup_{i=1}^{n_p} B(x_i^p, \frac{1}{p})$
→ $K = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{i=1}^{n_p} B(x_i^p, \frac{1}{p})$
⇒ $D = \{ x_k^p \mid k, p \in [\![1, n_p]\!] \times \mathbb{N}^* \}$ dense dans K.