Connexité

▷ Chemin de a à b : $\gamma \begin{cases} [0,1] \to X \\ \gamma(0)=a,\ \gamma(1)=b \end{cases}$ $\mathcal{C}^0$.

▷ (X,d) connexe par arc $\iff \forall a,b \in X^2\ \exists \gamma$ chemin de a à b dans X.

▷ (X,d) connexe par arc, f $\mathcal{C}^0$ alors $f(X)$ connexe par arc.

▷ Convexe $\Leftarrow$ Connexe par arc.

▷▷ La connexité par arc est conservée par homéomorphisme.

• La relation $aRb \iff \exists \gamma$ chemin de a à b est une relation d'éq.

▷ (E,d) est connexe ssi E ne peut pas s'écrire comme partition de deux ouvert disjoints de E.

→ E connexe $\iff$ les seuls ouverts-fermés de E sont E et $\emptyset$.

→ E connexe $\iff \forall f : E \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, $f(E) \subset \{0,1\}$, f cste.

→ E connexe $\iff$ si $f : E \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, f vérifie le TVI.

→ L'image $\mathcal{C}^0$ d'un connexe est connexe.

! ▷ E connexe, R relation d'éq tq $\forall x \in E, \exists V \in \mathcal{V}(x)\ \forall y \in V\ xRy$
⇒ R trivial : Propagation infinitésimale.

Bonus : Raisonnement type connexité sur $\mathbb{R}$:

On veut montrer la prop P sur $[a,b)$ $A = \{x \in [a,b) \mid P$ vérifiée sur $[a,x]\}$

→ A non vide
→ A intervalle
→ T borne sup, on mq $T \in A$.

| On fait on peut tjs avancer d'ε ~ connexité

$\{a\} \to [a, a+\varepsilon), \dots, [a,c) \to [a, c+\varepsilon] \dots (a,T]$.

→ (P) propriété vraie sur tout voisinage $(B(w,r))$ de w où $P(w)$ True

• $\{x \mid P(x)$ True$\}$ ouvert

• On montre qu'il est fermé
→ On conclut par connexité.