Continuité

$f(x) \xrightarrow[\omega]{} l \iff \forall u \in A^{\mathbb{N}} \mid u_n \to \omega \quad f(u_n) \longrightarrow l$

---

f continue $\iff \forall V$ ouvert de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E

$\iff \forall F$ fermé, $f^{-1}(F)$ est un fermé de E

$\varphi : E \to F$ homéomorphisme $\iff \begin{cases} \varphi \text{ bijective} \\ \varphi \text{ continue} \\ \varphi^{-1} \text{ continue} \end{cases}$

Si E et F sont homéomorphes alors elles ont les mêmes propriétés purement topologiques.

$\varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$

$\forall x \in X \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x))$

f continue en $\omega \iff \forall i \; f_i$ continue en ω (démo)

$\varphi \; (E_1 \times \dots \times E_s) \to (X, \delta)$. $\varphi_{i,a} \begin{cases} E_i \to X \\ x_i \to \varphi(a_1, \dots, x_i, \dots, a_s) \end{cases}$

φ continue $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \forall i, \forall a, \; \varphi_{i,a}$ continue

---

- Les distances compatibles avec le produit définissent les mêmes ouverts

$\Rightarrow$ si $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s$ est continue pour une distance compatible alors elle l'est pour toutes

- La distance est continue sur $E \times E$ (pour D compatible).

(une distance compatible avec le $\times$ revient aux d_i dans chaque E_i donc D, D' compatibles $\Rightarrow D \sim D'$)

$X \subset E \qquad f \; \mathcal{C}^0 \Rightarrow f_{|X}$ continue

$f_{|X} \; \mathcal{C}^0 \not\Rightarrow f \; \mathcal{C}^0$ en tout point de X (what happens on the other side of the border)

$\Omega_{i \in I}$ ouverts. $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E$

$f \; \mathcal{C}^0 \iff \forall i \; f_{|\Omega_i} \; \mathcal{C}^0$

$F_1, \dots, F_s$ fermés (Sans la dénombrabilité la prop est fausse)

$f \; \mathcal{C}^0 \iff \forall i \leq s \; f_{|F_i} \; \mathcal{C}^0$