Diagonalisation

▷ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $MD = DM$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq$ $\Longrightarrow M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$

▷ $P(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$

▷ Si $\chi_M = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\omega_i}$ alors $\mu_M = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ M diag

▷ Deux matrices diag sont semblables ssi elles sont égales à permutation des coef diag prèt.

f diagonalisable

$\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tq $\forall i$ $f(e_i) = \lambda e_i$

$\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E tq $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonale

$\Longleftrightarrow \bigoplus_{\lambda\, VP} E_\lambda(f) = E$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \chi_f \text{ scindé. } \chi_f = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\omega_i} \\ \forall i \in [\![1, s]\!] \ \dim E_{\lambda_i}(f) = \omega_i \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ f annule un polynôme scindé à R S.

$\Longleftrightarrow \chi_f$ scindé et tout sev de E stable par f possède un supplémentaire stable

▷ f DZ. F sev E stable. φ induit $\Rightarrow \varphi$ DZ

▷ f DZ $\not\Leftarrow\Rightarrow$ χ_f scindé à racines SIMPLES

Apps

→ A dz $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ $A = PDP^{-1}$

! $P = (C_1, \dots, C_n)$ où C_i sont des colonnes propres.

→ $\dim \mathbb{K}[f] = s$

→ $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\pi_1, \dots, \pi_s)$, π_i proj sur E_{λ_i}.

→ χ_f SàRS, $\Gamma(f) = \mathbb{K}[f]$

→ Struc A DZ, M commute avec A, Donc PMP^{-1} commute avec D où $A = P^{-1}DP$
$\Gamma(A) \simeq \Gamma(D)$. (On ramène le Pb à D.

→ $g \in \Gamma(f) \Longleftrightarrow \forall i$ $g(E_{\mu_i}(f)) \subset E_{\mu_i}(f)$