Différentielle

𝒰 ouvert de E

▷ f différentielle en ω ssi il existe l'<u>unique</u> $df(\omega) \in \mathcal{L}(E,F)$

tq $\displaystyle \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in -\omega + \mathcal{U}}} \frac{f(\omega+h) - f(\omega) - df(\omega).h}{\|h\|} = 0$

→ Dérivée pour un $\mathcal{E}$ de départ de dim ↗↗ ≥ 1.
→ Approximation <u>linéaire</u> de $f(\omega+h) - f(\omega)$ de l'ordre de h.
→ définie sur E tt entier.

▷ f diff en ω $\Rightarrow \exists \vec{\mathcal{E}} : -\omega + \mathcal{U} \to F$ $\mathcal{C}^0$ en 0, $\vec{\mathcal{E}}(0) = 0$

$$\boxed{f(\omega+h) = f(\omega) + df(\omega).h + \|h\| \vec{\mathcal{E}}(h)}$$

▷ <u>Diff</u> en ω $\Rightarrow$ <u>$\mathcal{C}^0$</u> en ω

▷ $f = (f_1, \dots, f_p)$; f diff en ω $\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_p$ diff en ω et $df(\omega).h = (df_1(\omega).h, \dots, df_p(\omega).h)$

▷ Sur I ⊂ $\mathbb{R}$; f diff en ω $\Leftrightarrow$ f dérivable en ω

$$df(\omega).h = h\, f'(\omega)$$

→ For fun : $\operatorname{div} f(\omega) = \operatorname{tr}(df(\omega))$

▷ $\nabla f(\omega) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(\omega)$: $\forall h \in E$ $\boxed{df(\omega).h = \langle \nabla f(\omega) | h \rangle}$
$f : E \to \mathbb{R}$

▷ $f \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow df(\omega) = f$

▷ B p-linéaire $\displaystyle dB(\omega).h = \sum_{i=1}^{p} B(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, h_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_p)$

▷ ‖ ‖ diff et sa diff est $L \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \langle h | \frac{\omega}{\|\omega\|} \rangle \end{cases}$; $\nabla \| \|_\omega = \frac{\omega}{\|\omega\|}$

▷ $\varphi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u^p \end{cases}$, $\displaystyle d\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^{p} \omega^k h\, \omega^{p-1-k}$

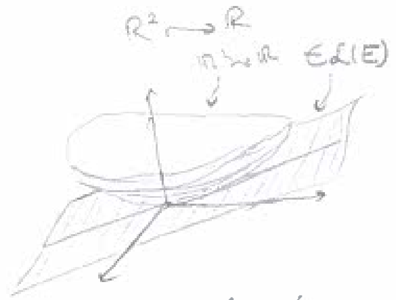
⇒ Composition : $(d\, g \circ f)(\omega) = dg(f(\omega)) \circ df(\omega)$

▸ Diff, dér : $\varphi : \mathcal{U} \to G$, $\gamma : I \to E$.

$$(\varphi \circ \gamma)'(\omega) = d\varphi(\gamma(\omega)).\gamma'(\omega)$$

Idée : Se ramener de la diff "d" à la dérivée en paramétrant
$\Rightarrow \circ\gamma$, $\gamma : I \to E$

Autre Idée : $f(\omega)$, $f(\omega+h)$, le h est vectoriel et est agaçant !
Que ramène à 1 dim : $h \leftrightarrow t\, u$, $h \to 0$
réel vecteur $\Rightarrow t \to 0$



ω vecteur normal au plan
$u(x) \sim \frac{\langle x | \omega \rangle}{\|\omega\|}$