Différentielle (2)

Le retour

Dérivée selon un vecteur

$h \in E$. Dérivée selon h en $\omega \in \mathcal{U}$:

▷ $\vec{D}_h f(\omega) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\omega + th) - f(\omega)}{t}$

Si f diff ▷ $\vec{D}_h f(\omega) = df_\omega \cdot h$, $D_{\lambda h} f(\omega) = \lambda D_h f(\omega)$

$DV \hookrightarrow Diff$

▷ f diff en $\omega \Rightarrow f$ admet des dérivées selon tout vecteur et

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad df_\omega\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i D_{e_i} f(\omega)$

▷ f diff en tout vecteur $\not\Rightarrow f$ diff

▷ f $\mathcal{C}^1 \Longleftrightarrow \forall i,\ D_{e_i} f : \mathcal{U} \to F$ définie sur $\mathcal{U}$ tout entier et continues (en tant que fct de $\mathcal{U} \to F$)

Dérivées partielles

▷ $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p))$

vecteur

$D_{e_i} f(\omega) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\omega) = \lim\limits_{\substack{x \to \omega_i \\ \neq}} \dfrac{f(\omega_1, \dots, \overset{i}{x}, \dots, \omega_n) - f(\omega)}{x - \omega_i}$

$\Rightarrow \quad f$ $\mathcal{C}^1 \Longleftrightarrow \forall i\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ définie et $\mathcal{C}^0$ (toutes les variables)

▷ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(df(\omega)) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. ($df_\omega(x) = \sum x_i D_{e_i} f(\omega)$ donne des les colonnes sont en ∂x_j)

▷ Si f réel ▸ $\nabla f(\omega) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\omega), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\omega)\right)$: $df(\omega) \cdot h = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\omega)\, h_i$

▷ Composition : $\dfrac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))\, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

Thm Schwarz

Si f $\underline{\underline{\mathcal{C}^p}}$ $\quad \dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}$ ne dépend pas de l'ordre des i_j

Extrema

▷ f présente un maximum global si $\forall x \in X \quad f(x) \leq f(\omega)$ $\quad$ → min → strict

en ω local si $\exists V \in \mathcal{V}(\omega)\ \forall x \in V\ f(x) \leq f(\omega)$

▷ f possède un extremum local en ω et f diff $\Rightarrow df_\omega = 0$

$\not\Leftarrow$

▷ f possède ________ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

▷ f convexe, $df_\omega = 0 \Longleftrightarrow f$ présente un min en ω

Convexité

▷ $\mathcal{U}$ cvx

f convexe $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \quad I_{a,b} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (1-\lambda)a + \lambda b \in \mathcal{U}\}$ est un intervalle

$\lambda \longmapsto f((1-\lambda)a + \lambda b)$ convexe

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

▷ f convexe $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \quad f(y) \geq df_x(y - x) + f(x)$

Graph au dessus des tg

▷ Problème de convexité sur E de dim ↑, on se ramène à la dim 1 en paramétrant : étude entre x et y, on introduit $\varphi \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longmapsto f((1-\lambda)x + \lambda y) \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad df_x f(a)$: plan tg $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\mathrm{Im}\ f$? $\mathrm{Im}\ df(a)$