Eq Diff Linéaires

$d = \dim E$

Problème de Cauchy : $(\mathcal{E}_B) \begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ possède une seule solution

$A : I \to \mathcal{L}(E)$, $B : I \to E$ $\mathcal{C}^0$

$A_0, \dots, A_{n-1} : I \to \mathcal{L}(E)$, $B : I \to E$ $\mathcal{C}^0$

$(\mathcal{E}_B)$ $Y^{(n)} = A_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + A_0 Y + B$

$\Phi \begin{cases} \mathcal{S}_B \longrightarrow E^n \\ Y \longmapsto (Y(t_0), \dots, Y^{(n-1)}(t_0)) \end{cases}$ isomorphisme

[Unicité de la sol avec CI]

$\mathcal{Y}$ solutions $\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ A_0 & \cdots & & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}$

- $\mathcal{S}_{0,n}$ est un ℰv de dim $(n \dim E)$
- $\mathcal{S}_{B,n}$ est un ℰ affine de dim $n \cdot \dim E$, de direction $\mathcal{S}_0$.

---

pour $\mathcal{E}$

- $Y_1, \dots, Y_d$ base de l'ℰ des solutions $\iff \exists t_0$ $Y_1(t_0), \dots, Y_d(t_0)$ libre
- $W \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \dots, Y_d(t)) \end{cases}$. W est nul ou ne s'annule jamais

$\forall t \in I \quad W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, W(t)$

$W_{\varphi,\psi}$ traduit l'évolut° de φ/ψ → $W = \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' \psi^2$

Variation des constantes $(Y_i)_{i \le d}$ base des sols

- $\mathcal{E}_B$ possède une solution de la forme $\boxed{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i Y_i}$, $\boxed{\lambda_i : I \to E}$ $\mathcal{C}^1$ vecteurs
- Si on connait une sol particulière, no need for VC.
- Ordre 2 : $\forall t$ $y'' + a(t) y' + b(t) y + c(t) = 0$. φ, ψ base

→ On cherche une sol $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \lambda\varphi + \mu\psi \\ y' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \end{cases}$

$\oplus$ $0 = \lambda'\varphi + \mu'\psi$

(...) $\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}$

On resout $\begin{cases} \lambda' = \dots \\ \mu' = \dots \end{cases}$ On intègre (إن شاء الله)

Eq scalaire à coeff cte

$(\mathcal{E}_g)$ $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = g$

$\Phi \begin{cases} S_g \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ y \longmapsto (y^{(i)}(t_0))_{i \in [\![0, n-1]\!]} \end{cases}$

$P = X^n + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $\boxed{S_0 = \mathrm{Ker}\, P(D)}$

Dans $\mathbb{C}$, $P = \prod \underbrace{(X - \lambda_i)^{\omega_i}}_{Q_i}$, $S_0 = \oplus \mathrm{Ker}\, Q_i(D)$

$\mathrm{Ker}\, Q_i(D) = \{ t \mapsto e^{\lambda_i t} \tilde{P} \mid \tilde{P} \in \mathbb{C}_{\omega_i - 1}[X] \}$

Superposition $\Sigma_B : Y' = AY + B$, $\Sigma_{B_i} : Y' = AY + B_i$

$B = \sum \lambda_i B_i$. U_i sol de B_i, $\sum \lambda_i U_i$ sol de Σ_B

Recollement : $a_0, \dots, a_n : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^0$

$(\mathcal{E})$: $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = g$

Si a_n s'annule, $(\mathcal{E})$ n'a, àpriori pas de sols dans I tout entier.

[Sols dans chaque intervalle où $a_n \neq 0$, puis recollement]

→ Recollement : dérivabilité + Continuité

Zéros : $y'' + py' + qy = 0$, q, p $\mathcal{C}^0$

- Les 0 ne s'accumulent pas, sauf eventuellement aux bords
- L'ensemble des 0 est fini sur tout compact
- ———— est soit fini soit ∞ dén, en suite $(\alpha_n) \nearrow$ $[a, +\infty[$ $(\alpha_n) \searrow$ $]-\infty, a]$ $\alpha_n \nearrow$ $]-\infty, +\infty[$
- φ, ψ système fond, $\psi(a) = \psi(b) = 0$, $\exists c \in [a, b]$ $\varphi(c) = 0$

→ W traduit évolution de φ/ψ. $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = \frac{W}{\psi^2}$