Espaces Préhilbertiens

He got ∞ and everything went crazy..

Cauchy-Schwarz : $\forall u,v \in E \quad \langle u|v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$

$\langle u|v\rangle = \|u\|\,\|v\| \iff u \propto v$.

- La distance de a à un convexe compact K est réalisée en un unique point.
Ce point vérifie : $\forall x \in K \quad \langle x-w|a-w\rangle \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$

- $\Phi \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & (E^*) \\ u \longmapsto \langle u|.\rangle \end{cases}$ → iso pour un euclidien
→ seulement injective en p.h.

- $X^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(X)}^\perp$, $X^\perp$ est un sev fermé.
- $F \oplus F^\perp$ n'est pas tjrs $= E$ en p.h ; $(F^\perp)^\perp \underset{\text{seulement}}{\supset} F$ || $F \oplus F^\perp = E$ / $(F^\perp)^\perp = F$ si $\dim F < +\infty$
- $a \in F \oplus F^\perp \iff d(a,F)$ atteinte [En gros, on peut projeter $\perp$]
Cette distance est atteinte en $\Pi_F^\perp(a)$: projection orthogonale.

- **Gramien** (16) | $G_u = (\langle u_i|u_j\rangle)_{i,j}$; $G_u \in S_n^+(\mathbb{R})$; $G_u \in S_n^{++} \Leftrightarrow (u_i)$ libres
G.S. $(u_1,\dots,u_n) \mapsto (v_1,\dots,v_n)$ $\det G_u = \prod \|v_i\|^2$

⟹ La distance à un sev est atteinte en la proj $\perp$ quand elle existe.

- Dim finie. $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ base de F sev de E $\underset{\dim n}{}$ O.N, $\boxed{\Pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i|x\rangle \varepsilon_i}$

$$d^2(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i|x\rangle^2$$

- $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ SON $\quad \sum_{i\in I} \langle \varepsilon_i|x\rangle^2 \leq \|x\|^2$ Bessel

- Gram-Schmit encore vrai pour une famille dén.

- $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ SON. $\quad x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)} \iff \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x|e_n\rangle^2$

$\forall x \in E \quad \|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x|e_n\rangle^2$

- E séparable $\iff \exists (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SON $|\ \overline{\mathrm{Vect}(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$
(ε_n) famille totale
famille totale sans l'ortho.

Base ∞ ! What a feeling !
L'euclidien se généralise

! - $x = \sum_{0}^{\infty} \langle \varepsilon_i|x\rangle \varepsilon_i$, l'égalité est uniquement vrai en limite pour cette norme : $\|\ \|$.

Ex $\langle f|g\rangle = \int fg \Rightarrow f = \sum^{\infty} \langle P_n|f\rangle P_n$, ∞ en moyenne pas simple !
Mais $f(x) \underset{\text{A priori}}{\neq} \sum \langle P_n|f\rangle P_n(x)$