Groupes

Théorème de Lagrange :

H sg de G. $\quad |H| \mid |G|$

$\varphi : G \to H$ morphisme $\quad |\mathrm{Ker}\,\varphi|\,|\mathrm{Im}\,\varphi| = |G|$

$\langle A \rangle = \{a_1 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{N}, \forall i, a_i \in A \cup A^{-1}\}$

Pour montrer que deux groupes ne sont pas isomorphes, on exhibe une propriété dans l'un qui n'est pas dans l'autre (de grp).

$\varphi : G \to G'$ morphisme $\quad \mathrm{Im}\,\varphi$ est isomorphe à $G/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$

φ morphisme, $\quad \varphi$ injectif $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\}$

Si x d'ordre N i.e $|\langle x \rangle| = N$ $\quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad x^m = e \Leftrightarrow N \mid m$

Si x, y commuttent et $w(x) \wedge w(y) = 1$ alors $w(xy) = w(x) \times w(y)$

$$\langle \bar{m} \rangle = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \Leftrightarrow m \wedge n = 1$$

$$\varphi(n) = |\{m \leqslant n \mid m \wedge n = 1\}|$$

Toute permutation se décompose en prod de cycles disjoints.

$(x_1 \cdots x_\ell)^\ell = e$. $\quad \sigma^N = c_1^N \circ \cdots \circ c_p^N = \mathrm{id} \Leftrightarrow \mathrm{ppcm}\, \ell_i \mid N$

Toute permutation est produit de transpositions

$(1\,2) \cdots (1\,n)$
$(1\,2)(2\,3) \cdots (n{-}1\,n)$ engendrent S_n.

$(\mathbb{K}, +, \times)$ corps. Si G sg de $(\mathbb{K}, \times)$ de cardinal N alors G unique et G cyclique $\quad (X^N - 1)$

G groupe abélien fini

$\exists a \in G \quad \forall b \in G \quad w(b) \mid w(a)$

Action de groupe. G sur E

$|\mathrm{Orbite}(x)| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}\, x|}$

Lemme de Cauchy $\quad H$ groupe d'ordre n. p premier $p \mid n$.
$\exists x \in H \quad w(x) = p$

H sg distingué de $G \Rightarrow G/_H$ groupe
$(gH = Hg)$