Intégrale sur un Intervalle

$a \in \mathbb{R}, \omega \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$

- $f : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\int_a^\omega f = 0 \iff f = 0$ si f $\mathcal{C}^0$
- $f \geq 0$ $\int_a^\omega f \text{ cv} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+ \; \forall t \in [a, \omega[\; \int_a^t f < M.$
- $u_n \nearrow \omega, u_0 = a$ $\int_a^\omega f \text{ cv} \iff \sum_{n \geq 0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f \text{ cv}. \left(\int_a^\omega f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f \right)$
- $0 \leq f \leq g.$ $\int_a^\omega g \text{ cv} \Rightarrow \int_a^\omega f \text{ cv}.$
- $f(x) = O(g(x))$, $\int_a^\omega g \text{ cv} \Rightarrow \int_a^\omega f \text{ cv}$ (≥ 0)
- $f \sim g$: $\int_a^\omega g \text{ cv} \iff \int_a^\omega f \text{ cv}$ (≥ 0)

$\mathcal{E}_x$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln t^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 1) \\ < +\infty & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \end{cases}$$

$$\Gamma \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{cases}$$

- Convexe
- $\forall x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- Intégration des R : $f, g : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}pM$, $f \underset{\omega}{=} o(g)$
  - $\to \int_a^\omega g \text{ cv} \Rightarrow \int_x^\omega f \underset{\omega}{=} o\left(\int_x^\omega g\right)$
  - $\to \int_a^\omega g \text{ dv} \Rightarrow \int_a^x f \underset{\omega}{=} o\left(\int_a^x g\right)$
- $\int_a^\omega f \text{ ACV} \Rightarrow \int_a^\omega f \text{ CV}$
- Lemme de Lebesgue : f $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b)$ $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \longrightarrow 0$
- Les fonctions à support compacts sont denses dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$