Jordan Dunford

On sait que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_f = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$

$$M \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 Id_{\alpha_1} + \nu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s Id_{\alpha_s} + \nu_s \end{pmatrix}$$

où $\nu_1, \ldots, \nu_s$ nilpotent

Dunford : $\exists ! (d, \nu) \in \mathcal{L}(E)^2$, tq

- d DZ
- ν nilpotent
- $d \circ \nu = \nu \circ d$
- $f = d + \nu$

- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$
- $\mathbb{C} \sim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(I_2, i)$

$e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightarrow$ rotation

$i\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\theta} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ Not bad

L'Exp d'endo

Jordan

- $\mathcal{A}$ $\mathbb{K}$ algèbre de dim finie.

  $\exists \nu$ norme sur $\mathcal{A}$ tq $\forall x, y \in \mathcal{A}$ $\nu(xy) \leq \nu(x)\nu(y)$
- $\forall a \in \mathcal{A}$ $\boxed{e^a \in \mathbb{K}[a]}$.
- Φ Morphisme d'$\mathcal{A}$ $\Phi(e^a) = e^{\Phi(a)}$
- a, b commutent $e^{a+b} = e^a e^b$.
- exp $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A} \\ t \rightarrow \exp ta \end{matrix}$ dérivable.
- $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \exp \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ (Il suffit de travailler à $\simeq$ près)
- φ DZ $\Rightarrow e^\varphi$ DZ
- F stable par φ $\Rightarrow$ F stable par e^φ.
- φ Tri $\Rightarrow e^\varphi$ tri
- $\det(e^\varphi) = e^{\mathrm{tr}\varphi}$.

$\rightarrow$ φ annul $(X-\mu_1)\cdots(X-\mu_s)$. L Pol d'I déf en $\mu_1, \ldots, \mu_s$, $e^\varphi = L(\varphi)$.

- e^φ stabilise les SEP de φ.