$\langle\,|\,\rangle$, $O_n(\mathbb{R})$

The greatest ... with style

E evee. $\langle\,|\,\rangle$ ps.

▷ $\Phi \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto \langle x|.\rangle \end{array} \right.$ iso. $\quad x \perp y \Leftrightarrow \langle x|y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

▷ $F \oplus F^\perp = E$. $\quad F^{\perp\perp} = F$. (F_i) tq $\forall i \neq j$ $F_i \subset F_j^\perp$, (F_i) somme directe.

▷ π proj. $\quad \pi$ orthogonal $\Leftrightarrow$ $\|\,\pi\,\| = 1$

▷ β BON. $\quad \langle x|y\rangle = {}^t\mathcal{M}_\beta(x)\, \mathcal{M}_\beta(y)$.

$f \in \mathcal{L}(E)$. $\quad f \in O(E) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \forall x,y,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle \\ \quad\Updownarrow \\ \bullet\ \forall x \quad \|f(x)\| = \|x\| \\ \quad\Updownarrow \\ \bullet\ f \text{ envoie } \underline{\text{une}} \text{ BON sur une BON} \end{array} \right.$

$\Rightarrow u(F^\perp) = u(F)^\perp$

▷ $O(E)$ sous groupe de $GL(E)$. $O(E)$ est $\underline{\text{compact}}$ de $\mathcal{L}(E)$.
$\rightarrow \det(O(E)) = \{1, -1\}$.

▷ $SO(E) = \{ f \in O(E) \mid \det f = 1 \}$. $\quad O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. $\quad O^-(E) \underset{\text{grp}}{\overset{\sigma\ \text{réflex}}{\simeq}} SO(E)$

▷ σ symétrie $\perp$: $\sigma^2 = 1$; $\sigma = Id_F \oplus -Id_{F^\perp}$. $\quad \sigma_{\mathbb{R}u} = 2p_{\mathbb{R}u} - Id$
p_D proj orthogonale sur D droite $\mathbb{R}u$, $\quad p_D(x) = \dfrac{\langle u|x\rangle}{\|u\|^2}\, u$, $\quad M_{\mathbb{R}u} = \dfrac{u\,{}^tu}{{}^tu\,u}$

▷ $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\quad M \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ {}^tM \cdot M = I_n \\ \quad\Updownarrow \\ \bullet\ \text{Les colonnes de } M, (C_1(M), \dots, C_n(M)) \text{ forment une base ON.} \end{array} \right.$

ortho $\oplus$ Normes: $\left(\begin{array}{l} C_i(M) \perp C_j(M) \\ \|C_i(M)\| = 1 \end{array} \right)$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad \sum a_i^2 \geq 0$, $\quad \langle \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \rangle = \sum ab$

▷ Orientation : Choisir une base de ref.
$u \in SO(E)$ $\quad u(\mathcal{B}^+) = \mathcal{B}^+$, $u(\mathcal{B}^-) = \mathcal{B}^-$
$u \in O^-(E)$ $\quad u(\mathcal{B}^+) = \mathcal{B}^-$; $u(\mathcal{B}^-) = \mathcal{B}^+$.

$B_1 \mathcal{R} B_2 \Leftrightarrow \det_{B_1} B_2 = 1$
(même dir)

▷ $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \sim$ volume.
($\rightsquigarrow$ Volume ε)

▷ Dim 2 $\quad SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad$ Rotation θ / Une dépend pas de la BON

$O^-(E) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$
$\hookrightarrow$ Symétrie $\perp$

Règles de calcul:

$\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}$ $\qquad s_D \circ \rho_{\theta'} = s_{\rho_{-\frac{\theta}{2}}(D)}$

$\rho_\theta \circ s_D = s_{\rho_{\frac{\theta}{2}}(D)}$ $\qquad s_D \circ s_{D'} = \rho_{2\alpha}$

$\Rightarrow \rho_\theta \circ s_D \circ \rho_\theta = s_{\rho_\theta(D)}$
$s_D \circ \rho_\theta \circ s_D^{-1} = \rho_{-\theta}$

Réduction

▷ $\varphi \in O(E)$, $sp(\varphi) \in \{-1, 1\}$.

▷ $\varphi \in O(E)$, φ DZ $\Longleftrightarrow$ φ symétrie orthogonale.

Thm de réduction $O(E)$: $f \in O(E)$, $\exists \mathcal{B}$ BON tq $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & \rho_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \rho_{\theta_r} \end{pmatrix}$

$0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_r \leq \pi$. Cette réduction est unique.

▷ Les composantes connexes par arcs de $O(E)$ sont $O^-(E)$ et $SO(E)$.

▷ $O(E)$ engendré par les $\underline{\text{réflexions}}$ $\left\{ f \mid f \sim \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

▷ $O_n(\mathbb{Q})$ dense dans $O_n(\mathbb{R})$