Polynôme minimal

Polynôme Caractéristique

⚠ $P(Q(u)) = (P \circ Q)(u) \neq (P.Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

▷ $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$

Lemme des Noyaux

▷ $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $P \wedge Q = 1$. $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\operatorname{Ker}(PQ(f)) = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$$

$f \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ VP $\neq$ Les E_{λ_i} sont en somme directe.

▷ Deux matrice semblables représentent la même endo dans deux bases $\neq$.

▷ $A \simeq B \Rightarrow A \sim B$. $\simeq$ est invariant par extention de corps de base
$\not\Leftarrow$

On a même $\underset{\mathbb{C}}{\simeq} \rightarrow \underset{\mathbb{R}}{\simeq}$ (Ex 0)

→ Deux matrices semblables ont les mêmes VP.

→ λ VP A → $P(\lambda)$ VP de $P(A)$

Polynôme Caractéristique

$$\chi_A = \det(X I_n - A)$$

$$\chi_A = X^m - \operatorname{tr} A \, X^{m-1} + (\dots\dots) + (-1)^m \det A$$

$$\boxed{\lambda \text{ VP de } A \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0}$$

→ $A \simeq B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$

▷ Les sous-E propres sont stables.

▷ Les ss E caractéristiques $\operatorname{Ker}((f - \lambda \mathrm{Id})^{w(\lambda)})$ sont stables

→ Leurs dim est la multiplicité de λ dans χ_f. $(w(\lambda))$

▷ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ $A \simeq B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$