Probabilités

$\to \mathcal{T}$ tribu sur $\Omega \Leftrightarrow$
- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$
- $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ stable par $\cup$ dénombrable.

$\to \emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$; $\to$ stable par $^{-}$, $\cup_{\text{dén}}$

$\to \mathcal{T}$ stable par $\cap$ dénombrable.

$\to$ Useful. $f^{-1}(\cup A_i) = \cup f^{-1}(A_i)$; $f^{-1}(\cap A_i) = \cap f^{-1}(A_i)$; $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$

$\to$ Probabilité :
- $P(\Omega) = 1$
- (A_i) deux à deux disjoints, dén, $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

$\to (B_n) \nearrow c$. $\quad P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim P(B_n)$

$\to (A_n) \searrow c \quad P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim P(A_n)$

▷ Loi géométrique $\quad P(\{n\}) = (1-p)^{n-1}\, p \quad$ "évolution ind du temps" $\quad E = \frac{1}{p} \quad V = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$

▷ Loi de Poisson $\quad P(\{n\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad E = \lambda,\ V = \lambda$

▷ Proba conditionnelle : $P(X \mid A) = \dfrac{P(X \cap A)}{P(A)}$

▷ (A_i) système complet : $P(B) = \sum_i P(A_i)\, P(B \mid A_i)$

▷ Bayes $\quad P(A_j \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$

$\to P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1)$

▷ Loi Binomiale de para p, n

$$P(X = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$$

$\to E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. $\quad E(X) \geq 0 \Leftarrow X \geq 0$

$\to E(f(X)) = \sum_{v \in X(\Omega)} f(v)\, P(X = v)$

$\to$ Espérance finie : $E(|X|) < +\infty$

$\to X, Y$ indép, $E(XY) = E(X)E(Y)$

Markov : $\quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X)$

$- P(X \geq a E(X)) \leq \frac{1}{a}$

▷ X possède un moment d'ordre $k \Longleftrightarrow E(|X|^k) < +\infty$ $(\mathcal{M}_k)$

$\to \mathcal{M}_k$ ~~linéaire~~ Ev.

$\to \forall k\ \mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k \ ; \ \mathcal{M}_\infty = \cap \mathcal{M}_k$

$\Rightarrow \mathcal{G}(p), \mathcal{P}(\lambda) \in \mathcal{M}_\infty$.

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

▷ $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$

▷ X, Y indép $\Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$