Suites et Séries de f

▷ CVS : $\forall x \in X \quad f_n(x) \longrightarrow \ell(x)$.

~~CVU~~ Propriétés passant à la CVS
- → Monotonie
- → Convexité
- → Linéarité

▷ CVU : $\quad \|f_n - \ell\|_\infty \longrightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - \ell(x)\| \leq \varepsilon$

P passants à la CVU
- → Sup
- → $\mathcal{C}^0$
- → CVU ⇒ CVS.
- → $\int$ $\mathcal{C}^0$ pour $\|\ \|_\infty$

▷ En dim finie f_n CVU ⇔ f_n vérifie le critère de Cauchy.
→ Il suffit de montrer la CVS puis ↑ en U.

▷ Thm de la double limite

$\Omega \subset X$. $w \in \overline{\Omega}$. $f_n \xrightarrow{U} \ell$. [E vn de dim < ∞]

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to w} f_n(x) = \lim_{x\to w} \ell(x)$$

Séries

▷ $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVU $\iff$ $\sum u_n$ CVS et $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$
$\forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right\| \leq \varepsilon$

▷ Thm de la double lim :
- $\sum u_n$ CVU
- u_n possède une ℓ

$$\lim_{x\to w} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to w} u_n(x)$$

▷ CVN : $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty \quad$ (CVN $\not\Leftarrow$ CVS) [CVA $\underset{\text{en dim} < +\infty}{\Rightarrow}$ CVS]

→ Dim < +∞ CVN ⇒ CVU.

▷ f_n CVU sur un segment $\quad \lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$

▷ $\sum u_n$ CVU sur un segment $\quad \lim \int_a^b \sum_{n=0}^{N} u_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$