Lemmes $\mathcal{S}_e\mathcal{E}_n$ - $\mathcal{S}_e$ - $\mathcal{S}_d\mathcal{S}_e f_n$

Abel $\sum a_n u_n \longleftrightarrow \sum A_n |u_{n+1} - u_n|$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, où $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$

- Useful. $(u_n)\searrow_s 0$; (A_n) bornée.
- Useful. $(u_n)\searrow$; $(A_n) \to 0$ (reste)

Critère uniforme de Cauchy : $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ cv U ssi
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p,q \geq N\ \ |\sum_{n=p}^{q} u_n| \leq \varepsilon$

→ Permet de passer à des sommes finies → permet de passer à la limite si
$u_n = u_{n,x}$.

Abel-Diri :
- ▷ $\sum a_n z^n$ cv U sur D $\Rightarrow$ $\sum a_n z^n$ cv U sur $\overline{D}$ (D disque de cv; $R=1$)
- ▷ $\sum a_n z^n$ cv U sur $U \Rightarrow \sum a_n z^n$ cv U sur $\overline{D}$
- ▷ $\sum a_n$ cv $\Rightarrow$ $\sum a_n z^n$ cv U sur $[0,1]$, $R=1$

Règle de Cauchy : $\sum a_n z^n$: $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$.

▷ f DSE au voisinage de 0, rayon R $\Rightarrow$ f DSE au voisinage de $\omega \in \mathcal{B}_o(0,R)$ de rayon $R - |\omega|$.

▷ Si $\sum a_n < +\infty$ alors $\forall (p_k)$ paquets $(\sum_{u_k}^{u_{k+1}} a_n)$, $p_k \to 0$, $p_k = S_{u_{k+1}} - S_{u_k}$

▷ Comparaison $\sum \varphi(n)$, $\int \varphi(t)\,dt$:
$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt = \left[(t-n)\varphi(t)\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (t-n)\varphi'(t)\,dt = \varphi(n+1) - \int_n^{n+1} (t-n)\varphi'(t)\,dt$
$\left|\int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt - \varphi(n+1)\right| \leq \int_n^{n+1} |\varphi'(t)|\,dt$

→ $\sum |u_n - v_n| \leq \omega_n$. $\sum \omega_n$ cv $\Rightarrow$ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont m̂ nature
$\sum |u_n - v_n|$ cv $\Rightarrow$ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont m̂ nature

→ f, g DSE sur $\mathcal{B}(0,R)$.
- Si $\exists \alpha \in \mathcal{B}_o(0,R)$ tq ~~f(α)~~ $\forall k$, $f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ alors $f = g$ sur $\mathcal{B}(0,R)$.
- Autre formulation : Si $f_{|V} = g_{|V}$ sur un voisinage de $\alpha \in \mathcal{B}(0,R)$ alors $f = g$ sur $\mathcal{B}(0,R)$.

→ CVU de f_n vers f : Interesting to see → $\forall n, \sup_x |f(x) - f_n(x)|$ ...