Equations de MAXWELL

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}}$$ M.G

$$\boxed{\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}}$$ M.F.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0}$$ M ϕ

$$\boxed{\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \left(\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}}_{\vec{j}_D} \right)}$$ MA.

M G $\Rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{E}\, d\tau = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \Rightarrow \boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

M F. $\Rightarrow \iint \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t)\, d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint \vec{B}\, d\vec{S}\right) \Rightarrow \boxed{e(t) = \oint \vec{E}\, d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}}$

M ϕ $\Rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{B}(M,t)\, d\tau = 0 \Rightarrow \boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0}$

M A $\Rightarrow$

$$\iint \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t)\, d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j}\, d\vec{S} + \varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{B}(M,t)\, d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}(t) + \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} d\vec{S}}$$

Th d'Ampère généralisé.

$\Longrightarrow$ M ϕ : $\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \exists \vec{A}, \quad \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{\text{rot}}\, \vec{A}(M,t)}$$

$\vec{A}$ est le potentiel vecteur.

$\Longrightarrow$ MF + $\Rightarrow$ $\vec{\text{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

donc $\exists V(M,t)$

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = -\vec{\text{grad}}\, V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Jauge de Lorentz :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0} \qquad c^2 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$$

Equations de propagation :

$$\vec{\text{rot}}\left(\vec{\text{rot}}\, \vec{X}\right) = \vec{\text{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{X}\right) - \vec{\Delta} \vec{X}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\text{grad}}\, \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \\
&\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = -\mu_0\, \vec{\text{rot}}\, \vec{j} \\
&\vec{\Delta} \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}
\end{aligned}}$$

$$\Delta V = \operatorname{div}\left(\vec{\text{grad}}\, V\right) \Rightarrow \boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ARQS : Si un phénomène se de temps caractéristique τ se propage dans un milieu de dimension caractéristique L à une vitesse c, on dit qu'on est dans le cadre de l'ARQS si $\boxed{\frac{L}{c} \ll \tau}$

Bilan énergétique :

→ Densité volumique de l'énergie électromagnétique :

$$\boxed{u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

→ Puissance volumique dissipée par effet Joule :

$$\boxed{P_v(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \vec{E}(M,t)}$$

→ Puissance transportée à travers (S) (Rayonnée)

$$\boxed{P = \oiint \vec{\Pi}(M,t)\, d\vec{S}(M)}$$

avec $\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}}$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}}_{\text{terme due à l'énergie électromagnétique}} + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{cédée à la matière}} + \underbrace{\mathrm{div}\, \vec{\Pi}(M,t)}_{\text{rayonnée à travers la surface traversée}} = 0}$$

Potentiel vecteur :

Définition :

On a $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A}(M)$ tq $\boxed{\vec{B}(M) = \vec{rot}\, \vec{A}}$

Si f est une fct scalaire et $\vec{A}$ vérifie $\vec{B}(M) = \vec{rot}\, \vec{A}$

alors $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{grad}\, f$ vérifie $\vec{B}(M) = \vec{rot}\, \vec{A'}$

donc $\vec{A}$ n'est pas unique. On peut imposer la jauge de Coulomb : $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$

Dans ce cas :

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$ Equation de Poisson

Solution intégrale :

$$\boxed{\vec{A}(M) = \int \mu_0 \frac{d\vec{C}(P)}{4\pi PM}}$$

Propriété : $\vec{A}$ est comme $\vec{E}$; un vecteur polaire ie :

$\vec{A} \in$ plan de symétrie de courant

$\vec{A} \perp$ plan d'antisymétrie de courant.

Définition intégrale

$$\boxed{\iint \vec{B}\, d\vec{S} = \oint \vec{A}\, d\vec{l}}$$