Equations différentielles

Sup a, b deux application continues sur I

On considère l'équa. diff $\boxed{y' + ay = b}$ (E)

Soit $x_0 \in I$ on pose $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$.

On a f solution de (E) $\iff f' + af = b$.

$$\iff e^A f' + A' e^A f = b e^A$$

$$\iff (e^A f)' = b e^A$$

$$\iff \boxed{(\exists C \in \mathbb{K})(\forall x \in I)\quad f(x) = \underbrace{Ce^{-A(x)}}_{\text{Solution de l'equation homogène}} + \underbrace{e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)}\,dt}_{\text{Solution particulière}}}$$

Théorème de Cauchy :

a et b deux fcts continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et :

$$(E) : \; y' + ay = b.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$

$$f(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)}\,dt$$

Méthode de la variation de la constante :

$a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. f_0 solution de (E_h) : $y' + ay = 0$ sur I

alors $(\exists C \in D(I, \mathbb{R}))$ $x \mapsto C(x) f_0(x)$ solution.

de (E) : $y' + ay = b$

Spé :

Théorème :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $X \in D(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$

$X' = AX \iff \exists C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X(t) = e^{tA} C$