À connaître :

→ Dans $\mathbb{K}^n$: $\boxed{\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\cdot\|_2 \leq n\,\|\cdot\|_\infty}$

→ E evn de dim finie $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base

$\left(\forall x \in E \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

N une norme sur E

$$\left(\forall x \in E \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \quad N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|\, N(e_i)$$

$$N(x) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|x\|_\infty$$

→ $\begin{cases} A \text{ est dense dans } E \iff \overset{\circ}{C_E^A} = \emptyset \\ \overset{\circ}{A} \neq \emptyset \iff C_E^A \text{ dense dans } E \end{cases}$

→ TAF généralisé : $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$

dérivables sur $]a,b[$ alors :

$$(\exists c \in]a,b[)\ (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

→ Règle de L'Hôpital : si $f(a) = f(b) = 0$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

→ Les formules de Taylor

* **Taylor Lagrange** : $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$

$\mathbb{R}$ $\left(\exists c \in]a,b[\right) ;\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

* **Formule de McLaurin** : $f \in \mathcal{C}^n([0,b],\mathbb{R})$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]0,b[$

et $0 \in [0,b]$ alors $(\forall x \in I)\ (\exists \theta_x \in]0,1[)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x x)$$

* **Inégalité de Taylor-Lagrange** : $F \in \mathcal{C}^n([a,b],E)$

et $D^{n+1}(]a,b[,E)$, $M = \sup_{t \in]a,b[} \| F^{(n+1)}(t) \|$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

* **Taylor-Young** : $F : I \subseteq \mathbb{R} \to E \in \mathcal{C}^n(I,E)$

$a \in I$ tq $f^{(n+1)}(a)$ existe alors

$$\begin{cases} F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \cdots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}) \\ F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \cdots + \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o_a((x-a)^{n+1}) \end{cases}$$

* **Taylor avec reste intégral** : $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a,b],E)$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Intégration terme à terme :

$(f_n)_n$ une série de fcts de $I \longrightarrow \mathbb{K}$.

1) f_n cpm $(\forall n \in \mathbb{N})$ sur I
2) $\sum f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur I.
3) f est cpm sur I.
4) $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n|$ CV

alors f est intégrable. De plus on a.

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Dérivation

$(f_n)_n$ une série de fcts $I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow F$ avec

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$
2) $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur I
3) (f_n') CVU sur tout segment $J \subseteq I$

alors $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $f_n' \xrightarrow{CVU} f'$

Dérivation terme à terme

$(f_n)_n$ une suite de fcts $I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow F$

1) $\sum f_n \xrightarrow{CVS} f$
2) $f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$
3) $\sum f_n'$ CVU sur tout segment $J \subseteq I$

alors f est dérivable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' = f'$$

Formules de Taylor $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$ de classe.

$\longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}$:

$$* \quad \boxed{f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

$$* \quad \boxed{\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I_{a,b}} \| f^{(n+1)}(t) \|}$$

(Inégalité de Taylor-Lagrange) $I_{a,b}$: l'intervalle d'extrémités a et b

$\longrightarrow \mathcal{C}^n$: Soit $a \in I$

$$* \quad \boxed{(\forall x \in I) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)}$$

(Taylor Young.)

$(f_n)_n$ une série de fct. Si $\exists (x_n)_n \in A^n$ tq

$$f_n(x_n) - f(x_n) \not\longrightarrow 0$$

alors $(f_n)_n$ ne cv pas uniformément vers f.

CV dominée : 1)- $(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n cpm. sur I

2) $f_n \xrightarrow{cvs} f$

3) f cpm

4) $\exists \varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive cpm intégrable tq $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\|f_n\|_F \leqslant \varphi$

Alors f et f_n sont intégrables et $\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n$.

Scanned with CamScanner

Théorème :

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

1) $(\forall t \in I)$ $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A.
2) $(\forall x \in A)$ $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm. sur I
3) $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cpm positive intégrable tq
$(\forall (x,t) \in A \times I)$ $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I $(\forall x \in A)$

et $x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie continue sur A

Théorème Puisque la continuité est une notion locale, on cherche à dominer sur un compact $K \subseteq A$ on a donc le th suivant :

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ On suppose que.
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

1) $(\forall t \in I)$ $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A
2) $(\forall x \in A)$ $t \mapsto f(x,t)$ est cpm sur I
3) Pour tout compact $K \subseteq A$, $\exists \varphi_K : I \to \mathbb{R}^+$ cpm. intégrable sur I tq.
$(\forall (x,t) \in K \times I)$ $|f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$

Alors $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

et $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie continue sur A.

Scanned with CamScanner

→ Pour chercher un développement asymptotique :

i) On cherche un équivalent de $u_{n+1} - u_n \sim a_n$.

ii) Ce qui donne un équivalent de u_n (Césaro)

iii) On cherche un equivalent de $u_{n+1} - u_n - a_n \sim b_n$

iV) On somme $u_{n+1} - u_n - a_n$ pour obtenir le 1^{e} terme

V) Ainsi de suite.

Exemple.

$u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Donner les 2 premiers termes du développement asymptotique (Gosfini Analyse 1 p 102)

→ Transformation d'Abel :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{p} v_n u_n = v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} (v_n - v_{n+1}) S_n}$$

Analogue à IPP :

$$\int u(t)v(t)dt = \left(\int u\right) v - \int \left(\int u\right) v' dt$$

Analyse : Au moment où je bloque, je pense à

- → Intégration par parties
- → Intégration par changement de variable.
- → Recherche d'un équivalent simple.
- → Développements en série entière usuels.
- → Relire les questions précédentes
- → Récurrence.

Astuces à connaître par ♡ :

→ Lemme de Césaro (+) Lemme de l'escalier.

$(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \longrightarrow l$

alors $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$

$(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $u_{n+1} - u_n \longrightarrow l.$

alors $\dfrac{u_n}{n} \longrightarrow l$

→ Trouver un équivalent de u_n.

On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tq :
$\boxed{u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}}$ ~~tend~~ vers une limite finie

On utilise ensuite le lemme de Césaro.