Topologie / EVNs

- **Norme :**
  1 - Positivité
  2 - Séparation
  3 - Homogénéité
  4 - Inégalité triangulaire.

- **Normes usuelles dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:** $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\boxed{\|M\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}|}$$

$$\boxed{\|M_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |m_{i,j}|^2}}$$

$$\boxed{\|M\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |m_{i,j}|}$$

- **Cauchy Schwarz :** $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un p.s et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée

$$\boxed{|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Preuve : Mq $P(t) = \|tx + y\|^2$ est un polynôme puis calculer Δ.

- **Suite de Cauchy :** $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

$(x_n)_n$ de Cauchy $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n, m \in \mathbb{N})$
$n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Il suffit de trouver $(\alpha_n)_n$ telle que
$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+m} - x_n\| < \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$

* Toute suite de Cauchy est bornée
* Toute suite CV est de Cauchy.
* Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est CV

- **Ouvert :**

Ω ouvert $\Leftrightarrow (\forall a \in \Omega)\ \Omega \in \mathcal{V}(a)$

$\Leftrightarrow (\forall a \in \Omega)(\exists r_a \in \mathbb{R}^{+*})\ B(a,r) \subseteq \Omega.$

$\Leftrightarrow C_E^{\Omega}$ est fermé

- **Fermé**

F fermé $\Leftrightarrow C_E^{\Omega}$ fermé

$\Leftrightarrow (\forall x \notin F)(\exists r_x > 0)\ B(x, r_x) \cap F = \emptyset$

$\Leftrightarrow \left(\left(\forall (x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}\right) (x_n)_n \text{ CV dans } E \Rightarrow (x_n)_n \text{ CV dans } F\right)$

$\Leftarrow$ F complet

- **Intérieur :** $F \subseteq E$.

* $\mathring{F} = \{a \in F / (\exists r > 0)\ B(a,r) \subseteq F\}$
* $\mathring{F}$ est le plus grand des ouverts $\subseteq F$

- **Adhérence :** $F \subseteq E$

* $\overline{F} = \{a \in E / (\forall r > 0)\ B(a,r) \cap F \neq \emptyset\}$.
* $\overline{F}$ est le plus petit fermé qui $\supseteq F$

- **Uniformément continue :**

f Un. Co. $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x, y \in A)\ \|x-y\| < \alpha \Rightarrow N(f(x)-f(y)) < \varepsilon$

$\Leftarrow \begin{cases} K \text{ compact} \\ f : K \to F \text{ continue.} \end{cases}$

Scanned with CamScanner

- **Densité** :

A dense $\Leftrightarrow \bar{A} = E$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}})\ x_n \longrightarrow x.$

$\Leftrightarrow$ Tout ouvert non vide rencontre A