Ondes E.M dans un milieu dispersif. (Plasma)

Soit une onde monochromatique : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(M)\, e^{i[\omega t - kx]}$

(ce n'est pas une OPPM ⚠)

→ $k = f(\omega)$ est la relation de dispersion.

→ si $Im\, k > 0$ alors il y a amplification

si $Im\, k < 0$ alors il y a Absorption en $e^{-\frac{x}{\delta}}$ où $\boxed{\delta = -\frac{1}{Im(k)}}$

on parle d'onde évanescente.

Distance carac. de la décroissance

→ Vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{Re(k)}}$ ⚠

c'est la vitesse de déplacement du plan $\omega t - Re(k)x = cte$

i.e $\omega\, dt - Re(k)\, dx = 0$

$\Rightarrow v_\varphi(\omega) = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{Re(k)}$

→ Milieu dispersif : Milieu où v_φ dépend de ω. Exemple : prisme

→ Indice de réfraction : $\boxed{n(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)}}$

→ Vitesse de groupe d'un paquet d'onde.

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Plasma : ⟵ ⚠ Existe au moins 1 ex en concours

Comment fonctionne le problème :

> → On détermine ρ (par sa définition)
> → On détermine $\vec{j}$ (Mécanique de l'e^-)
> → Eq. de MAXWELL pour le p^b
> → ∃ éq. de propagation
> → Résolution à l'aide des hyp de l'exo

Hyp de notre problème :

* $n = n^{bre}$ d'e^- par unité de volume.
  supposé égal à celui des ions ⊕ (charge $+e$)
* $n \simeq 10^{10}$ à $10^{12} \ll 10^{23}$ donc on néglige les interaction entre particules.

→ Détermination de ρ :

$$\rho = \sum_{i=1}^{2} n_i q_i = ne + n(-e) = 0.$$

$$\boxed{\rho = 0} \Rightarrow \text{Plasma neutre.}$$

→ Détermination de $\vec{j}$.

On a $\vec{j} = \sum_{i=1}^{2} n_i q_i v_i = ne(\vec{v}_{ion} - \vec{v}_e)$

Système : électron :

Bilan : Force électrique : $-e\vec{E}$
Force d'interaction : négligeable.
Pesanteur (négligeable)
Force magnétique (négligeable) en effet $\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_e|} = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|}$
$\simeq \frac{|\vec{v}|}{c} \ll 1$ (Mécanique classique

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}.$$

En RSF :

$$\boxed{\underline{\vec{v}_e} = -\frac{e}{j\omega m_e}\underline{\vec{E}}}$$

De m̂

$$\boxed{\underline{\vec{v}_{ion}} = \frac{e}{j\omega m_{ion}}\underline{\vec{E}}}$$

donc.

$$\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{j\omega}\left(\frac{1}{m_{ion}} + \frac{1}{m_e}\right)\underline{\vec{E}}$$

Or.

$$m_e \ll m_{ion}$$

donc

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{j m_e \omega}\underline{\vec{E}}}$$

→ Equation de MAXWELL :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

→ Eq. de propagation :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \vec{\Delta}\,\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}}$$

→ Résolution : Hyp de l'exo : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - kx)}$.

On remplace dans l'eq de propagation :

$$-k^2 \cancel{\vec{E}} = \mu_0 \left(\frac{ne^2}{j m_e \omega} \right) j \omega \cancel{\vec{E}} - \frac{\omega^2}{c^2} \cancel{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)}$$ Relation de Klein-Gordon.

où $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}}}$ Pulsation plasma.

1^er cas : Si $\boxed{\omega > \omega_p}$ $\Rightarrow$ k réel $\Rightarrow k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M,t) = \vec{E_0} e^{j[\omega t - kx]}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pas d'amortissement}}$

On a $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} (\vec{e_x} \wedge \vec{E_0}) e^{j(\omega t - kx)}}$

$$\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{e_x}}$$

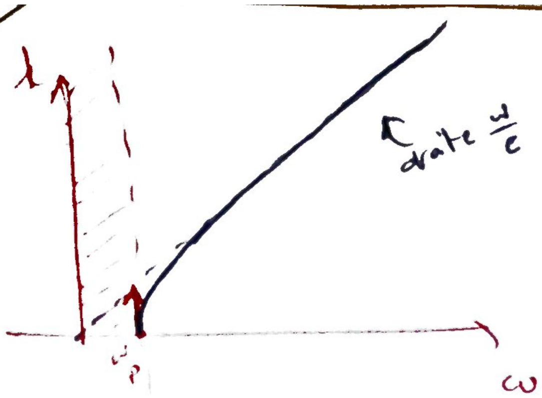
$$\boxed{\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{e_x}}$$

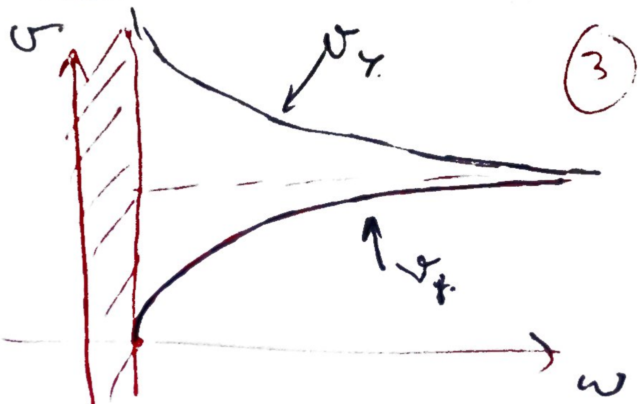
$$\boxed{U_{em} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right)}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$$ vitesse de phase

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$ vitesse de groupe.

③





$$\begin{cases} k(\omega_p) = 0 \\ \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_p} = +\infty \\ \omega \text{ grand} \Rightarrow k \simeq \frac{\omega}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \\ v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

2^e^ cas : $\omega < \omega_p$

$k^2 < 0 \Rightarrow k$ imaginaire pur $\Rightarrow k = \pm \frac{j}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

si $+j\alpha(\omega)$ alors $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 e^{\alpha(\omega)x} e^{j\omega t}$ X impossible physiquement

donc $\boxed{k(\omega) = -j\alpha(\omega)}$

donc **il n'y a pas de propagation** car l'onde se dissipe.

$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = 0}$ donc pas de propagation de l'énergie

$\Rightarrow$ **réflexion totale**