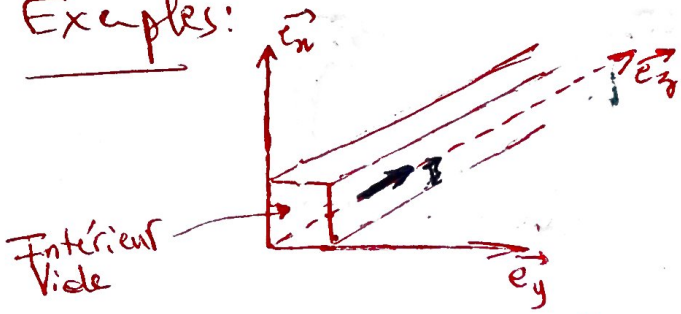
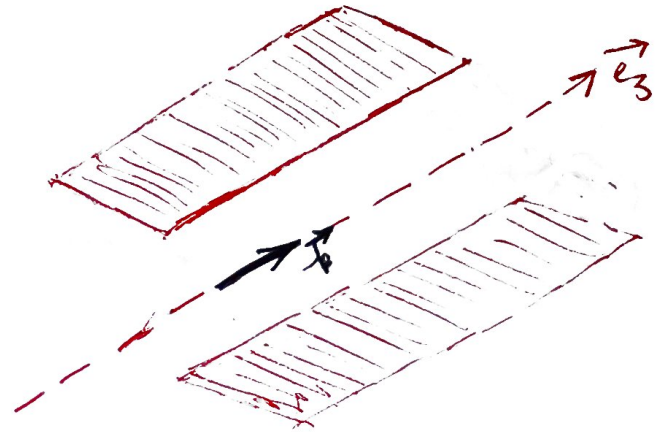


# Ondes guidées

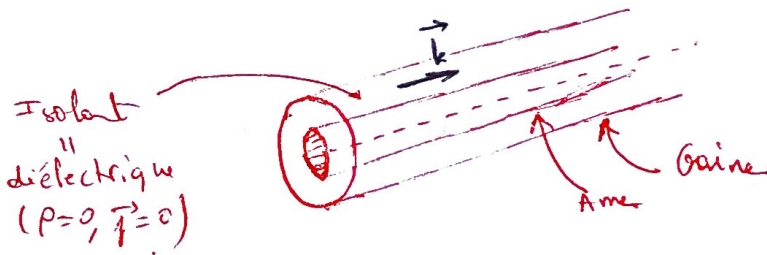
Exemples:



Guide rectangulaire  
(Parois = conducteurs  
supposés parfaits)



Guidage entre 2 plans.  
conducteurs (supposés parfaits)



Cable coaxiale.

Conséquences:

1) → Intérieur vide :  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = \vec{0}$

2) → 
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

3) → Non planes

4) → soit TE ( $\vec{E} \perp \vec{k}$ ) ou TM ( $\vec{B} \perp \vec{k}$ )

5) → CL ⇒  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Apparition des entiers } E_{n,m}, B_{n,m} \\ \text{- } \omega \text{ de coupure } \omega_{c_{n,m}} \end{array} \right.$

6) → En général : guide d'onde = filtre passe-haut.

Dans la suite, nous allons étudier une TE dans guide rectangulaire.

On considère  $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0(x,y) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$

On a  $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_0(x,y)}{\partial x} = 0$

d'où

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0(y) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$$

(n'est pas plane)

On a  $\vec{E}$  vérifie

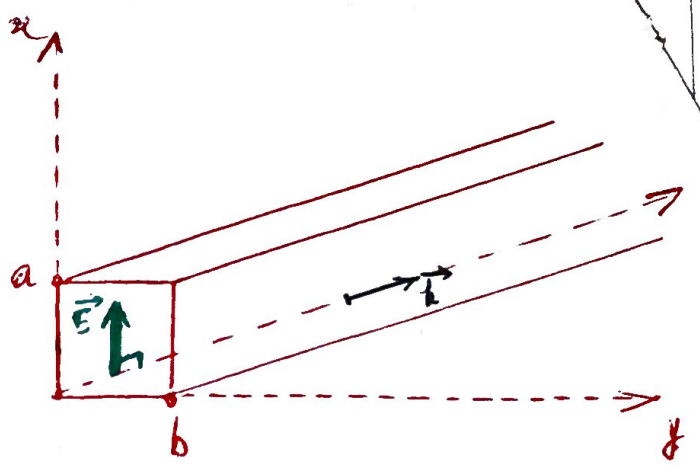
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

soit

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

d'où

$$\frac{d^2 E_0(y)}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_0(y) = 0$$



CoL :

$$\left. \begin{array}{l} E(y=0, z, t) = 0 \\ E(y=b, z, t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_0(0) = 0 \\ E_0(b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}_{> 0}$$

donc  $E_0(y) = A_1 \cos(\alpha y) + A_2 \sin(\alpha y)$

On a  $\left\{ \begin{array}{l} E_0(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ E_0(b) = 0 \Rightarrow \alpha b = n\pi \end{array} \right.$

donc  $E_{cn} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$

$$\vec{E}_n(x,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$$

Pour trouver  $\vec{B}_n$  : Eq. de MAXWELL-FARADAY :

$$\text{rot} \vec{E}_n = - \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = -j\omega \vec{B}_n \Rightarrow \vec{B}_n = \frac{1}{j\omega} \text{rot} \vec{E}_n$$

calculs faits:

$$\vec{B}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_{-n}}{\partial z} \\ \frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_n}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\underline{c}$ : onde guidée, 7 plans, monochromatique, progressive selon  $z$  ↑  
TE, TM.

Relation de dispersion:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \text{d'où}$$

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left[ \omega^2 - \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2 \right] = \frac{1}{c^2} \left[ \omega^2 - \omega_{c,n}^2 \right]$$

Relation de Klein-Gordon.

Énergétique pour  $n=1$

→ Vecteur de Poynting.

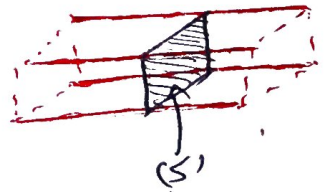
$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{b} E_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \\ \frac{k}{\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{b} y\right) \omega^2 (\omega t - kz) \end{pmatrix}$$

donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k E_0^2}{2\omega \mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{b} y\right) \vec{e}_3$$

→ Puissance moyenne:

$$P_{\text{moy}} = \iint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{s} \\ = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \langle \vec{\Pi} \rangle(y) dy dx$$



$$P_{\text{moy}} = \frac{ab k E_0^2}{4 \mu_0 \omega}$$

→ Densité volumique de l'E.M.

$$W_{em}(M,t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Tous calculs faits

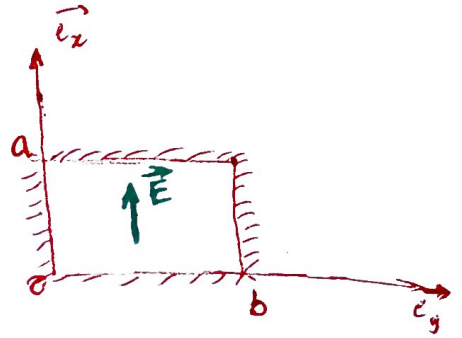
$$\langle W_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left( \sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) + \left(\frac{c}{w}\right)^2 \left( \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) \right) \right)$$

→ Charges surfaciques :

Elles apparaissent en  $x=0$  et  $x=a$

$$\begin{cases} \bullet) \vec{E}(x=0) = \frac{\sigma(x=0)}{\epsilon_0} \vec{e}_x \\ \bullet) \vec{E}(x=a) = -\frac{\sigma(x=a)}{\epsilon_0} \vec{e}_x \end{cases}$$

$$\sigma(0) = -\sigma(a)$$



→ C<sup>rt</sup> surfaciques :  $\vec{B} = B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$  donc ils apparaissent sur les 4 parois.

Finalement, on peut voir une onde guidée TE comme somme de 2 OPPM :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M,t) &= E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (TE_{n=1}) \\ &= E_0 \frac{e^{j\frac{\pi}{b}y} - e^{-j\frac{\pi}{b}y}}{2j} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\vec{E}(M,t) = \frac{E_0}{2j} e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_x - \frac{E_0}{2j} e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_x$$

OPPM selon  $\vec{k}_1$  :

$$\vec{k}_1 = k \vec{e}_z - \frac{\pi}{b} \vec{e}_y$$

OPPM selon  $\vec{k}_2$

$$\vec{k}_2 = k \vec{e}_z + \frac{\pi}{b} \vec{e}_y$$