

Champ électrostatique dans le vide

Sources du champ électrostatique:

> Charge élect: distribution volumique ρ , surfacique σ , linéique λ

> Loi de Coulomb: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{ur}$ (entre part H)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ SI}$$

en Form⁻¹

Force exercée par le noyau sur e- ds H: $F = 9 \times 10^{-8} N$

$$F_{grav} \ll F_{elec}$$

Si milieu ≠ Vide $\epsilon_0 \leftarrow \epsilon_0 \epsilon_r / \epsilon_r$ permittivité relative du milieu

> da dist. D crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ ds l'espace qui s'entoure. Si q en H alors la force subie par q est:

$$\vec{F} = q \vec{E}(H)$$

$$\text{Si } D = \{q_i\} \quad \vec{E}(H) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r^2} \vec{ur}$$

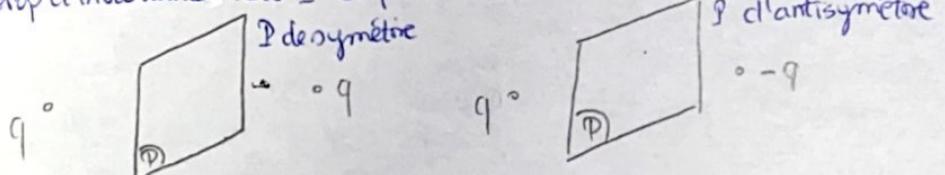
$$\text{Dgq (th. de superposition)} \quad \vec{E}(H) = \sum_i \vec{E}_i(H) = \sum_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right)$$

Symétries et invariances:

> Principe de Cuvier: ds une expérience de Physique, les effets présentent au moins des symétries des causes

> Symétries de la dist. = Symétries (plans) du champ électrostatique

> Prop d'invariance des = Prop d'invariance du champ élect



> Lignes de champ électrique: Courbes tq le champ est tangent NM

$$\vec{E} \wedge d\vec{M} = \vec{0}$$

Circulation du champ électrostatique :

> Potentiel scalaire: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r^2} \vec{ur}$ \vec{F} dérive d'une E_p

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_0}{r}$$

$$E_p(M) = q V(M),$$

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

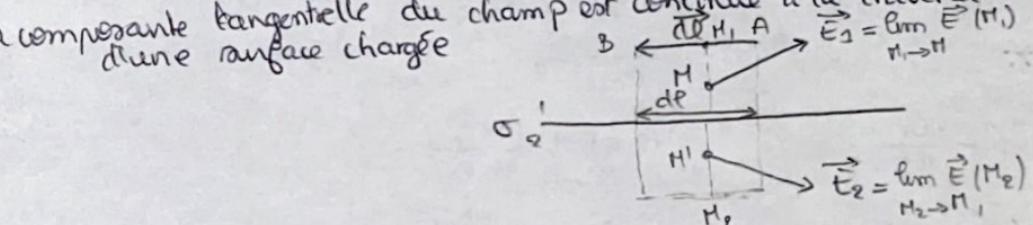
avec $D = \{q_1, \dots, q_r, \dots\}$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = 0$$

\vec{E} est à circulation conservative

Une ligne de champ: 1 surface équipotentielle
orientée ds le sens de potentiels décroissants
ne peut être une courbe fermée

La composante tangentielle du champ est continue à la traversée d'une surface chargée



Equ de Maxwell Faraday:

th Stokes: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{E}) d\vec{s}$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Loi locale de Maxwell Faraday

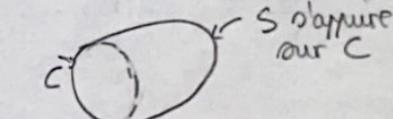
"Le champ électrostatique ne tourbillonne pas autour des sources"

loi intégrale $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

↔

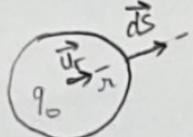
loi locale $\vec{\text{rot}}_H(\vec{E}) = \vec{0}$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$



Flux du champ électrostatique:

> Flux sortant du champ créé par q à travers une sphère:



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

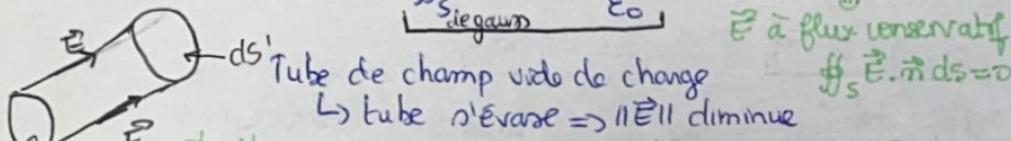
vrai si q_0 pas au centre
vrai si q_0 à l'intérieur d'une sphère fermée qqq

si q_0 à l'ext.
le flux sortant est nul

> Théorème de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Zone vide de charges
 \vec{E} à flux conservatif



Tube de champ vide de charge

↪ tube s'évase $\Rightarrow \|E\|$ diminue

∅ d'extremum de potentiel ds une région vide de charges.

> Cas d'une boule chargée uniformément de densité ρ , charge Q et rayon R
 $\|E\|(\sigma, \theta, \varphi)$ (invariance) + symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{U}_r$ ($M(r, \theta, \varphi)$)

* Si $r > R$: $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{U}_r$ Distr. à sym. sphérique = charge ponctuelle au centre de σ décharge Q

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$V(r) = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 \sigma}$$

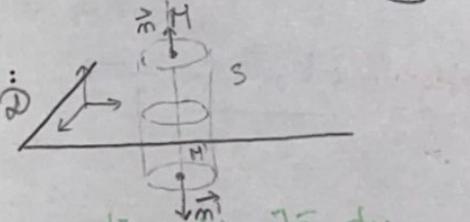
* Si $r < R$: $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{U}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O}_M$ V continue
 $V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

> Cylindre infini uniformément chargé en volume:

* $r > R$: $\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \frac{Q}{r} \vec{U}_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{U}_r$

* $r < R$: $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{U}_r$

> Plan unif. chargé en surface:



$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{U}_3 \text{ si } z > 0$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{U}_3 \text{ si } z < 0$$

$$\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{U}_3$$

discontinuité du champ due à la modélisation surfacique

> Equ locale de Maxwell-Gauss:

Th d'Ostrogradski: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$ le champ électrostatique diverge à partir des sources

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \text{ loi intégrale} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Équation de Poisson:

$$\Delta V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{Équ. locale de Poisson}$$

si $\rho = 0$ alors $\Delta V = 0$ Équ. de Laplace

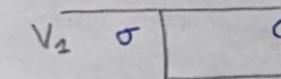
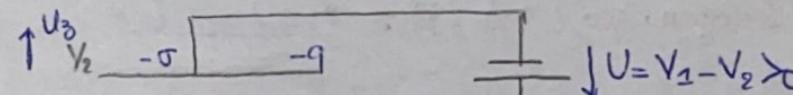
Analogie champ électrostatique \leftrightarrow champ gravitationnel:

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q}{r^2} \vec{U}_r \Leftrightarrow \vec{f} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{U}_r$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = -4\pi G m_{int}$$

champ gravitationnel

Étude du condensateur plan:



$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{l} U$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{l}$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

$$\frac{W}{S \cdot l} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

le champ est uniforme ds l'espace inter armatures vide

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{U}_3 - \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} \vec{U}_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{U}_3$$

de dipôle électrostatique

> distribution dipolaire : $\sum q_i = 0$

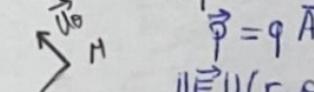
Moment dipolaire : $\vec{P} = q \vec{A}_+ - q \vec{A}_-$
 born des charges - born des charges +

ρ (Debye)

$$1D = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C.m}$$

$$\text{H}_2\text{O} : \rho = 1,84 \text{ D}$$

> Potentiel électrostatique et champ électrostatique :



$$\vec{P} = q \vec{A}_+ - q \vec{A}_- \quad \sigma_+ = A_+ M \quad \sigma_- = A_- M$$

$$||\vec{E}|| (r, \theta, \phi)$$

$$\vec{E} = E_r(\sigma, \theta) \vec{U}_r + E_\theta(\sigma, \theta) \vec{U}_\theta$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

$$V(M) = \frac{q R \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{U}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{en } \frac{1}{r^2}$$

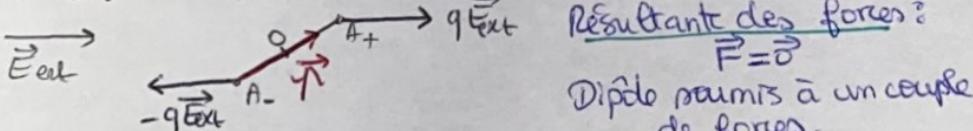
$$\vec{E}(M) = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{U}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{U}_\theta$$

décroissance en $1/r^3$

> Equ des lignes de champ électrostatique :

$$\sigma = R_e (\sin\theta)^2, \quad \vec{E} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$$

> Actions subies par un dipôle ds un champ extérieur :



Moment des forces :

$$\vec{P} = \vec{OA}_+ \wedge q \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{OA}_- \wedge (-q \vec{E}_{\text{ext}}) = q \vec{A}_+ \wedge \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

Le moment dipolaire tend à s'aligner sur la ligne du champ extérieur.

Champ extérieur non uniforme :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = q \vec{E}_{\text{ext}}(A+) - q \vec{E}_{\text{ext}}(A-) = q (E(A+) - E(A-)) \vec{U}_z$$

$$= q \left(E(0) + \left(\frac{dE}{dz} \right)_0 l - E(0) - \left(\left(\frac{dE}{dz} \right)_0 (-l) \right) \right) \vec{U}_z$$

$$= 2q \left(\frac{dE}{dz} \right)_0 l \vec{U}_z$$

$$= P \left(\frac{dE}{dz} \right)_0 \vec{U}_z$$

Energie potentielle d'interaction :

$$E_p = q V(A_+) - q V(A_-) = q (V(A_+) - V(A_-)) = -q \vec{A}_+ \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \quad (\text{champ extérieur uniforme})$$

Champ extérieur non uniforme :

néglige les variations du champ extérieur à l'échelle du dipôle

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

Position d'équilibre :

$$\vec{P} = \vec{P} \wedge \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ à l'équ}$$

\downarrow

$\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

$$E_p = -p E \cos\theta$$

$$E_{p\min} = -p E \quad E_{p\max} = p E$$

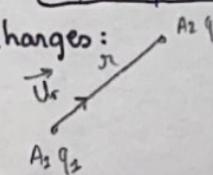
stable instable

Le dipôle tend à s'orienter dans le sens du champ extérieur

Energie potentielle d'un système de charges :

$$\bullet \text{Une charge } q : \quad E_p = q V(M)$$

$$\bullet \text{Syst. de 2 charges :}$$



$$F = -\vec{q}_1 \vec{q}_2 / \vec{r}$$

$$E_p = - \int F(r) dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_p = q_2 V_1(A_2) \text{ pot créé par } q_1 \text{ en } A_2$$

• N charges q_i :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i v_i$$

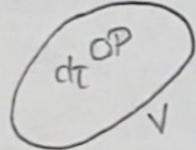
$$v_i = \sum_{j \neq i} V_{ij}$$

pot. viréé par l'ens
des charges q_j en A_i

• Système continu:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV$$

$$E_p = \iiint_{\text{space}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$$



Le champ magnétique permanent

> Conducteur: matériau contenant des charges libres mobiles
 * $\vec{E} = \vec{0}$: e^- ne déplace (agitation thermique) \Rightarrow mouvement désordonné des e^-

$$v_a = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 10^5 \text{ m/s}$$

> Vecteur densité de courant, intensité électrique:

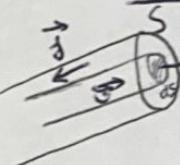
$\vec{E} + \vec{v}$ \Rightarrow mouvement des porteurs de charge

densité volumique de charges mobiles (si que $e^- p_m = nq = n(e^-)$)

v : vitesse d'en. des porteurs de charges

$$\|v\| = 10^{-4} \text{ m/s} \quad (e^- ds \text{ Cu}^+) \quad \|v\| \ll v_a \quad \begin{matrix} \text{mouvement} \\ \text{d'ensemble} \\ \text{des } e^- \end{matrix}$$

$$\vec{j} = p_m \vec{v} \quad \text{vecteur densité de courant}$$



$$dq = \vec{v} dt \times \vec{r} ds, \times p_m$$

volume élémentaire
du cylindre

$$dq = \left(\iint_S p_m \vec{v} \cdot \vec{r} ds \right) dt.$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}, \quad \text{Intensité: flux de charges à travers une section } S$$

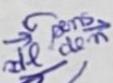
$$p_m = \sum_i p_{mi} = \sum_i n_i q_i, \quad \vec{j} = \sum_i p_{mi} \vec{v}_i$$

$$p = p_{\text{ions fixes}} + p_{\text{e-moble}}$$

$$p \neq p_m$$

> Distributions de courants:

volumique: $\vec{j} = p_m \vec{v}$ $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$ linéaires: $I > 0$ ou $I < 0$



> Champ créé par une distribution de courant:

(champ magnétostatique): \vec{B} en fonction de \vec{r}

Force de Lorentz: $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}(M) \wedge \vec{B}(M)$

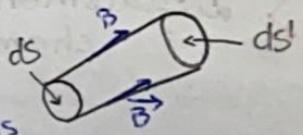
Invariance et symétries:
 prop d'invar. de \vec{D}
 prop d'inv. du champ magnétostatique

$M \in P$ (symétrique de \vec{D}) $\Rightarrow \vec{B}(M) \perp P$
 $M \in P$ (antisymétrique de \vec{D}) $\Rightarrow \vec{B}(M) \subset P$
 antisymétrique de \vec{D} \Rightarrow symétrie du champ B .

> Flux du champ magnétique:

Flux conservatif:

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0$$



\vec{B} est identique à travers toutes les sections d'un même tube de champ.

lignes de champ mag. se resserrent \Rightarrow la norme du champ \uparrow

Equation locale de conservation du flux:

th d'Ostrogradski: $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

Circulation du champ magnétique:

th d'Ampère: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl.}}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Equation locale de Maxwell Ampère en régime permanent:

th. de Stokes: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \cdot (\vec{B}) dS$

\vec{j} est à flux conservatif dans S est qq

$$\nabla \cdot (\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}, \quad \text{équation de Maxwell Ampère}$$

"le champ magnétostatique tourbillonne autour de sa source"

> Calculs de champ magnétostatique:

Fil rectiligne infini: $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{U}_0$

L'Ampère est l'intensité d'un courant continu qui maintenu dans 2 fils distants de 1m produit entre eux une force de $2 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^2$

Fil cylindrique:

$$r > R: \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{U}_0 \quad r < R: \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \vec{U}_0$$

Solénoïde infini: Le champ magnétostatique est uniforme à l'intérieur du solénoïde

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{U}_0$$

> Déplacement d'un circuit dans un champ magnétique :

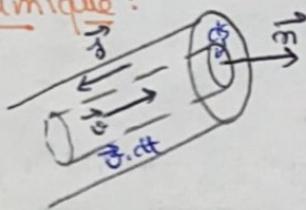
densité volumique des forces de Laplace : $\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}$

Force de Laplace sur un conducteur filiforme :

$$d\vec{F} = I d\vec{e} \wedge \vec{B}$$

> Champ créé par une distribution de courant :

Volumique:

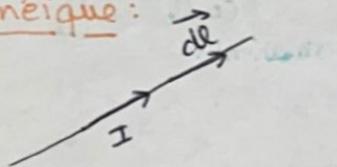


$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

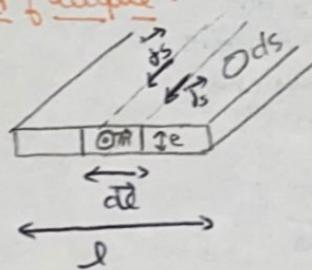
$$d\vec{C} = \vec{j} d\vec{l}$$

Linéique:



$$d\vec{C} = I d\vec{e}$$

Surfaïque:



$$d\vec{C} = \vec{j}_s d\vec{s}$$

$$I = \int \vec{j}_s \vec{n} d\vec{l}$$

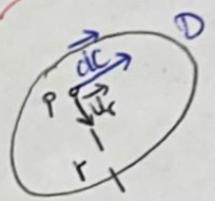
$$d^2 I = \vec{j}_s \vec{n} d\vec{e} d\vec{l}$$

$$dI = \underbrace{\int_e (\vec{j}_s d\vec{e})}_{\vec{j}_s} \vec{n} \cdot d\vec{l}$$

> Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{d}\vec{C} \wedge \frac{\vec{n}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \iiint_D \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{d}\vec{C} \wedge \vec{n}}{r^2} \quad \text{Loi de Biot et Savart}$$



$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{N}{A \cdot m}$$

$$q \text{ est mesurée à } \vec{F} = q \sqrt{V_R} \wedge \vec{B} \text{ dans R}$$

Energie du champ électromagnétique

> * Champ \vec{B} cède à l'E à la matière.

- Ex: Conversion en E macroscopique (accélérateur de particules)
- C " en E interne (échauffement d'un cond. par effet Joule)
- Four à micro-ondes: ondes de $f = 16\text{Hz} \Rightarrow$ échauffement des aliments

* Transport d'E par le champ électromagnétique : rayonnement électromagnétique - Ex: Rayonnement solaire / Antenne

* L'E est emmagasinée dans les régions de l'espace où règne un champ électromagnétique.

$$dm = \frac{dW}{c^2}$$

Modélisation mathématique:

- Concernées les charges mobiles de \vec{j}
- $I(t) = \int dt \vec{OP}$
- $I(t) = 0$
- $dF = (\rho \vec{E} + \rho_m \vec{v} \wedge \vec{B}) dt = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dt$
- Densité volumique de \vec{f}_m $\vec{f}_m = \vec{j} \wedge \vec{B}$

$$dP = dF \cdot \vec{V} = \rho \vec{E} \cdot \vec{j} dt = \rho_m \vec{E} \cdot \vec{j} dt \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

> Puissance transportée par le champ: \vec{P} charge énergie

Vector courant d'E: $\vec{\Pi}$ (extensive) $\vec{\Pi} \cdot \vec{B} = \frac{dW}{dt} = P(\text{Watt})$ $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{dt}$ $||\vec{\Pi}|| \text{ en W.m}^{-2}$

> E cl le champ:

densité d'E: $w = \frac{dW}{dt}$ $W = \iiint_V w dt$ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2} B^2$$

> Bilan énergétique: $W = \iiint_V w dt \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (\iiint_V w dt) = \iiint_V \frac{dw}{dt} dt$

or conservation de l'E globale $\frac{dW}{dt} = \iiint_V \frac{dw}{dt} dt = \iiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} ds - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dt$

Puissance elec. mag. rayonnement \vec{P} . l'énergie aux porteurs de charges

$$\Rightarrow - \frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dt}_{\vec{j} \cdot \vec{E}} + \underbrace{\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dt}_{\vec{j} \cdot \vec{E}} \sim \text{div} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \cdot \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{n} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2) = - \text{div} \vec{H} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

> Aspect énergétique de la modélisation électrocinétique:

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \iiint_V \epsilon_0 \frac{E^2}{2} dt \quad W_E > 0 \Rightarrow C > 0$$

$$W_B = \frac{1}{2} L I^2 = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dt \quad W_B > 0 \Rightarrow L > 0$$

$$P = RI^2 = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dt = \iiint_V \gamma E^2 dt \quad P > 0 \Rightarrow R > 0$$

Puissance transférée aux porteurs de charge: $\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ $\underline{P = RI^2}$

$$dP = \frac{1}{8} \frac{dI^2}{dt} = \frac{1}{8} \left(\frac{I}{S} \right)^2 dt \Rightarrow P = \frac{1}{8} \frac{I^2}{S^2} \times SP = \frac{1}{8} \cdot \frac{I}{S} I^2 = RI^2$$

ARGP & $P = R \dot{I}(t)^2$

Puissance rayonnée:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{U}_0$$

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{B} = - \frac{E I}{2\pi a} \vec{U}_R = - \frac{I}{2\pi a} \times \frac{I}{S} \vec{U}_R = - \frac{I^2}{2\pi a S} \vec{U}_R$$

$$P = \iint_S \vec{P} \cdot \vec{B} = + \frac{I^2}{2\pi a S} \times 2\pi a \times l = + \frac{I^2 l}{S} = RI^2$$

En régime stationnaire, la puissance électromagnétique entrant dans le dipôle par rayonnement est égale à la puissance transférée aux porteurs de charge.

Puissance reçue par un dipôle:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{U}_0 \quad P = \iint_S \vec{P} \cdot \vec{B} ds$$

$$\vec{j} \cdot \vec{s} = \vec{l} \quad EI = U$$

$$= \frac{EB \times \pi a l}{\mu_0} = \frac{U}{l} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \times \frac{1}{\mu_0} 2\pi a l = UI$$

la puissance reçue par un dipôle, en régime stationnaire, s'identifie à la puissance entrant par rayonnement à travers les parois du dipôle.

Bilan énergétique d'un C: $\vec{E} = \frac{1}{S} \vec{U}_3 = \frac{q(t)}{S \epsilon_0} \vec{U}_3$

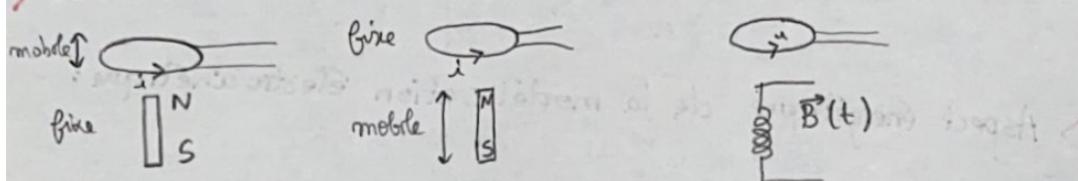
$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = B(t, l) \vec{U}_0 = \frac{\mu_0 q(t)}{2\pi a^2} r \vec{U}_0$$

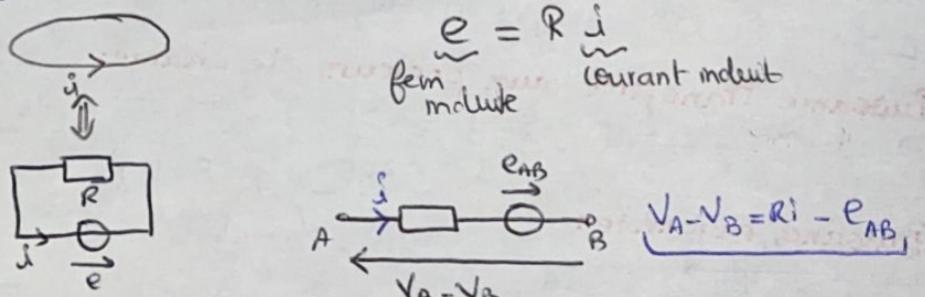
lors de la charge d'un condensateur, l'énergie reçue correspond à l'E entrée sous forme de rayonnement à travers les parois.

Induction Electromagnétique

> Phénomène d'induction:



> Signification électrocinétique de la fém induite:



> Loi expérimentale de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot \vec{m} \, ds$$

Auto induction: $\phi = \phi_{ext} + \phi_p$

flux extérieur	flux propre	$\phi_p = L_i$ \downarrow inductance
----------------	-------------	--

$$e = -L \frac{di}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt}$$

fém d'auto induction

Inductance d'un solénoïde infini: $\vec{B}_0 = \mu_0 n i \vec{u}_z$

$$\phi_p = N \iint \vec{B}_0 \cdot \vec{m} \, ds = \mu_0 n i S N = \mu_0 \frac{N^2}{l} S i = L i \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \text{ H.m}^{-1}$$

L'inductance d'un circuit filiforme ne comportant pas de bobinages est tout à fait négligeable.

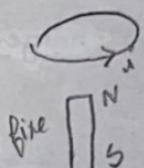
$$\rightarrow \frac{1}{2} L i^2 = \iint \frac{1}{2} \mu_0 B^2 \, dT = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_0^2 n^2 i^2 \frac{\pi l}{2} \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

L'introduction d'un noyau de fer permet d'obtenir des inductances dépassant le Henry grâce au champ magnétique produit par la matière aimantée (Noyau de fer source d'un comportement non linéaire, car $L(I)$ dans la bobine).

> Loi qualitative de Lenz:

La fém induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

* Bobine s'éloigne \Rightarrow flux $\downarrow \Rightarrow$ fém induite \vec{B} dans le sens pour augmenter flux



* Bobine s'éloigne \Rightarrow face sud \downarrow \Rightarrow Nord et Sud s'attireront opposer à l'éloignement initial

> Transducteur électromécanique des B permanent:

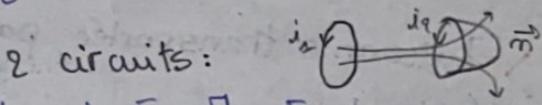
$$P_{em} + P_{laplace} = 0$$

> Couplage magnétique de 2 circuits:

$$\Phi_{12} = L_1 I_2 + M_{12} I_2 \quad \Phi_{21} = L_2 I_1 + M_{21} I_1$$

$$M_{12} = M_{21} = M > 0 \text{ si } I_2 \text{ et } I_1 \text{ sens } < 0 \text{ si } \neq$$

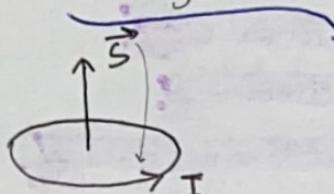
$$cIS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$



$$M^2 < L_1 L_2$$

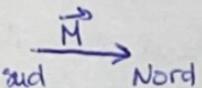
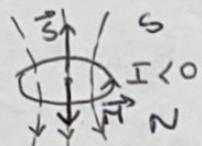
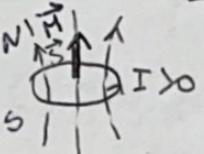
Le dipôle magnétique

> Moment magnétique d'une boule de courant plane:



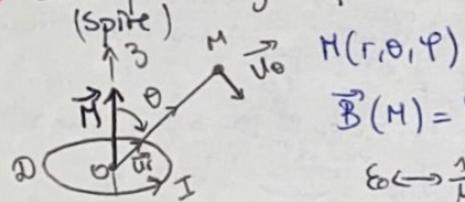
$$\vec{M} = I\vec{S}$$

[en $\text{A} \cdot \text{m}^2$]



> Déf du dipôle magnétique:
L'dist. de courants dont on étudie les effets
à grande distance
on associe à un dipôle magnétique un
moment magnétique \vec{M} non nul

> Champ magnétique créé par un dipôle magnétique:



$$\vec{B}(M) = B_r(\theta, r)\vec{u}_r + B_\theta(\theta, r)\vec{u}_\theta$$

$$B_r \leftarrow \frac{1}{r^3}$$

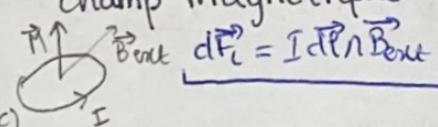
$$B_r = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \cos\theta$$

$$E_r = \frac{2\mu_0 M \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{P \sin\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\text{Équ. des lignes de champ: } r = R_0 (\sin\theta)^2$$

> Actions subies par un dipôle magnétique ds un
champ magnétique extérieur: cas B_{ext} uniforme:



$$\vec{F}_L = \vec{0}$$

dipôle soumis
à un couple
de forces

Moment des forces: $\vec{F} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$

tend à aligner \vec{M} et \vec{B}_{ext}

Energie potentielle du dipôle: $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$

\vec{B}_{ext} stable

\vec{B}_{ext} instable

(cas \vec{B} non uniforme):

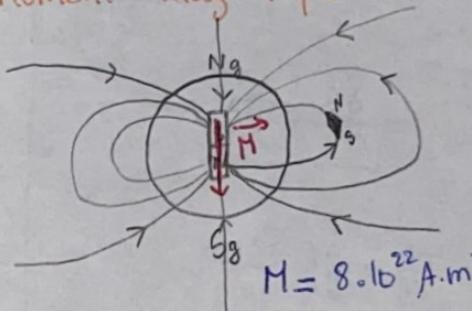
$$\vec{F} = +\vec{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}) = -\vec{\text{grad}}(E_p)$$

Aimant permanent: densité volumique du moment dipolaire

$$M_v = \frac{M}{V}$$

$$M_v = 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

Moment magnétique terrestre:



$$M = 8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

l'aiguille de la
boussole s'aligne sur
la composante horizontale
du champ magnétique

$$B_H = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

e^-	de l'ordre du magnétron Bohr	$m_B = 8 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
Proton		$M = 2,4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
Neutron		$M = 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

mesure de champs magnétiques (TP):

Effet de Hall: teslamètre avec un capteur constitué par une sonde
de Hall

sens giro de vitesse \vec{v}

$$\vec{B} = \vec{0} \quad V_A - V_C = 0$$

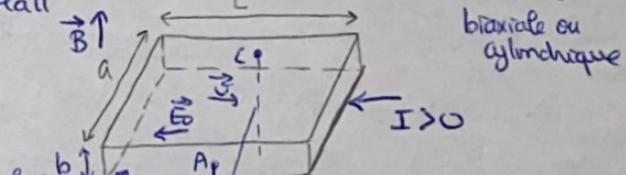
$$\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} \neq \vec{0} \quad \text{De plus } \vec{E}_H = q\vec{B} \wedge \vec{B}$$

régime transitoire: charges - s'accumulent
sur un clefaut de charges - apparaît
sur le bord opposé

création d'un champ électrique \vec{E}_H champ de Hall

$$\vec{E}_H = q\vec{E}_H \quad \vec{E}_H + \vec{B}_H = \vec{0} \Rightarrow \text{lignes de courant redirigent } \parallel \vec{E}_H$$



biaxiale ou
cylindrique

sonde à effet Hall

$$\text{on a donc } U_H = aE_H \quad \vec{B}_m + \vec{B}_H = \vec{0}$$

$$-q\phi B = -qE_H \Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = qB}$$

$$\text{or } j = m|q|\sigma = \frac{I}{ab} \Rightarrow \sigma = \frac{I}{m|q|ab} \Rightarrow U_H = \frac{IB}{m|q|b} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{IB}{b}$$

$n \propto \rightarrow U_H$ donc on utilise plutôt des plaquettes semi-conductrices pour les sondes à effet Hall.

Conservation de la charge

Pb à 1 dimension: cylindre de sections

$$\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_x \quad \vec{n} = \vec{u}_x$$

$$\hat{A}t \in S \theta(t) = P(x, t) \times S dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

Pb à 3 dimensions :

$$\vec{n} \cdot d\vec{s} \quad \Theta = \iiint_V P dt \quad \frac{d\Theta}{dt} = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial t} dt$$

conservation de la charge: $\frac{d\Theta}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds$

Équ. locale de conservation de la charge:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial t} dt = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dt \Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dt = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Si $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ alors $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ \vec{j} est à flux conservatif

Appliq: loi des noeuds

Équations de Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Variables Amplex

* linéarité des équ. de Maxwell

$$(\text{MA}): \operatorname{div}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \operatorname{div}(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$(\text{NG}): \operatorname{div} \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \text{ donc } \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Couplage:

champ électromagnétique

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Régime permanent:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{electrostatique}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{magnétostatique}$$

$$* \text{ MG: } \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) dt = \iiint_V \frac{P}{\epsilon_0} dt = \frac{qmt}{\epsilon_0}$$

$$* \text{ MA: } \oint_C \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{B} dt = \iiint_V \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) dt = \mu_0 (j + i\omega)$$

avec $i\omega = \iiint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$, $j = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$* \text{ MY: } \oint_C \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{rot} \vec{B} dt = 0 \Rightarrow \vec{B} \text{ à flux conservatif}$$

$$* \text{ MF: } \oint_C \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{E} dt = \iiint_V - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt = - \frac{d}{dt} \left(\iiint_B \vec{B} \cdot \vec{ds} \right)$$

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{n} ds = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{loi intégrale de Faraday}$$

flux magnétique qui traverse C indépendant de S

Propagation du champ em \Rightarrow ondes électromagnétiques

A l'en translation rectiligne uniforme \Rightarrow on propose que le champ dans R avec $C = \frac{1}{J\epsilon_0\mu_0}$ de façon isotrope

$$\vec{E} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

$\vec{B} = \vec{B}$ transformation relativiste du champ e.m

$$\Rightarrow \text{comp normale: } E_2 - E_1 = \frac{c\pi}{\epsilon_0} \text{ comp tang: } (E_2 - E_1) \vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \text{comp tang: } B_2 - B_1 = \mu_0 j_s \vec{u}$$

Exemple d'application des équations de Maxwell:
Charges et courants ds un conducteur.

Conducteur ohmique en régime permanent:

Des circuits métalliques parcourus par des courants permanents sont la source d'un champ magnétique mais pas d' \vec{E} champ.
On en déduit que $\rho = 0$ en régime permanent ds tout le volume d'un conducteur ohmique homogène.

Preuve: (ord ohmique)

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \sigma \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\sigma \vec{P}}{\epsilon_0} = 0$$

en régime permanent $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma \vec{P}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \underline{\sigma = 0}$

Relaxation d'un conducteur:

$$T = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{T} \rho = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{t}{T}}$$

$f \leq 10^{18} \text{ Hz} \Rightarrow \rho = 0$ (lc: ds le V d'un métal homogène, la densité de charge ρ est négligeable dans tout le domaine des f. industrielles et hertzennes).

Pour créer $\rho(\vec{r}) \neq 0$ il faut séparer les charges positives et négatives \Rightarrow forces attractives qui tendent à ramener les charges à leur position initiale \Rightarrow rétablir $\rho = 0$

Comparaison \vec{j} et \vec{j}_D ds un conducteur:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \vec{E}_0 \omega \sin(\omega t) \quad \frac{j_D}{j} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} = \omega T \quad j_D \ll j \Rightarrow \omega T \ll 1$$

$\omega T \ll 1 \Rightarrow$ courant de déplacement négligeable

lc: V de métal: $j_D \ll j$ ds tout le domaine des f industrielles et hertzennes.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\epsilon_0} &= \frac{\rho_0}{T} \\ \rho_0 &= \frac{\sigma T}{\epsilon_0} \\ \rho_0 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{4 \pi R^2 \sigma_0}{2 \pi R^2} \right)^2 \\ \rho_0 &\approx \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned}$$