Mouvement dans un champ de force centrale

I) Force Centrale Conservative

- **Définition :**

→ Une force centrale de centre O est une force dont la droite d'action passe constamment par O.

$$\vec{f} = f(r).\vec{u_r} = -\frac{dEp}{dr}.\vec{u_r}$$

- **Force Newtonienne :**

→ c'est une force centrale conservative de la forme (en coord. sphériques) :

$$\vec{f} = \frac{-k}{r^2}.\vec{u_r}$$

→ Son énergie potentielle est donc :

$$Ep(r) = -\frac{k}{r}$$

→ Exemples à connaître :

- Forces colombiennes ~~et~~ gravitationnelles

⇒ Gravitationnelle :

- $\vec{f} = -G.\frac{m_1.m_2}{r^2}\vec{u_r}$
- $Ep = -G.\frac{m_1.m_2}{r}$

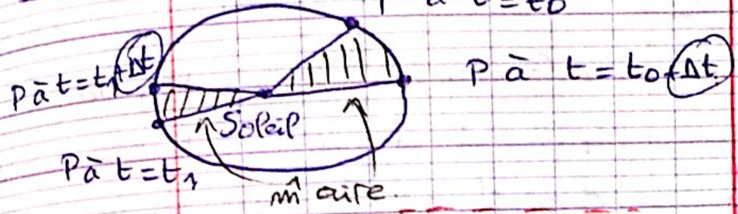
⇒ Colombienne :

- $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{u_r}$
- $Ep = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r}$

- **Force de rappel élastique :**
  - $\vec{f} = -k.(r-r_0).\vec{u_r}$
  - $Ep = \frac{1}{2}k.(r-r_0)^2 = \frac{1}{2}m.\omega_0^2.(r-r_0)^2$

Lois expérimentales de Kepler:

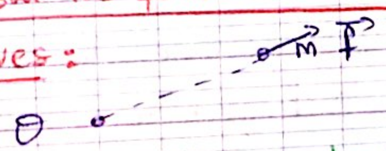
- **Loi des orbites:** les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.
- **Loi des aires:**



- **Loi des périodes:** $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = cte}$

où:
- T : période de révolution de la planète autour le soleil.
- a : demi-grand axe de la trajectoire elliptique.

II) Généralités sur les forces centrales conservatives:



1) Conséquences du caractère central:

- **Conservation du moment cinétique:**

→ Du fait que $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt}(M) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$

On obtient que:

$$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cte}.$$

- **Planéité de la trajectoire:**

→ La conservation du moment cinétique implique que le mvt est plan

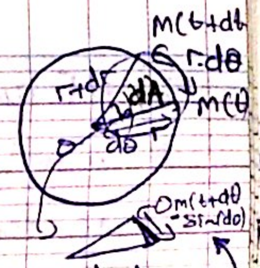
↳ En coordonnées polaires:

$$\vec{L_O} = m.r^2\,\dot{\theta}.\vec{u_z} \quad (*)$$

- **Loi des aires:**

→ D'après (*), $r^2\dot{\theta} = cte$.

On définit ainsi la constante des aires: $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$



→ L'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{OM}$ pendant dt est dA

il est égal à la surface du triangle)

$$dA = \frac{1}{2}\|\vec{OM}(t)\| . \|\vec{OM}(t+dt)\| . \sin(d\theta)$$

$$\simeq \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Donc:

$$dA = \frac{1}{2}\mathcal{C}.dt.$$

→ La constante $\mathcal{V} = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\mathcal{C}}{2}$ est appelée vitesse aréolaire.

2) Conséquences du caractère conservatif:

- **Conservation de l'énergie mécanique:**

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m.v^2 + E_p = cte.$$

- **Notion d'énergie potentielle effective:**

→ On étudie le mvt d'une masse m en utilisant ses coord. polaires (r, θ). On a donc:

- $\vec{OM} = r.\vec{u_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}.\vec{u_r} + r\dot{\theta}.\vec{u_\theta}$

→ On cherche à décrire l'évolution de $r = \|\vec{OM}\|$ qualitativement.

→ On a:
$$\begin{cases} \mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = cte \\ E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = cte. \end{cases}$$

On élimine ainsi θ de ces éq. et on obtient:

$$E_m = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r).$$

On pose ainsi:

$$E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r).$$

↳ cette énergie décrit le mvt radial

ceci dit que le mvt radial s'apparente à un mvt conservatif à un degré de liberté dans une énergie potentielle effective.

III) Cas particuliers de l'attraction gravitationnelle

$\vec{F} = -G.\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{u_r}$; $E_p(r) = -G.\frac{m_1.m_2}{r}$

• Étude qualitative du mvt radial:

→ On obtient ainsi:

$$E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{r^2} - G\frac{m.m_A}{r}$$

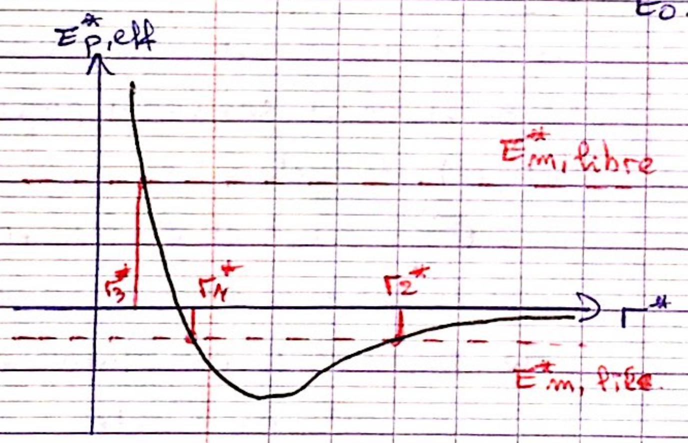
• Tracé de la courbe $E_{p,eff}(r) = f(r)$:

↳ En dérivant $E_{p,eff}$, on trouve une position minimale $r_0 = \frac{C^2}{G.m_A}$

d'énergie $-E_0 = -G.\frac{m_A.m}{2r_0}$.

→ On trace : $E^*_{p,eff}(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*}$

où : $r^* = \frac{r}{r_0}$ et $E^*_{p,eff} = \frac{E_{p,eff}}{E_0}$.



IV) Étude directe de la trajectoire circulaire:

↳ $\vec{OM} = r_0.\vec{u_r}$ et $\vec{v} = r_0.\dot{\theta}.\vec{u_\theta}$.

↳ En utilisant le P.F.D pour une masse soumise seulement à l'attraction gravitationnelle, on obtient que les trajectoires circulaires de rayon r_0 autour d'un astre de masse m_A sont parcourues par une vitesse constante

$$v_0 = \sqrt{\frac{G.m_A}{r_0}}$$

↳ Il faut donc pour mettre un objet en orbite circulaire bien contrôler sa vitesse (en direction et en norme)

↳ L'énergie mécanique est donc :

$$E_m = -G.\frac{m.m_A}{2r_0}.$$

• Généralisation aux trajectoires elliptiques

↳ On admet que l'énergie mécanique d'une planète de masse m en gravitation autour d'un astre de masse m_A est :

$$E_m = -\frac{G.m_A.m}{2a}$$

demi grand axe de la trajectoire elliptique

• Troisième loi de Kepler: loi des périodes

↳ La période de révolution de m, en trajectoire circulaire, est :

$$T = \frac{2\pi.r_0}{v_0} = \frac{2\pi.r_0}{\sqrt{\frac{G.m_A}{r_0}}}$$

On vérifie ainsi que $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_A} = cte$

↳ Généralisation aux trajectoires elliptiques:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_A}$$

• Applications aux satellites géostationnaires

• Définition:

→ Ce sont les satellites qui restent constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre.

→ Pour ça, il faut 3 conditions :

① • Le plan de l'orbite doit être situé dans le plan de l'équateur.

② • Le mvt du satellite doit être synchrone avec le mvt de rotation propre de la terre.

③ • L'orbite doit être circulaire.

↳ En effet :

① Le plan de l'orbite doit ~~pass~~ contenir le centre de la force centrale, soit le centre de la terre. Il doit aussi maintenir sa position ~~par~~ % à un observateur. Le seul plan possible est donc l'équateur.

② Le satellite doit être fixe pour un observateur, il faut donc que sa vitesse angulaire soit constante égale à :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{sidéral} = 23h\,56\,mn\,4s}$$

③ Le mvt étant central, $r^2\dot{\theta} = C = cte$.

D'où $r = cte$ car $\dot{\theta} = \Omega = cte$.

→ On peut calculer ce rayon grâce à la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T_{sidéral}^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_{Terre}}$$

On obtient ainsi :

$$r_0 = h + R_T = 42\,000\ Km$$

↳ la hauteur du satellite

donc : $h \simeq 36\,000\ Km$

• Vitesses Cosmiques :

① Vitesse minimale de mise en orbite :

→ C'est la vitesse limite au bout de laquelle une masse se met en orbite circulaire de rayon $r \simeq R_T$. En utilisant

$$E_m = -G.\frac{M_T.m}{2R_T}$$ et

l'expression de E_p,

on trouve : $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T}} \simeq 8\,Km.s^{-1}$

② Vitesse de libération :

→ C'est la vitesse limite au bout de laquelle une masse m peut quitter l'attraction gravitationnelle de la terre. Pour cela, on suppose qu'on donne à cette masse la vitesse minimale pour s'éloigner à l'infini :

$$E_m = \frac{1}{2}m.v_{lib}^2 - G\frac{m.M_T}{R_T}$$

$$= \frac{1}{2}.m.v_\infty^2 - G.\underbrace{\frac{m\,M_T}{r_\infty}}_{\to 0}$$

→ Comme on cherche $v_{lib,min}$, on donne à $v_\infty = 0$.

On trouve ainsi :

$$v_{lib,min} = \sqrt{\frac{2G.M_T}{R_T}} \simeq 11\,Km$$

V) Autres trajectoires envisageables:

- **Détermination de la nature de la trajectoire:**

→ On a: $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$.

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G.m.M_A}{r}$$

On obtient ainsi une éq. en r.

→ Le point M qui s'approche le plus de O est un point Maximal de la trajectoire ou minimal. À ce point: $\frac{dr}{dt} = 0$. On obtient ainsi une équation de 2ème degré:

$$r^2 + r \cdot \frac{G.m.M_A}{E_m} - \frac{1}{2} \frac{m \cdot C^2}{E_m} = 0 \quad (\alpha)$$

↳ Une solution n'est possible sauf si

$E_m \geq -E_0 = E_{min} = -\frac{G.m.M_A}{2 r_0}$.

(D'après la courbe de $E_{p,eff}$)

↳ On pose $\alpha = \frac{E_m}{E_0}$.

- Si $\alpha = -1$:
  → La trajectoire est un cercle de rayon r_0.
- Si $\alpha \in]-1, 0[$:
  → La trajectoire est une ellipse de foyer O, et dont les deux distances maximales au point O $(2a = r_1 + r_2)$ r_1 et r_2 sont solution de (α).
- Si $\alpha = 0$:
  → La trajectoire est une parabole de foyer O.
- Si $\alpha > 0$:
  → La trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer O.