Moment Cinétique et Solide en rotation.

I) Moment cinétique d'un point matériel:

1) Définition:

→ Le moment cinétique d'un point matériel M (de masse m) % à un point O est:

$$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$$

• Rmqs:

→ Si le mvt du point M est plan, alors $\vec{L_O}$ ⊥ ce plan à tout instant. Sa direction est donc fixe. La réciproque est vraie.

→ On a: $\vec{L_B} = \vec{L_A} + \vec{BA} \wedge \vec{p}$.

2) Moment cinétique % à un axe orienté Δ:

Soit $\Delta = (O, \vec{u_\Delta})$ un axe orienté. On définit par: $L_\Delta = \vec{L_O} \cdot \vec{u_\Delta}$

3) Cas d'un mvt circulaire:

→ Si M effectue une rotation de rayon R autour d'un point O, alors on a: $\vec{OM} = R\vec{u_r}$ et $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\vec{L_O} = m R^2 \dot{\theta} \vec{u_z}$$

4) Moment d'inertie:

→ On repère M par ses coordonnées cylindriques d'axe (Oz) (r, θ, z). Alors on appelle le moment d'inertie % à (Oz):

$$J_{(Oz)}(M) = m r^2$$

→ Dans ce cas, on aura:

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \cdot \dot{\theta}$$

(Ceci valable ∀ le mvt de M).

II) Moment cinétique d'un solide ou d'un système de point:

1) Cas d'un système déformable

→ Soit un système de plusieurs points matériels M_i (de masses m_i) et de moments cinétiques % à l'axe Δ : $L_\Delta(M_i)$. Alors le moment cinétique du système est:

$$L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i)$$

• Rmq: Dans le programme, on n'a que rotation autour d'un axe fixe. C'est pourquoi on s'intéresse à L_Δ à la place de $\vec{L_O}$.

→ En coordonnées cylindriques d'axe $(O, \vec{e_z})$:

$$L_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i)\dot{\theta}_i$$
$$= \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i$$

2) Cas d'un solide en rotation % à un axe fixe:

→ Chaque point du solide a la m̂ vitesse de rotation $\dot{\theta}$

→ De ce fait, on a:

$$L_{(Oz)} = \sum_{M_i \in S} J_{(Oz)}(M_i)\dot{\theta}$$
$$= J_{(Oz)} \cdot \dot{\theta}$$

→ On définit ainsi le moment d'inertie du solide autour de l'axe (Oz):

$$J_{(Oz)} = \sum_{M_i \in S} J_{(Oz)}(M_i)$$

• **Le moment d'inertie de quelques solides homogènes :**

① Cylindre vide de rayon R : $J = m.R^2$

② Cylindre plein de rayon R : $J = \frac{1}{2} m.R^2$

③ Boule de rayon R : $J = \frac{2}{5} m.R^2$

④ Barre de longueur L : $J = \frac{1}{12} m.L^2$

• Rmq :

→ La contribution d'un point matériel (r,θ,z), de masse m au moment d'inertie est : $m.r^2$. Donc plus le point est éloigné, plus sa contribution est importante.

III) Moment d'une force :

Soit maintenant une force qui s'applique au point M.

1) Moment d'une force / à un point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

2) Moment d'une force / à un axe orienté Δ :

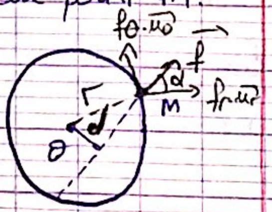
Soit l'axe $\Delta = (O, \vec{u_\Delta})$.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{f}).\vec{u_\Delta}$$

→ Si on exprime la force $\vec{f}$ en coordonnées cylindriques $\vec{f} = f_r.\vec{u_r} + f_\theta.\vec{u_\theta} + f_z.\vec{u_z}$

alors : $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = \underbrace{r}_{\text{du point M}} f_\theta$

→ D'après ce graphe,



on obtient : $f_\theta = f.\sin(\alpha)$.

Donc : $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = r\sin(\alpha).f$

→ On retrouve la notion du bras de levier $d = |r.\sin(\alpha)|$. Pour trouver d, on prend la distance entre l'axe (Oz) et la droite d'action de $\vec{f}$ (sa direction).

• Cas où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = 0$:

→ Donc ceci implique que soit : ① $\vec{f} \parallel \vec{u_\Delta}$

② la droite d'action de $\vec{f}$ coupe Δ

IV) Loi du moment cinétique pour un point matériel :

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{f_i})$$

• / à un axe fixe (Oz) :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f_i})$$

V) Loi du moment cinétique pour un solide en rotation :

→ Du fait que $\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)}.\ddot{\theta}$

On obtient :

$$J_{(Oz)}.\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f_i})$$

• Rmq :

→ Le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ d'un solide / à (Oz) mesure son aptitude à s'opposer aux variations de vitesse autour de cet axe.

• Cas de conservation du moment cinétique :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 \quad \text{ssi} \quad \sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$$

• Couples :

→ On appelle un couple le moment de deux forces opposées, c-à-d $\vec{f_1} + \vec{f_2} = \vec{0}$.

→ est d la distance entre les deux droites d'actions de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$.

Alors le moment résultat de ces 2 forces est :

$$|\Gamma_{(Oz)}| = f \cdot d$$

VI) Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) :

1) Énergie cinétique :

→ $$E_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \cdot \dot{\theta}^2$$

2) Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation :

$$P(\vec{f_i}) = \Gamma_{(Oz)}(\vec{f_i}) \cdot \dot{\theta}$$

3) Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f_i})$$

→ cette loi est équivalente, c-à-d donne les m̂ résultats, à la loi du moment cinétique.

Lois du frottement solide

I) Lois de Coulomb :

• Vitesse de glissement :

$$\vec{v}_{g_{2/1}} = \vec{v}_{S_2/R} - \vec{v}_{S_1/R} = \vec{v}_{S_2/S_1}$$

• Loi de Coulomb pour la composante normale :

→ Lorsqu'il y a contact entre 2 solides, on a : $\vec{N} \cdot \vec{n} > 0$.

• La composante tangentielle :

• Non-glissement :

$$\begin{cases} \bullet\ \vec{v}_{g_{2/1}} = \vec{0} \\ \bullet\ \|\vec{T}\| \leqslant f_s \cdot \|\vec{N}\| \end{cases}$$

↳ coeff. de frottement statique.

• Glissement :

$$\begin{cases} \bullet\ \vec{v}_{g_{2/1}} \neq \vec{0} \\ \bullet\ \|\vec{T}\| = f_d \cdot \|\vec{N}\| \\ \bullet\ \vec{T} \wedge \vec{v}_{g_{2/1}} = \vec{0} \text{ (m̂ direction)} \\ \quad \text{et } \vec{T} \cdot \vec{v}_{g_{2/1}} < 0 \text{ (sens opposé).} \end{cases}$$

(f_d : coeff. de frottement dynamique)

• Rmq :

• $f_d < f_s$ toujours, car pour mettre en mvt un solide, on exerce une force > force pour maintenir son mvt.

II) Méthode de résolution d'un problème avec frottement solide :

→ On formule les hypothèses possibles (non-glissement ou glissement dans une direction)

→ On cherche à déterminer les actions de contact et ses conséquences) les conséquences de

→ On traduit mathématiquement ces hypothèses
(Par exemple si on est en non-glissement
alors $\ddot{x}=0$ et $\dot{x}=0$)

→ On résout les Eq. obtenues par P.F.D
par exemple. On obtient T et N par
exemple.

→ On valide les résultats de l'hypothèse,
c-à-d quand est-ce que cette hypothèse
va être valable (Par exemple, on a non
glissement ssi l'angle d'inclinaison
du plan < angle limite).

III) Aspect énergétique :

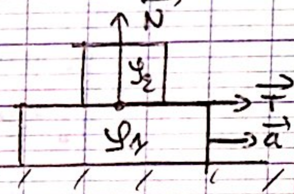
- Cas d'un freinage par frottement :

→ La puissance de la force d'action
de contact est toujours < 0.

$$\boxed{P(\vec{R}) = -|T||v|}$$ sauf

- Cas d'une mise en mvt par frottement :

→ si S_1 bouge, S_2 aussi
bouge. Ainsi la force
de contact a mis
en mvt S_2.



Sa puissance est donc positive.

$$\boxed{P(\vec{R}_{1\to2}) = |T||v|}$$

- Puissance totale des forces de contact P_{cont} :

$$P_{contact} = P(\vec{R}_{1\to2}) + P(\vec{R}_{2\to1}).$$

$$\Rightarrow P_{contact} = \vec{T} \cdot \vec{v}_{S2/1}.$$

- $P_{contact} = 0$ ssi il y a non glissement

→ Sinon : $P_{contact} < 0$.