# I) Oscillateurs Harmoniques :

→ L'équation générale d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 \cdot x(t) = 0$$

Terme d'amortissement
tant que $Q \nearrow$, l'amortissement $\searrow$

• Cas sans frottement :

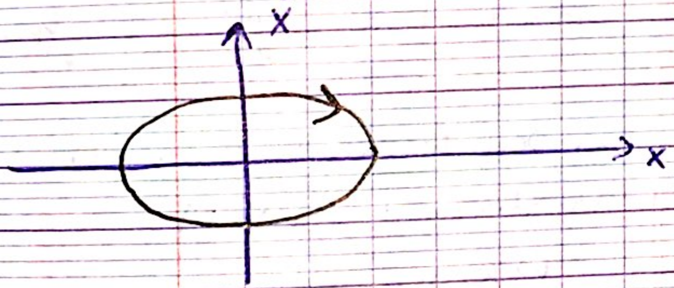
→ Dans ce cas : $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + w_0^2 \cdot x(t) = 0$

→ La solution s'écrit donc :

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(w_0 \cdot t + \varphi)$$

→ La vitesse est : $\dot{x}(t) = -w_0 \cdot x_0 \sin(w_0 t + \varphi)$

→ Représentation dans le plan de phase :



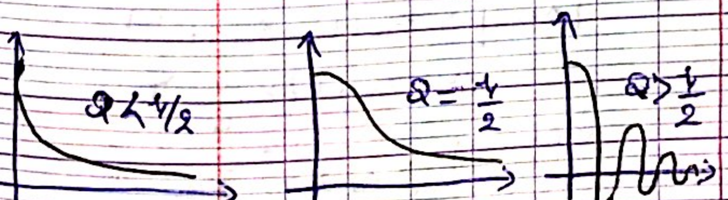

• Aspect Energétique :

→ $\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2(t) \cdot dt$

$$\Rightarrow \langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{m \cdot w_0^2 \cdot x_0^2}{4}$$

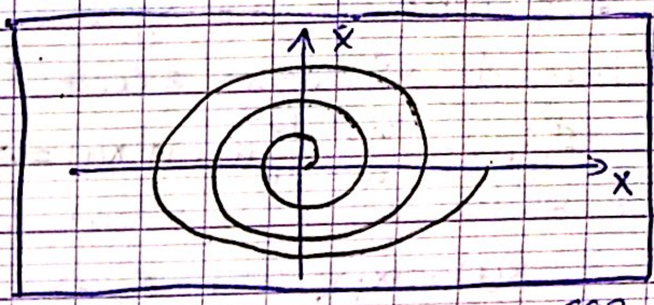
• Cas avec frottements :

→ Plusieurs solutions se présentent :




→ Pour pouvoir analyser les plans de phase, plusieurs représentations se posent :

1)

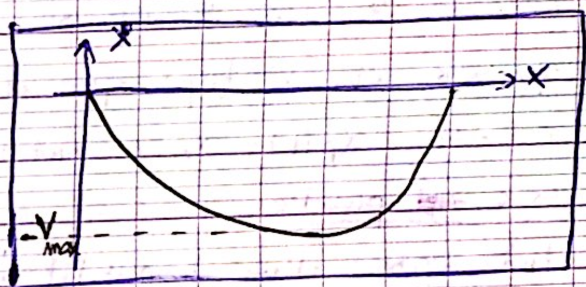



→ Il y a des oscillations, car la trajectoire passe par des $x(t) < 0$

Donc ici, $Q > 1/2$.

Et tant qu'il y a d'oscillations tant que Q est grand.

2)




→ Ici, nécessairement $Q < 1/2$

pour déterminer quel Q, on voit la rapidité du système (c-à-d $V_{max}$)

Tant que $V_{max} \nearrow$, $Q \nearrow$.

• Analogie avec le circuit R, L et C série :

→ Les deux systèmes ont m̂ eq. diff avec :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

• Rmq :

→ On parle d'isochronisme lorsque la période des pulsations ne dépend pas de l'amplitude.

- **Oscillateur harmonique forcé :**

→ L'éq. différentiel d'un système forcé de 2ème ordre s'écrit :

(*) $$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 a.\cos(\omega t).$$

→ La solution générale s'écrit :

$$x(t) = x_{libre}(t) + x_p(t).$$

avec : • $x_{libre}(t)$ solution de :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 . x(t) = 0.$$

Or, on a montré que cette solution converge vers 0.

Donc $x(t)$ la solution générale converge vers une solution permanente qui sera du m̂ type que $a.\cos(\omega t)$, c-à-d : $x_p(t) = x_0 . \cos(\omega t + \varphi)$.

- **Loi à ~~ret~~ prendre :**

↳ La réponse d'un dispositif linéaire à une excitation sinusoïdale est elle aussi sinusoïdale de m̂ pulsation que la pulsation d'excitation.

- **Résolution :** Notation complexe.

↳ $\underline{x}_p(t) = \underline{x}_m . e^{j\omega t}$

avec $\underline{x}_m = x_0 . e^{j\varphi}$

↳ On remplace dans l'éq. (*) :

$$\underline{x}_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j.\frac{\omega.\omega_0}{Q}} . a.$$

On pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

$$\underline{x}_m = \frac{1}{1-u^2+j.\frac{u}{Q}} . a.$$

- **Quelques notations pour le régime pseudo-périodique. (Régime libre)**

→ Dans ce régime, l'amplitude décroît de façon exponentielle.

On définit ainsi le décrément logarithmique : $\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$.

avec $x_n$ : ~~l'amplit~~ la nième amplitude maximale.

On en trouve : $\delta = \frac{\omega_0}{2Q} . T$

avec : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la pseudo-période où $\omega$ est telle que les 2 racines de l'éq. caractéristique soient : $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$.

Donc : $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

→ Dans le cas où il y a faible amortissement ($Q \gg 1$) :

$\omega \simeq \omega_0$, donc :

$$x(t) = x_0\left(\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q.\omega}.\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

~~et on calcule $\dot{x}(t)$~~.

approximativement :

$$x(t) \simeq x_0.\cos(\omega_0 . t) . e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

De m̂ on calcule $\dot{x}(t)$.

Donc : $E_m(t) \simeq \frac{1}{2} m . x_0^2 . \omega_0^2 . e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$

→ Sur une période :

$$|\Delta E_m| = E_m(t) - E_m(t+T).$$
$$\simeq E_m(t) \times \frac{\omega_0}{Q} . T$$

D'où :

$$\boxed{Q \simeq 2\pi . \frac{E_m}{|\Delta E_m|}}$$