Introduction au monde quantique.

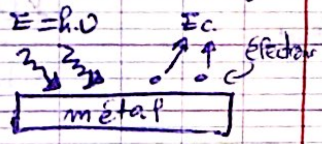
I) Les expériences historiques.

→ On a découvert que la lumière se caractérise par la dualité onde-particule

Le rayonnement thermique.

↳ L'échange entre la matière et le rayonnement se fait par des quantums d'énergie : $E = h.\nu$ où ν : la fréquence du rayonnement

• Effet photoélectrique :



↳ Le rayonnement est lui même constitué de « quantas de lumière » des photons dont l'énergie est : $E = h.\nu$.

↳ Pour arracher les électrons du métal, il faut que $E > W$: travail d'extraction.

Donc il faut que : $\boxed{\nu > \nu_S = \frac{W}{h}}$

(Ceci sous l'hypothèse que l'électron n'absorbe qu'un électron).

• Diffusion Compton :

↳ En mécanique classique, un système qui reçoit un rayonnement électromagnétique rayonne de la même fréquence (Par linéarité du P.F.D). Or, on a remarqué que ce n'est pas le cas. Ceci peut s'interpréter que par les collisions entre les e^- du métal et les photons. Au cours de cette collision, le photon perd une partie de son énergie. Donc il repart avec une énergie $E' < E$

$\Rightarrow \boxed{\nu' < \nu}$

↳ **Conclusion :** ~~La~~ lumière est formée des particules appelés photons.

- Le photon a une masse nulle
- Sa vitesse $= c = 3.10^8 m.s^{-1}$.
- Le photon associé à la lumière de fréquence ν a une énergie $\boxed{E = h.\nu}$
- Ce même photon, se propageant dans une direction $\vec{u}$, a une quantité de mvt : $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u} = \frac{h}{\lambda} \vec{u} = \hbar . \vec{k}$

• Ordre de grandeur :

→ Pour $\lambda = 500$ nm : $E = 2,48$ eV.

→ À retenir : $E(eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}$.

~~• Aspect ondulatoire de la lumière :~~

II) La dualité onde-particule de la matière :

• Longueur d'onde de de Broglie :

→ La matière (électrons, protons, ...) peut aussi avoir un comportement ondulatoire. On lui associe une longueur d'onde

$$\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{p}}$$

~~III) Fonction d'onde et probabilité de détection~~

• Principe de complémentarité de Bohr :

→ La lumière et la matière présentent un comportement ondulatoire ou particulaire selon l'expérience réalisée. Il n'existe pas de description classique cohérente permettant d'interpréter les différents phénomènes observés.

• Quantique ou classique ?

→ Pour savoir si on doit adopter une étude quantique ou classique, on doit :

1. Calculer λ_{DB} des particules étudiées. Si $\lambda_{DB} \sim$ les longueurs caractéristiques du système, on adopte approche quantique.
2. Calculer l'action $S = E.\tau = p.d$ (énergie du système ; temps caractéristique). Si $S \sim h$, on doit adopter approche quantique.

Fonction d'onde et Equation de Schrödinger.

I) La fonction d'onde:

→ La description de l'état dynamique d'une particule quantique (un objet physique qui révèle d'un comportement quantique), de masse m, à un instant t, se fait au moyen d'une fonction d'onde. $\Psi(M,t)$

• $|\Psi(M,t)|^2$: la densité de probabilité de présence de la particule au point M à l'instant t.

↳ Ainsi, la probabilité de présence de la particule, à l'instant t, dans un volume $d\tau$ autour du point M est:

$$dP(M,t) = |\Psi(M,t)|^2 \, d\tau$$

• Condition de normalisation: (étude unidimensionnelle)

↳ La probabilité de présence dans l'intervalle $[x, x+dx]$ est $dP(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 dx$

Donc: $$\int_{-\infty}^{+\infty} dP(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

~~II~~

III) L'équation de Schrödinger:

→ L'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$ (énergie potentielle) est décrite par l'Éq. de Schrödinger:

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}}_{\text{Energie totale}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{V(x).\Psi(x,t)}_{\text{Energie potentielle}}$$

IV) États stationnaires, éq. de Schrödinger indépendante du temps:

↳ Un état stationnaire est un état du système décrit par une fonction d'onde sous la forme: $\Psi(x,t) = \varphi(x).f(t)$

→ Par la condition de normalisation, on aboutit à: $|\Psi(x,t)|^2 = |\varphi(x)|^2$

Donc: $\boxed{f(t) = \exp(i\alpha(t))}$

→ En injectant son expression dans l'éq. de Schrödinger, on aboutit à:

$$\underbrace{i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)}}_{\text{indépendante de } x} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)}_{\text{indépendante de } t}$$

Donc: $$\dot{\alpha}(t) = -\omega_0 = -\frac{E}{\hbar}$$

où: $E = \hbar.\omega_0$: l'énergie totale de la particule

et $\varphi(x)$ vérifie l'éq. de Schrödinger indépendante du temps:

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{V(x).\varphi(x)}_{\text{énergie potentielle}} = \underbrace{E.\varphi(x)}_{\text{énergie totale}}$$

• Conditions imposées à la fonction spatiale $\varphi(x)$:

→ Elle doit être continue.

→ $|\varphi(x)| \not\to \pm\infty$ qd $x \to \pm\infty$ (à cause de normalisation)

→ $\frac{d\varphi}{dx}$ est continue si le potentiel $V(x)$ est borné (dans le ch. III).

↳ De cela, pour qu'une ~~fonction~~ solution soit physiquement acceptable, il faut que E soit quantifiée. D'où la quantification de l'énergie.

Étude d'une particule quantique libre

1) Particule libre :

→ c'est une particule qui évolue dans le vide sans interaction.

→ Sa fonction d'onde se réduit à :

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

2) États stationnaires d'une particule quantique libre :

→ Son énergie $E = E_m$.

→ On a : $\Psi(x,t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar} \cdot t\right) \cdot \varphi(x)$.

avec φ vérifiant :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m \cdot E}{\hbar^2} \cdot \varphi(x) = 0.$$

→ Une solution physique n'est valable que si $\boxed{E > 0}$ (*) D'où l'énergie d'une ~~quanti~~ particule libre est nécessairement st. positive.

et on obtient :

$$\varphi(x) = A \cdot \exp(ik \cdot x) + B \cdot \exp(-ikx)$$

où : $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

• Relation entre k et p :

→ On a déjà établit que $p = \hbar \cdot k$.

→ La particule est libre. Donc

$$E = E_m = E_c = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}.$$

D'où on retrouve $k = \frac{p}{\hbar}$.

→ Interprétation de (*) : $E > 0$:

→ En mécanique classique, un corps de masse m peut être au repos ($E = 0$). Ceci n'est pas valable en mécanique quantique, et c'est à cause du principe d'indétermination de Heisenberg : $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$.

→ L'expression complète de la fonction d'onde est :

$$\Psi(x,t) = A \cdot \exp(i(kx - \omega t)) + B \cdot \exp(-i(kx + \omega t))$$

c'est la superposition de deux ondes planes harmoniques.

→ $\lambda_{DB} = \frac{2\pi}{k}$ la longueur d'onde de de Broglie.

3) Ondes de de Broglie :

→ c'est toute onde plane harmonique solution de l'éq. de Schrödinger.

• Relation de dispersion :

→ Quand on remplace : $\Psi(x,t) = A \cdot \exp(ikx - i\omega t)$ dans l'équation, on obtient :

$$\omega = \frac{\hbar \cdot k^2}{2m}.$$

(c'est seulement pour une particule quantique libre).

→ On peut retrouver cette relation en considérant : $E = E_m = E_c$

$$\Rightarrow \hbar \cdot \omega = \frac{p^2}{2m}.$$

• Vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar \cdot k}{2m}.$$

↳ La propagation d'une onde libre est dispersive.

• Sens physique d'une onde de de Broglie :

→ Une onde plane progressive harmonique $\Psi(x,t) = A \cdot \exp(ikx - i\omega t)$. correspond à une probabilité de présence uniforme : $|\Psi(x,t)|^2 = |A|^2$. dans tout l'espace.

Elle ne peut donc pas être normalisée.

Elle n'a donc pas de réalité physique.

- Pourtant, on peut l'interpréter statistiquement par l'interprétation hydrodynamique.

4) Paquet d'ondes quantique :

↳ Pour une description réelle d'une particule quantique libre, on envisage une superposition d'ondes harmoniques de vecteurs d'onde compris entre $k_0-\frac{\Delta k}{2}$ et $k_0+\frac{\Delta k}{2}$: $\boxed{\Psi(x,t)=\frac{1}{\Delta k}\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} A.\exp(ikx-i\omega t)\,dk}$

avec $\omega(k)=\frac{\hbar.k^2}{2.m}$.

↳ C'est donc un paquet d'ondes quasi-monochromatique qui se propage à la vitesse : $v_g=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$.

Donc : $v_g=\frac{\hbar.k_0}{m}$.

↳ En faisant l'approximation :

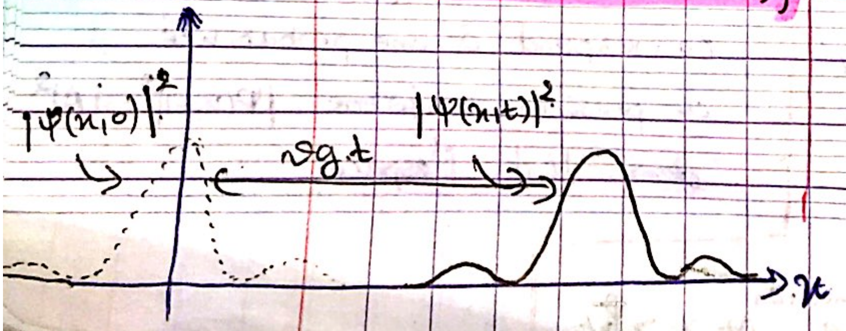
$$\omega(k)\simeq\omega(k_0)+\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}.(k-k_0)$$
$$=\omega_0+v_g.(k-k_0).$$

On obtient après calcul de $\Psi(x,t)$:

$$\boxed{\Psi(x,t)=A.\exp(ik_0.x-i\omega_0.t).\mathrm{sinc}\left((x-v_g t)\frac{\Delta k}{2}\right)}$$

Après normalisation, on obtient la densité de probabilité :

$$|\Psi(x,t)|^2=\frac{\Delta k}{2\pi}\left(\mathrm{sinc}\left((x-v_g.t).\frac{\Delta k}{2}\right)\right)^2$$



↳ On admet que un paquet d'ondes dont les vecteurs d'ondes sont dans un intervalle de largeur k_0, décrit un état de la particule localisée sur une distance Δx tq : $\Delta x.\Delta k\sim 1$

et se déplaçant à la vitesse $v_g=\frac{\hbar.k_0}{m}$ égale à celle de la particule classique qd sa quantité de mvt est $p_0=\hbar k_0$.

- **Inégalité de Heisenberg spatiale :**
  - Cas d'un paquet d'ondes.

→ si la fonction d'onde ~~a une largeur~~ d'une particule est un paquet d'onde de largeur en vecteur d'onde Δk, on peut connaître sa position à l'instant t à $\Delta x\sim\frac{1}{\Delta k}$ près.

→ sa quantité de mvt est connue à $\Delta p=\hbar.\Delta k$ près.

D'où la relation de Heisenberg : $\Delta x.\Delta p\sim\hbar$.

- **Indétermination quantique :**

↳ D'une manière plus générale et plus précise, l'indétermination Δx sur la position d'une particule et Δp sur sa quantité de mvt vérifient l'inégalité de Heisenberg spatiale : $\Delta x.\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$.

↳ Ceci dit que plus on connait la position x de la particule, plus l'indétermination sur p est grande, et réciproquement.

• Inégalité de Heisenberg temps-Énergie:

• Cas d'un paquet d'ondes:

$$\Delta E . \tau \sim \hbar$$

• τ: la durée de passage du paquet d'onde en un point donné.

• ΔE: l'indétermination sur son énergie.

• l'inégalité:

→ La durée caractéristique de l'évolution d'un système, et les fluctuations de son énergie ΔE vérifient l'équation:

$$\tau . \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

→ Dans le cas d'un état stationnaire, invariant dans le temps, $\tau \to +\infty$.

Donc $\Delta E \to 0$. D'où l'énergie d'un état stationnaire est parfaitement déterminée.

5) Vecteur densité de courant de probabilité:

→ On a établit que la densité de probabilité se déplace à la vitesse v_g dans le sens positif de l'axe (Ox). Il y a ainsi un courant de probabilité le long de (Ox).

→ Ainsi, on définit $\vec{J}(x,t)$, vecteur densité de courant de probabilité de la manière suivante: la probabilité qui passe à droite de l'abscisse x entre t et $t+dt$ est: $dP = \vec{J}(x,t).\vec{u_x}.dt$

(c'est comme le flux de probabilité).

→ Par analogie avec $\vec{J} = \rho.\vec{v}$,

on obtient: $\vec{J}(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 v_g . \vec{u_x}$

↳ cette définition n'est valable que pour une O.P.P.M ou un paquet d'ondes ~~mono~~ quasi-monochromatiques

• Interprétation hydrodynamique:

→ Pour un faisceau de particules quantiques dont la densité linéique de particules est n_L, on a:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{n_L} . \exp(ikx - i\omega t).$$

Donc, $\vec{J_N}(x,t) = n_L . \frac{\hbar . \vec{k}}{m}$.

→ Il s'identifie donc à la densité de courant de particules, c-à-d le nbre algébrique de particules qui passent à droite de x entre t et $t+dt$. $dN = \vec{J_N} . \vec{u_x} . dt$.

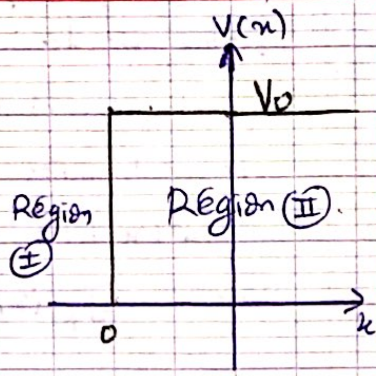
→ Ainsi, le flux des particules:

$$\phi = \frac{dN}{dt} = \vec{J_N} . \vec{u_x}$$

Particule quantique soumise à un potentiel.

I) Particule soumise à une marche de potentiel:

- **marche de potentiel:**
  → c'est une variation brusque de l'énergie potentielle.



- **Continuité de la fonction d'onde:**
  ↳ On montre que $x \to \frac{d\varphi}{dx}(x)$, où φ est une solution de l'éq. de Schrödinger indépendante du temps, est continue, à condition que le potentiel reste borné.

(I) • **Premier cas:** $E > V_0$:

→ L'éq. de Schrödinger indépendante du temps est: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)).\varphi(x) = 0$

- Dans la région (I), $V(x) = 0$.

Donc: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m.E}{\hbar^2}}_{= k_1^2}.\varphi(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi(x) = A_1.\exp(ik_1.x) + B_1.\exp(-ik_1.x)$

- Dans la région (II),

$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k_2^2.\varphi(x) = 0$

où $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$

Donc: $\varphi(x) = A_2.\exp(ik_2.x) + B_2.\exp(-ik_2.x)$.

- **Remarques importantes:**

Région (I):
- Le terme $A_1.\exp(ik_1.x)$ est de l'onde incidente
- Le terme $B_1.\exp(-ik_1.x)$ est de l'onde réfléchie.

Région (II):
- Le terme $A_2.\exp(ik_2.x)$ est de l'onde transmise.
- Le terme $B_2.\exp(-ik_2.x)$ est d'une onde réfléchie qui n'existe pas en l'absence d'une source de particules quantiques de l'autre côté. Donc nécessairement $\boxed{B_2 = 0.}$

- **Résultats:**
  - Continuité de φ en 0:

    $A_1 + B_1 = A_2$. (1)

  - Continuité de $\frac{d\varphi}{dx}$ en 0:

    $ik_1(A_1 - B_1) = ik_2.A_2$. (2)

→ De (1) et (2), on obtient:

$B_1 = A_1.\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$, $A_2 = A_1.\frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

→ Finalement, la solution générale de l'éq. de Schrödinger s'écrit:

Région (I): $\Psi(x,t) = A_1.\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right).\left(\exp(ik_1x) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.\exp(-ik_1x)\right)$

Région (II): $\Psi(x,t) = A_1.\frac{2k_1}{k_1 + k_2}.\exp\left(ik_2.x - \frac{iE}{\hbar}t\right)$

- **Probabilité de réflexion et de transmission:**
  ↳ Les vecteurs densité de courant de probabilité (seulement pour les OPPM ou un paquet d'ondes quasi-mono...)

  - Onde incidente: $\vec{J_i}(x) = |A_1|^2.\frac{\hbar.k_1}{m}\vec{u_x}$
  - Onde réfléchie: $\vec{J_r}(x) = -|A_1|^2\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2\frac{\hbar.k_1}{m}\vec{u_x}$
  - Onde transmise: $\vec{J_t}(x) = |A_1|^2\left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2\frac{\hbar.k_2}{m}\vec{u_x}$

• Probabilité de réflexion :

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

• Probabilité de transmission :

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{4 \cdot k_1 \cdot k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

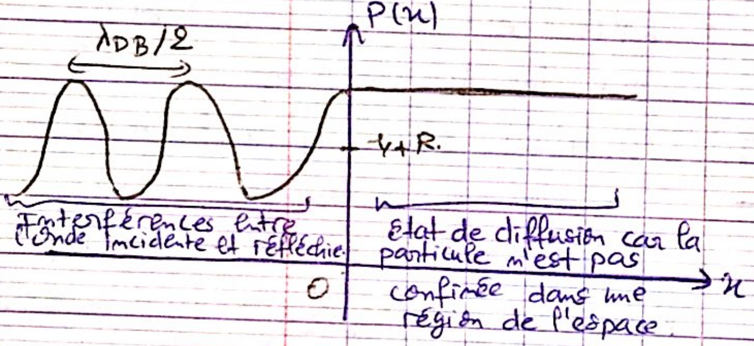
• Rmq : • R n'est jamais nulle Donc il est tjrs possible qu'une particule quantique incidente soit réfléchie.

• On vérifie que $R+T=1$.

• Densité de probabilité de présence : $A_1 = 1$.

• Région ①, $P(x) = |\psi(x,t)|^2 = 1 + R + 2\sqrt{R}\cdot\cos(2k_1 \cdot x)$ après tout calcul fait.

• Région ②, $P(x) = (1+\sqrt{R})^2$



→ Ce graphe peut aussi s'interpréter comme graphe de densité linéique de particules d'un faisceau.

II. Deuxième cas : $E < V_0$

→ On refait le calcul, on pose $q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

• Région ①,

$$\psi(x,t) = A_1 \cdot \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}\cdot t\right)\left(\exp(ik_1 \cdot x) + \frac{k_1 - iq}{k_1+iq}\cdot\exp(-ik_1 x)\right).$$

• Région ②,

$$\psi(x,t) = A_1 \cdot \frac{2k_1}{k_1+iq}\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}\cdot t\right)\cdot\exp(-qx).$$

→ On obtient ainsi dans la région ② une onde évanescente qu'elle ne se propage pas. Son amplitude diminue sur une distance caractéristique $\delta = 1/q$.

• Probabilités de réflexion et de transmission

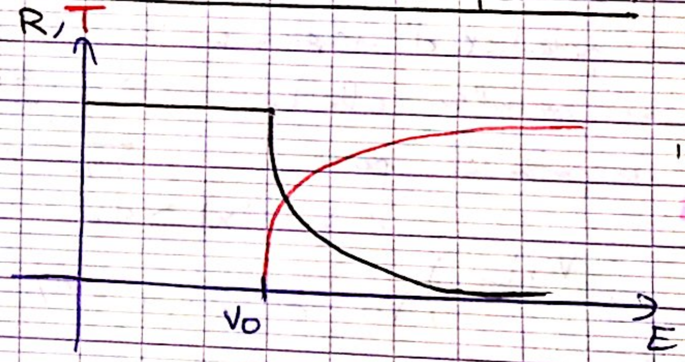
→ L'onde incidente, et celle réfléchie, sont des O.P.P.M. Donc :

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \left|\frac{k_1 - iq}{k_1+iq}\right|^2 = 1.$$

→ L'onde évanescente n'est pas progressive. La particule quantique est forcément réfléchie par la marche de potentiel. D'où

$$T = 0$$

• L'évolution de R et T en fct de E,



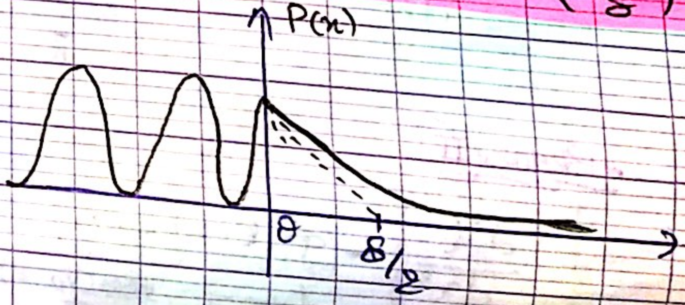
• Densité de probabilité de présence :

→ en écrivant : $\frac{k_1 - iq}{k_1+iq} = \exp(i\theta)$

on obtient :

• Région ①, $P(x) = 2(1 + \cos(2k_1 x - \theta))$

• Région ②, $P(x) = \frac{4 \cdot E}{V_0}\cdot\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)$



• Quelques remarques sur δ (Profondeur de pénétration) :

→ On a $\delta = 1/q$

Donc :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$$

↳ Plus $E \to V_0$, plus $\delta \to +\infty$.

↳ plus $m \nearrow$, plus $\delta \searrow$

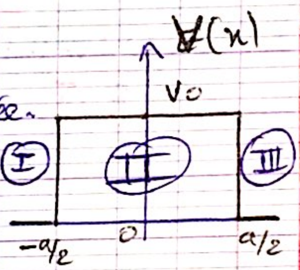
⇒ les effets quantiques sont toujours plus marqués pour les particules quantiques de faible masse.

II) Barrière de potentiel et effet tunnel :

• Barrière de potentiel :

→ c'est une marche de potentiel d'extension limitée.

→ On modélise cette barrière de potentiel par :



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a/2 \\ V_0 & \text{si } -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a/2 \end{cases}$$

→ On limite l'étude au cas où $0 < E < V_0$.

1) Expression de la fonction d'onde :

→ φ vérifie ces équations :

• Régions (I) et (III) :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2 \cdot \varphi(x) = 0 \quad ; \quad k = \frac{\sqrt{2m \cdot E}}{\hbar}$$

• Région (II) :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - q^2 \cdot \varphi(x) = 0 \quad ; \quad q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

• Les solutions obtenues :

• Région (I) :

$$\varphi(x) = \underbrace{A_1 \cdot \exp(ik.x)}_{\text{Onde incidente}} + \underbrace{B_1 \cdot \exp(-ik.x)}_{\text{Onde réfléchie}}$$

• Région (II) :

$$\varphi(x) = \underbrace{A_2 \cdot ch(qx) + B_2 \cdot Sh(qx)}_{\text{superposition de 2 ondes évanescentes}}$$

• Région (III) :

$$\varphi(x) = \underbrace{A_3 \cdot \exp(ik.x)}_{\text{Onde transmise}}$$

• $B_3 = 0$ car y'a pas de source provenant de $+\infty$.

• $V(x)$ est bornée, donc φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ sont les deux continues.

On obtient ainsi 4 éq. liant A_1, A_2, A_3, B_1 et B_2. Donc on peut exprimer tout en fct de A_1 et k et q.

2) Probabilité de réflexion et de transmission. Effet tunnel :

• Onde incidente :

$$\vec{J_i} = |\Psi_i(x,t)|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m} = |A_1|^2 \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m}$$

• Onde réfléchie :

$$\vec{J_r} = -|\Psi_r(x,t)|^2 \cdot \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m} = -|B_1|^2 \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m}$$

• Onde transmise :

$$\vec{J_t} = |\Psi_t(x,t)|^2 \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m} = |A_3|^2 \frac{\hbar \cdot \vec{k}}{m}$$

~~Coef~~ • Probabilité de réflexion :

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

- **Probabilité de transmission :**

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

→ Après qu'on exprime A_3 et B_1 en fct de A_1, on obtient les expressions :

$$R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \cdot sh^2(q \cdot a)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} sh^2(q \cdot a)}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} sh^2(q \cdot a)}$$

- **Rmq :**

→ La probabilité $T \neq 0$. Cet effet est purement quantique, appelé Effet tunnel.

3) Densité de probabilité de présence.

On choisit $|A_1| = 1$.

- Région (I),

$$P(x) = \underbrace{1 + R + 2\sqrt{R} \cdot \cos(2kx - \underset{\uparrow \arg\left(\frac{B_1}{A_1}\right)}{\theta})}_{\text{Interférences entre onde incidente et onde réfléchie}}$$

- Région (II),

→ La densité de probabilité $P(x)$ décroît sur une distance $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$

- Région (III),

$$P(x) = T \quad \text{(uniforme).}$$

4) Approximation d'une barrière épaisse :

- **Approximation d'une barrière épaisse :**

→ Quand $a \gg \delta$, on peut faire l'approximation suivante :

$$T \approx \frac{16 \cdot E \cdot (V_0 - E)}{V_0^2} \cdot \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)$$

~~Inter~~

5) Interprétation qualitative de l'effet tunnel.

→ Une particule quantique est un paquet d'onde quasi-monochromatique. D'après l'inégalité de Heisenberg :

$$\tau \cdot \Delta E \sim \hbar.$$

→ Lorsque la particule interagit avec la barrière, une fluctuation ΔE de son énergie peut être importante ($E + \Delta E \geq V_0$) pour que la particule puisse passer au dessus de la barrière. C'est ainsi la manifestation de l'effet tunnel.

→ Sauf que τ est très courte, donc la particule quantique ne parcourt qu'une petite distance $\sim \delta$, donc ne parvient pas à l'autre côté de la barrière.

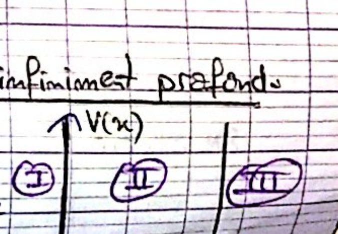
6) Applications de l'effet tunnel :

Voir tout-en-un.

III) Puits de potentiel infiniment profond :

- **Puits de potentiel infiniment profond.**

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < a \\ +\infty & \text{si } x > a. \end{cases}$$



1) Fonctions d'onde propres:

- Dans les régions (I) et (III), $V \to +\infty$.

Donc l'éq. de Schrödinger impose que $\varphi \to 0$. Ces régions sont donc interdites à la particule.

- Dans la région (II), $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m.E}{\hbar^2}.\varphi(x)=0$.

- Si $E \leq 0$:

→ Si $E<0$: On pose $k = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$

alors: $\varphi(x) = A_1.\exp(kx) + B_1\exp(-kx)$

- Par continuité de φ:

$$\varphi(x=0) = \varphi(x=a) = 0.$$

$$\Rightarrow A_1 = B_1 = 0.$$

→ Ce cas est sans intérêt.

→ Si $E=0$: $\varphi(x) = Ax + B$.

$$\varphi(x=0) = \varphi(x=a) = 0$$

$$\Rightarrow A = B = 0$$

→ Ce cas est aussi sans intérêt.

- Si $E>0$:

On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

→ la solution s'écrit:

$$\varphi(x) = A.\cos(kx) + B.\sin(kx).$$

$$\begin{cases} \varphi(0)=0 \\ \varphi(a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ \sin(ka)=0 \end{cases}$$

→ On obtient ainsi une quantification des valeurs de k:

$$k_n = \frac{n.\pi}{a}$$

→ Donc: $\varphi_n(x) = A_n.\sin(k_n.x)$.

→ A_n est déterminée par $\boxed{\int_0^a |\varphi^2(x)|\,dx = 1}$

On obtient: $A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$

- Conclusion: État stationnaire

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}.\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right).\sin(n\pi$$

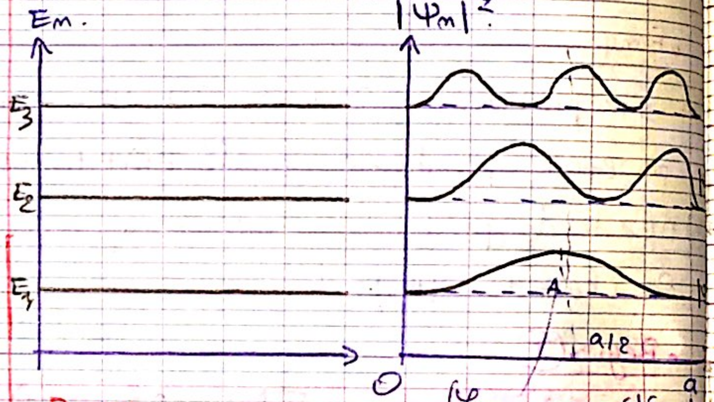
et $E_n = n^2.\frac{\pi^2\hbar^2}{2m.a^2}$ $\boxed{n \geq 1}$

2) Niveaux d'énergie:

→ n dans E_n est le nombre quantique.

→ $(E_n)_{n\geq 1}$ est appelé spectre d'énergie.

→ E_1: niveau fondamental.



- Rmq:

→ $(a \searrow) \Rightarrow E_n \nearrow$ (Les propriétés de symétrie du potentiel se retrouvent dans φ)

L'énergie de la particule augmente tant qu'elle est mieux localisée.

→ $E_{n\geq 2}$ sont dits des niveaux d'énergie excités.

→ l'énergie d'un état stationnaire est d'autant plus élevée que la fonction d'onde propre (réelle) présente un nbre important de nœuds.

→ L'inégalité de Heisenberg permet d'interpréter l'existence du niveau d'énergie fondamental.

- **Énergie de localisation (ou de confinement) :**

→ L'incertitude sur la position : $\Delta x < a$.
D'après l'inégalité spatiale de Heisenberg,

$$\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2a}.$$

→ On en déduit qu'il existe une valeur minimale de l'énergie cinétique de la particule. $E_{c,min} = \frac{\langle p_x^2 \rangle_{min}}{2m}$

$$\Rightarrow \boxed{E_{c,min} \simeq \frac{\hbar^2}{8ma^2}}$$

c'est l'énergie de confinement.

IV) États non-stationnaires d'une particule quantique.

1) Cas de puits de potentiel infiniment profond.

→ On montre que toute fonction d'onde non stationnaire peut être écrite comme combinaison linéaire des fonctions d'onde stationnaires :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot \varphi_n(x) \cdot \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$$

avec $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = 1$

2) Superposition de deux états non-stationnaires.

Soient,
$$\begin{cases} \Psi_a(x,t) = \exp\left(-i \frac{E_a}{\hbar} t\right) \cdot \varphi_a(x) \\ \Psi_b(x,t) = \exp\left(-i \frac{E_b}{\hbar} t\right) \cdot \varphi_b(x) \end{cases}$$

On suppose de plus que $E_a \neq E_b$.

→ On cherche à caractériser la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \alpha \cdot \Psi_a(x,t) + \beta \cdot \Psi_b(x,t)$.

→ Après le calcul de $|\Psi|^2$, on obtient que :

$$\boxed{|\Psi|^2(x,t) = A(x) + B(x) \cdot \cos\left(\frac{E_b - E_a}{\hbar} \cdot t + \theta(x)\right)}$$

→ Donc la superposition de 2 états stationnaires n'est pas un état stationnaire, et la probabilité de présence en un point x est une fonction sinusoïdale de pulsation $\boxed{\omega = \frac{|E_a - E_b|}{\hbar}}$.

~~Cette pulsation~~

Remarques générales

→ Une particule quantique est dans un état stationnaire ssi son énergie est constante dans le temps.

→ Une particule quantique libre peut avoir une énergie $E > 0$ quelconque (toute valeur de $E > 0$ vérifie l'éq. de Schrödinger). On dit donc que le spectre d'énergie est continu.

→ En méca. quantique, il y a mvt lorsque l'état du système est ~~dan~~ un état d'interférence entre plusieurs états stationnaires d'énergie différente (pas comme une OPPM qui a une extension spatiale infinie).

→ Le flux surfacique de particules, c-à-d le nombre de particules qui traversent une surface par unité de temps et unité de surface, s'identifie à la norme du courant de densité de probabilité $\|\vec{J}\|$.
Ceci dit, $\Phi = \frac{I}{|q| \cdot S} = \|\vec{J}\|$.

→ Des formules pour calculer $\langle E \rangle$ et $\langle E^2 \rangle$ où E : l'énergie d'une particule quantique, à l'aide de sa fonction d'onde :

$$\langle E \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \, dx$$

$$\langle E^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \, dx$$