Onde Électromagnétique dans un Conducteur
Réflexion

I) Propagation d'une O.E.M dans un conducteur

1) Conductivité d'un métal en R.V : (↳ Régime variable)

• On considère que le métal étudié comprend :

→ Des ions fixes.

→ Des électrons de conduction de densité particulaire n_0 et qui sont libres de se déplacer.

• La différence entre un métal et le plasma c'est que le métal est un milieu dense. On doit donc tenir compte des collisions entre les ions et les électrons du métal. On modélise ces collisions par une force que subit chaque électron : $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$ (↳ Vitesse de l'électron)

• Mvt de l'électron :

• Bilan des forces :

→ $q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$: Force de Lorentz.

→ $-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$: force dissipative.

→ son poids (négligeable).

• Analyse qualitative :

→ Le champs E.M extérieur influence sur le mouvement des électrons dans le métal, ce qui crée une densité volumique de courant qu'on va exprimer à l'aide des caractéristiques précédentes. On applique le P.F.D :

• Analyse quantitative :

• P.F.D sur un électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Rmq : ↳ On peut négliger ~~la vitesse des électrons~~ la composante magnétique si la vitesse des électrons est supposée $\ll c$.

↳ En effet : On a, $\frac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v^* B}{E}$ avec v^* la vitesse moyenne de l'électron. Dans le cas d'une OPP on a, $B = \frac{E}{c}$. Donc $\frac{v^*}{c} \ll 1$.

D'où C.Q.F.D.

⇒ On obtient donc,

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}} \quad (*)$$

• Pour une O.P.P.M, on a,

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}(M)\exp(j\omega t)$$

Donc on cherche les solutions permanentes de (*) de la forme :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{v_0}\,\exp(j\omega t)$$

Après tout calcul fait, on obtient,

$$\underline{\vec{j}} = n_0(-e)\,\underline{\vec{v}} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e(1+j\tau\omega)}\,\underline{\vec{E}}$$

→ On définit ainsi la conductivité complexe du conducteur par :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2\tau}{m_e(1+j\tau\omega)}$$

⚠ Cette conductivité complexe est valable pour tout conducteur (Ohmique ou non). Ainsi, on définit un conducteur Ohmique par un conducteur pour lequel on peut néglige $\tau\omega$ devant 1.

⇒ $\omega \ll 1/\tau \simeq 10^{13}$ Hz.

2) Relation de dispersion d'un conducteur ohmique

↳ **Hypothèses**: On considère que le conducteur ohmique a pour caractéristiques :

- $\vec{J} = \gamma . \vec{E}$ (Loi d'Ohm locale).
- $\rho(M,t) = 0$ (On la démontre par $\text{div}\, \vec{E} = \rho$ et $\text{div}\, \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)

↳ **Conséquences**: Pour une OPPM avec $\vec{k}$ vecteur d'onde et ω sa pulsation $\ll 10^{13}$ Hz, et en appliquant les éq de maxwell, on obtient la relation de dispersion dans le conducteur :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 . \gamma . \omega.$$

↳ Ceci donne deux valeurs complexes de $\underline{k}$, on choisit celui de la forme :

$$k = k' - ik'' \quad \text{avec} \quad k' > 0, \quad k'' > 0.$$

→ Le milieu conducteur absorbe de l'énergie par le terme $\exp(-k'' z)$. (C'est en fait l'effet Joule).

→ La distance caractéristique de l'atténuation ou l'absorption est

$$\delta = \frac{1}{k''}$$

→ La vitesse de phase dans ce cas est : $v_\varphi = \frac{\omega}{k''}$

- Cas des basses fréquences :

→ On passe aux basse fréquences où on peut négliger le terme $\frac{\omega^2}{c^2}$ dans la relation de dispersion. On obtient donc :

$$k^2 = -i\mu_0 . \gamma . \omega.$$

→ Les solution physique est :

$$\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0 . \gamma . \omega}{2}}$$

Dans ce cas, $k' = \sqrt{\frac{\mu_0 . \gamma . \omega}{2}} = k''$

Donc :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 . \gamma . \omega}}$$

→ Dans ce cas,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk''} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}} = 2 v_\varphi.$$

→ Dans ce cas : $v_\varphi \times v_g \neq c^2$ car $k^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2} + \text{cte}$.

→ La vitesse v_g du paquet d'ondes dépend de ω, donc le paquet d'ondes se déforme suivant la fréquence.

- Applications et ordres de grandeur :

→ Pour le cuivre, on a :

$$\gamma_{Cu} = 6.10^7 \, \Omega^{-1} m^{-1}.$$

Donc : $\delta(f = 50\,Hz) = 9{,}2$ mm.

→ Pour l'eau de mer, on a :

$$\gamma = 1 \, \Omega^{-1} m^{-1}$$

On trouve donc :

$$\delta \approx \frac{500}{\sqrt{f(\text{en } Hz)}} \text{ mm}$$

↳ Donc, les sous-marins doivent utiliser des basses fréquences pour assurer la communication entre eux par les ondes radio.

- Équation de diffusion

→ On peut faire l'étude autrement en utilisant les éq. de maxwelle. On obtient :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 . \gamma . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

en négligeant le courant de déplacement.

• Formule des champs électriques dans le conducteur :

→ Après tout calcul fait, et en remplaçant l'expression de $\underline{k} = k' - ik''$ dans la formule obtenue du champs $\vec{E}$, on obtient :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0} . \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) . \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u_x}$$

et : $\underline{\vec{B}} = \underline{E_0} \left(\frac{1-i}{\delta \omega}\right) . \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) . \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u_y}$.

↳ Pour les formules de l'énergie, voir Tout-en-un (des calculs à faire).

3) Réflexion d'une O.P.P.M sur un conducteur parfait.

↳ L'étude est restreinte au cas de l'incidence normale.

• Conducteur parfait :

→ Un conducteur ohmique est dit parfait lorsque sa conductivité tend vers $+\infty$.

→ Ceci induit que $\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$, car sinon $P_J = \vec{j} . \vec{E} = \gamma . E^2 \xrightarrow[\gamma \to +\infty]{} +\infty$ ce qui n'est pas physique.

→ Ceci induit aussi que $\boxed{\vec{j} = \vec{0}}$ puisque $\vec{j} = \gamma . \vec{E}_{int}$.

• Densité de courant surfacique :

→ Du fait que $\vec{j} = \vec{0}$, le courant circule à la surface du conducteur. ce courant est noté $\vec{j_s}(P,t)$ avec $P \in$ Surface du conducteur.

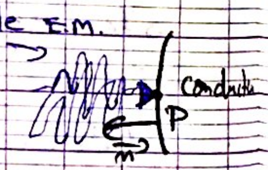
→ Le calcul de $\vec{j_s}$ se fait par une méthode plus réaliste. En effet, dans la réalité, le courant $\vec{j} \neq \vec{0}$, n'est nul que d'après quelques distances de δ. On utilise donc le fait :

$$\boxed{\vec{j_s} = \int_{z=0}^{+\infty} \vec{j} . dz .}$$

↳ En général, j_s^* est de l'ordre de $\boxed{j_s^* = j^* . \delta}$

• Conditions aux limites pour le champ électromagnétique incident à la surface d'un conducteur parfait :

→ La surface du conducteur peut aussi comprendre une densité surfacique de charge. On admet les relations de passage suivantes ~~fois~~ à la surface du conducteur :



(1) $\vec{E}(P,t) = \frac{1}{\varepsilon_0} . \sigma(P,t) . \vec{n}$.

(2) $\vec{B}(P,t) = \mu_0 . \vec{j_s} \wedge \vec{n}$.

(ces relations sont hors programme)

• Réflexion d'une OPP.M en incidence normale sur un conducteur :

→ On admet que quand une onde e.m, elle renvoit une onde réfléchie dans l'autre sens, ainsi qu'une onde transmise (lors du cas d'un conducteur réel).

→ L'onde réfléchie a la $\underline{m}$ pulsation que l'onde ~~incidente~~ incidente. En effet, l'onde incidente fait rayonner les porteurs de charge qui se trouvent sur la surface du conducteur, induisant ainsi ~~une densité~~ un courant électrique.

Par <u>la linéarité de la loi d'Ohm</u>, la pulsation du courant électrique est identique à celle du champs incident. Et par <u>la linéarité des Eq. de Maxwell</u>, le champs réfléchi a la même pulsation.

→ On admet que l'onde réfléchie est aussi une O.P.P.M de même polarisation. Ceci donne donc que l'onde réfléchie a un vecteur d'onde $\vec{k}_r = -k_i \vec{u}$ avec $\vec{k_i} = k_i . \vec{u}$. (Elle se propage dans le sens opposé de l'onde incidente).

Ainsi, les champs s'écrivent :

- $\vec{E_r} = \underline{r} . \underline{E_0} . \exp\left[j(\omega t + \vec{k}.\vec{OM})\right] . \vec{u_x}$.
- $\vec{B_r} = \frac{-\vec{u}}{c} \wedge \vec{E_r}$

avec : $\underline{r}$: coefficient de réflexion

→ L'onde transmise a pour champs :

- $\vec{E_t} = \underline{t} . \underline{E_0} . \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) . \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u_x}$.
- $\vec{B_t} = \left(\frac{1-i}{\delta \omega}\right) . \vec{u_z} \wedge \vec{E_t}$.

avec : $\underline{t}$: Coefficient de transmission

→ Pour déterminer $\underline{r}$ et $\underline{t}$, on utilise les relations de passage

→ Quand le conducteur est <u>parfait</u> :

$\underline{t} = 0$.

→ L'onde donc qui se trouve sur l'espace est la superposition de $\vec{E_i}$ et $\vec{E_r}$ qui doivent vérifier les relations de passage.

- $\vec{E_i}(z=0,t) + \vec{E_r}(z=0,t) \mathbin{/\!\!\!/} \cancel{\vec{u_z}}$
- $\vec{B_i}(z=0,t) + \vec{B_r}(z=0,t) \perp \vec{u_z}$.

~~Or, les deux or~~

. Or, la première condition induit que :

$\underline{E_i}(z=0,t) + \underline{E_r}(z=0,t) = 0$

car les deux sont portés par $\vec{u_x}$.

Donc : $\underline{r} = -1$

. <u>Aspect énergétique</u> :

→ On a : $\langle \vec{\Pi_i} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\vec{\underline{E_i}} \wedge \vec{\underline{B_i}}^*\right)$

$= \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 . c} . \vec{u_z}$

et on a : $\langle \vec{\Pi_r} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\vec{\underline{E_r}} \wedge \vec{\underline{B_r}}^*\right)$.

On définit ainsi coefficient de réflexion en énergie par :

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi_r} \rangle . (-\vec{u_z})}{\langle \vec{\Pi_i} \rangle . (\vec{u_z})} = |\underline{r}|^2.$$

→ c'est le rapport entre la puissance moyenne réfléchie par le plan et celle qu'il reçoit.

. <u>Complément</u> : Cas où la conductivité est finie :

→ Dans ce cas, $\vec{E}(P,t)$ est continue lors de la traversée de la surface.

→ $\vec{B}(P,t)$ est aussi continue à la traversée de la surface.

→ Ce qui donne :

- $\vec{\underline{E_i}}(z=0,t) + \vec{\underline{E_r}}(z=0,t) = \vec{\underline{E_t}}(z=0,t)$
- $\vec{\underline{B_i}}(z=0,t) + \vec{\underline{B_r}}(z=0,t) = \vec{\underline{B_t}}(z=0,t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \frac{(1-i)}{\delta . \omega} . c . \underline{t} \end{cases}$$

Ce qui nous donne les valeurs de $\underline{r}$ et de $\underline{t}$.

• **Onde électromagnétique stationnaire:**

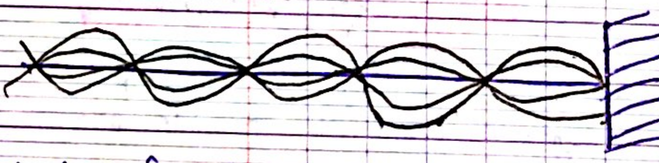
↳ On s'intéresse juste au cas du conducteur parfait. L'onde incidente donne naissance juste à une onde réfléchie de même amplitude mais de sens opposé.

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E_i}(M,t) + \vec{E_r}(M,t)$$
$$= E_0 \left(\exp[j(\omega t - kz)] - \exp[j(\omega t + kz)]\right) \vec{u_x}$$
$$\vec{E}(M,t) = -2i\, E_0 \sin(kz) \exp(j\omega t)\, \vec{u_x}$$

• De même, on trouve:

$$\vec{B}(M,t) = \frac{2}{c} E_0 \cos(kz) \exp(j\omega t)\, \vec{u_y}$$

↳ Cette onde ne se propage pas, à cause de l'absence du terme $\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{OM}$. Elle vibre sur place.



↳ Après le calcul, on trouve que:

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) \sin(2kz)\, \vec{u_z}$$

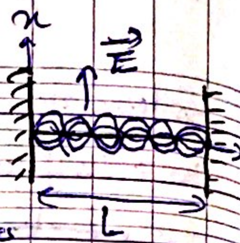
→ Il est $= 0$ sur les nœuds de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$, et de moyenne temporelle nulle.

→ Ainsi, l'onde stationnaire ne propage pas l'énergie.

4) Onde électromagnétique dans une cavité:

→ Une cavité est un volume vide délimité par des parois conductrices. Si on excite un champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité, il peut s'y produire des ondes stationnaires de fréquences bien précises qui dépendent de la géométrie de la cavité.

• Cette cavité permet de sélectionner des fréquences précises appelées fréquences propres, produisant ainsi une onde monochromatique.



→ On cherche des ondes dont le champs à l'intérieur (qui respecte l'éq de propagation $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$) de la forme de $\vec{E} = E_1(z)\cdot E_2(t)\,\vec{u_x}$

Avec $E(0,t) = E(L,t) = 0,\ \forall t$.

On trouve ainsi:

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi\right) \vec{u_x}$$

D'après l'éq de Maxwell-Faraday, on obtient:

$$\bullet\ \vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right) \wedge (E_x \vec{u_x}) = -\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{u_y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{n\pi}{L} E_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi\right) \vec{u_y}$$

Donc:

$$\vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi\right) \vec{u_y}$$

↳ Pour que l'onde existe dans une cavité, il faut choisir l'une des fréquences pour qu'il y aura le phénomène de résonance:

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$