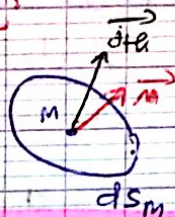


Transferts Thermiques

 → Par conduction seulement.

I) Le courant thermique \vec{j}_{th}

→ On suppose qu'il y a équilibre thermodynamique local.



On a ainsi: $\delta^2 Q = \vec{j}_{th}(m, t) \cdot \vec{n} \cdot dS_m \cdot dt$

↳ c'est la quantité de chaleur qui traverse dS_m entre t et $t+dt$.

Flux thermique ϕ :

→ c'est la puissance du transfert thermique

$$d\phi = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_{th}(m, t) \cdot \vec{n} \cdot dS_m$$

→ D'où on déduit:

$$\phi(t) = \iint_{M \in S} \vec{j}_{th}(m, t) \cdot \vec{n} \cdot dS_m$$

II) La loi de Fourier - Conductivité thermique:

La phénoménologie de Fourier:

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T(m, t)$$

Traduit le fait que l'énergie se déplace des régions chaudes vers les régions froides.

↳ conductivité thermique du matériau.

↳ Cette loi traduit un phénomène irréversible, car si on change le sens du temps, \vec{j}_{th} s'inverse sans alors que $\text{grad } T(m, t)$ non.

↳ Cette loi n'est pas valable dans les cas suivants:

- ① Si le gradient thermique est trop fort la relation cesse d'être linéaire.
- ② Si le gradient varie trop rapidement, la relation cesse d'être instantanée.
- ③ Si le milieu est anisotrope, c-à-d λ dépend de la direction.

Ordres de grandeur des conductivités thermiques

→ Les matériaux solides métalliques ont la plus grande. Il suit les matériaux solides non métalliques, ensuite les fluides, et les gaz.

- Cuivre: $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Verre: $\lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Eau: $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Air: $\lambda = 0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

III) Equation locale de bilan thermique

Cas particuliers:

Utiliser: $d^2 U = U(t+dt) - U(t) = C \cdot (T(m, t+dt) - T(m, t))$
(p.c.s)

tout en supposant que dS_m la température est uniformément distribuée sur le volume $\Sigma = dS_m \cdot dx$

Utiliser:
$$\begin{cases} \delta^2 Q_x = \vec{j}_{th}(x, t) \cdot \vec{u}_x \cdot dS_m \cdot dt \\ \delta^2 Q_{x+dx} = -\vec{j}_{th}(x+dx, t) \cdot dS_m \cdot dt \end{cases}$$

ainsi que le premier principe de la thermodynamique: $d^2 U = \delta W + \delta Q$

Eq générale (en l'absence des sources)

$$\mu.c. \frac{\partial T(m, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{th}(m, t) = 0$$

IV) Equation de la diffusion thermique:

→ On applique l'éq. du bilan thermique, ainsi que la loi de Fourier, et on obtient:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(m, t) = a \Delta T(m, t)$$

La diffusivité thermique

↳ Laplace

$$a = \frac{\lambda}{\mu.c}$$

échelles de longueur et de temps associées:

• Soit τ un temps caractéristique des variations temporelles de T .

• Soit L échelle caractéristique des variations spatiales de T .

• Soit T^* ordre de grandeur de T .
 → En ordre de grandeur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T^*}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial k^2} \sim \frac{T^*}{L^2}$$

On obtient d'après l'éq:

$$L = \sqrt{\alpha \cdot \tau}$$

→ Pour $t \gg \tau$ la température n'évalue plus dans le temps

En présence de sources:

→ Soit $P_V(M, t)$: la puissance volumique produite au point M à l'instant t .
 elle ajoute donc une énergie au système (au contraire de celle absorbée).

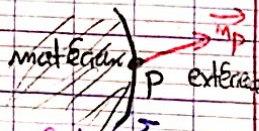
Donc $d^2U = \delta W + \delta Q + P_V(M, t) \cdot d^3m \cdot dt$

On obtient ainsi l'équation:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} (M, t) = \Delta T(M, t) + \frac{1}{\alpha} P_V(M, t)$$

Conditions aux limites pour le champ de température:

↳ La résolution de l'éq. de diffusion nécessite la connaissance des conditions aux limites.



(a) Cas du contact entre 2 solides:

→ Dans ce cas, au point P , on a:

• Continuité de T : $T(P, t) = T(P', t)$

• Continuité de la composante normale

de \vec{j}_{th} : $\vec{j}_{th}(P', t) \cdot \vec{m}_p = \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{m}_p$
 car $\phi(P', t) = \phi(P, t)$
 $\Rightarrow \vec{j}_{th}(P', t) \cdot \vec{m}_p \cdot dS_p = \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{m}_p \cdot dS_p$

(b) Cas du contact avec un fluide, loi de Newton:

Newton:

Loi de Newton:

$$d\phi_{solide \rightarrow fluide} = h \cdot (T(P, t) - T_f) \cdot dS_p$$

coefficient de transfert thermique de surface.

Température du fluide

→ n'oublie pas que:

$$d\phi_{solide \rightarrow fluide} = \vec{j}_{th}(P, t) \cdot d\vec{S}_{m.p.}$$

→ si $h \rightarrow +\infty$, $T(P, t) = T_f$ car $\|\vec{j}_{th}\| \rightarrow +\infty$. Dans ce cas on dit que le fluide impose sa température au solide.

(c) Paroi adiabatique:

$$d\phi = 0 \Rightarrow \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{m}_p = 0$$

V) Résistance thermique:

On s'intéresse au transfert thermique entre un sys Σ_1 et un sys Σ_2 séparés par un solide Σ de conductivité λ en régime stationnaire, $c = a = d$
 $\alpha \cdot t \gg \tau$

→ En supposant que toutes les lignes du courant thermique partant de Σ_1 arrivent à Σ_2 , alors toute l'énergie partant de Σ_1 arrive à Σ_2 .
 D'où en régime stationnaire:

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \phi_{1 \rightarrow \Sigma} = \phi_{\Sigma \rightarrow 2}$$

$$\Rightarrow \iint_{P \in \Sigma_1} \vec{j}(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} = \iint_{P \in \Sigma_2} \vec{j}(P_2) \cdot d\vec{S}_{P_2}$$



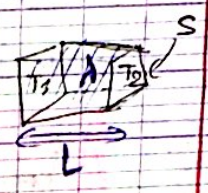
→ et d'après la loi de Fourier, on constate que $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est \propto à $T_1 - T_2$ d'où on appelle résistance thermique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}} \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1})$$

la résistance résiste au transfert $S(\phi)$ d'après les particularités:

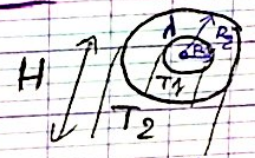
(a) Transfert unidimensionnel

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda \cdot S}$$



(b) Géométrie cylindrique

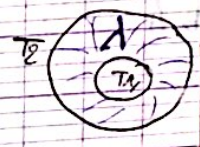
$$R_{th} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \cdot H \cdot \lambda}$$



(on peut voir que $\phi_{1 \rightarrow 2} = 2\pi \cdot r \cdot H \cdot j_{th}(r) = cte$ et trouver directement la résistance.)

(c) Géométrie sphérique

$$R_{th} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \lambda}$$



• lois d'association des résistances thermiques

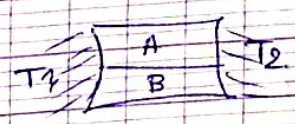
(a) En série

$$R_{th, \text{eq}} = R_{th, A} + R_{th, B}$$



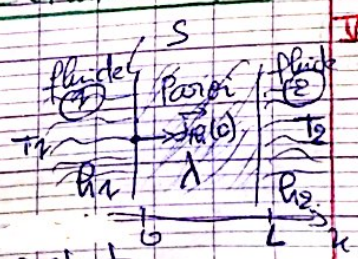
(b) En parallèles

$$\frac{1}{R_{th, \text{eq}}} = \frac{1}{R_{th, A}} + \frac{1}{R_{th, B}}$$



• Résistance thermique d'une interface solide - fluide:

→ On cherche à calculer $\frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}}$ en régime permanent, le flux est constant



d'où $\phi_{1 \rightarrow 2} = j_{th}(0) \cdot S$

où $j_{th}(0) = h_1 (T_1 - T(0))$ du paroi $x=0$

et $j_{th}(L) = h_2 (T(L) - T_2)$

Or, $j_{th}(0) = j_{th}(L)$ (car flux = cte)

⇒ $h_1 (T_1 - T(0)) = h_2 (T(L) - T_2)$ (1)

et on ajoute à cette éq l'éq.

$j_{th}(0) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{1}{A} \frac{dT}{dx}$ (2)

car $\Delta T = 0$ ($T(x) = T(0) + A \cdot x$)

d'où (1) $h_1 (T_1 - T(0)) = h_2 (T(0) + \lambda L - T_2)$

(2) $h_1 (T_1 - T(0)) = -\lambda \cdot A$

et on obtien $A = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1} + L + \frac{1}{h_2}}$

d'où $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}$

→ c'est la somme de 3 résistances d'où on définit la résistance thermique d'une interface solide - fluide:

$$R_{th} = \frac{1}{h \cdot S}$$

• Remarque

→ Ces expressions de la résistance thermique ne sont valables que si on est en régime lentement variable

($c-a-d \quad t \gg \tau$ où τ : temps caractéristique des variations de T_1 et T_2)

(II) Complément Irreversibilité du phénomène de conduction thermique

• Loi de Fourier

→ La loi de Fourier traduit l'irréversibilité de la conduction thermique.

• Production d'entropie:

→ La conduction électrique s'accompagne donc d'une entropie.

• Bilan entropique

• Comme la quantité de chaleur parcourt

une distance dx en dt , alors l'entropie échangée entre t et $t+dt$

$$\text{est: } S^2 S_{\text{ech}} = \frac{\delta Q_x}{T(x,t)} + \frac{\delta Q_{x+dx}}{T(x+dx,t)}$$

on utilise : $\delta Q_x = j_{Tn}(x,t) \cdot A \cdot dt$

et $\delta Q_{x+dx} = -j_{Tn}(x+dx,t) \cdot A \cdot dt$

$$\text{D'où: } S^2 S_{\text{ech}} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{Tn}}{T} \right) dx \cdot dt \cdot A$$

→ En utilisant la loi de Fourier, on trouve:

$$S^2 S_{\text{ech}} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) A \cdot dx \cdot dt$$

$$= \left(-\frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) A \cdot dx \cdot dt$$

→ L'entropie de Σ à l'instant t est:

$$dS(x,t) = \underbrace{s(x,t)}_{\substack{\text{entropie} \\ \text{massique}}} \cdot \mu A \cdot dx$$

or Σ est incompressible et indilatable.

Donc d'après l'identité remarquable

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV \stackrel{0}{\text{}}$$

On obtient que $S = S_0 + c \cdot \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$

$$\text{D'où } d^2 S = dS(x, t+dt) - dS(x, t)$$

$$\approx \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) \cdot \mu A \cdot dx \cdot dt$$

$$= \lambda \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \cdot A \cdot dx \cdot dt$$

Or, d'après le second principe

$$S^2 S_{\text{créée}} = d^2 S - S^2 S_{\text{ech}}$$

en utilisant l'éq. de la diffusion thermique, on obtient:

$$S^2 S_{\text{créée}} = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 A \cdot dx \cdot dt$$

On peut donc exprimer $S_{\text{créée}}$ par unité de temps et unité de masse:

$$S_{\text{créée}}(x,t) = \frac{\lambda}{\mu (T(x,t))^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \right)^2$$