Série Entières

Too much power on... powers: z^n!

Lemme d'Abel. $\{a_n z_0^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ bornée $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ cvN sur $\overline{B}(0,\rho)$ où $\rho<|z_0|$

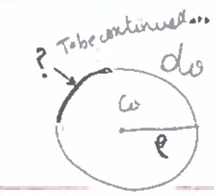
$\Rightarrow$ rayon de cv $\geq |z_0|$

$\{a_n |z_0|^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ pas bornée $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dv pour $|z|\geq |z_0|$

Rayon de cv. $\rho = \max\{r\in\mathbb{R}_+ \mid (|a_n r^n|) \text{ bornée}\}$.

$(a_n r^n)$ bornée $\Leftrightarrow \rho \geq r$

$(a_n r^n)$ non bornée $\Leftrightarrow \rho \leq r$



$\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ cvN sur tout compact de $B(0,\rho)$

$a_n = O(b_n) \Rightarrow \rho(\sum_{n\geq 1} a_n z^n) \geq \rho(\sum_{n\geq 1} b_n z^n)$

$a_n \sim b_n \Rightarrow \rho(\sum_{n\geq 1} a_n z^n) = \rho(\sum_{n\geq 1} b_n z^n)$

Cauchy

$\forall n,\ c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$ $\quad \rho(c_n) \geq \min(\rho(a_n), \rho(b_n))$

$\forall z\ |z| < \min(\rho(a_n), \rho(b_n))$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$

D'Alembert ⚠

(i) $\exists n_0\ \forall n\geq n_0\ a_n \neq 0$

(ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$

$\rho(\sum_{n\geq 1} a_n z^n) = \frac{1}{L}$

On peut dériver, intégrer sous le signe $\sum$ pour les SE

mod l'IOC

Le produit de deux $\mathcal{F}$ DSE sur un ouvert est DSE sur cet ouvert.

$|z|<1 \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$

Série de Taylor : f DSE au voisinage de ω

$\exists r>0 \quad \forall x\in]\omega-r,\omega+r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!}(x-\omega)^n$

Taylor reste intégrale

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(\omega)}{k!}(x-\omega)^k\right| \leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\,dt\right|$$

Rq f n'est pas toujours égale au développement en série de Taylor

→ La série de Taylor peut dv

→ La série ——— cv mais pas vers f

→ Si f DSE alors elle est égale à sa série de T.

→ Si le reste $\int \to 0$ alors f = Série de T