si $t \geq x$, $f(t) \leq \int_t^{+\infty} fg \leq \int_x^{+\infty} fg \leq \mu(x) \int_x^{+\infty} g$

de tout $\qquad \mu(x) \leq \mu(x) \underbrace{\int_x^{+\infty} g}_{\to 0}$

Soit $A \geq 0$ tq $\forall x \geq A \int_x^{+\infty} g < 1$, il vient $\mu(x) = 0$
$\forall t \geq A, f(t) = 0$

$\forall x \in [0, A], 0 \leq f(x) \leq \int_x^A fg \leq \underbrace{M}_{\sup_{[0,A]} g} \int_x^A f$

Alternative : $A = \sup\{t \geq 0 \mid f(t) > 0\}$ sur $[0, A]$ $f(x) - M \underbrace{\int_x^A f}_{\varphi(x)} \leq 0$

Soit $\left(e^{M(x-A)} \varphi(x)\right)' = e^{M(x-A)} (M\varphi(x) - f(x)) \geq 0$

croissante, ≥ 0, nulle en $A \to = 0$] fin du hors contexte

VII EVN de dimension finie

Données : $(E, \| \|)$ est un evn de dimension finie $n \geq 1$, il possède une base finie $(e_1, \dots, e_n)$

A) Equivalence des normes

Th : Sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont equivalentes.

D/ Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, il vient $N(x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(\varepsilon_i)$
$\leq \left(\sum_{i=1}^n N(\varepsilon_i)\right) \|$

Delà : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad N(x-y) \leq C \|x-y\|_\infty \quad (1)$

N est lip donc $\mathcal{C}^0$ pour $\| \|_\infty$

On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. S est fermé et borné dans l'espace produit $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ donc compacte

Sur S, N est bornée donc atteint son inf α. $\alpha = N(a)$, $a \in S$

Ainsi $N(a) > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, il vient $N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \alpha$

donc $N(x) \geq \alpha \|x\|_\infty$ (2

(CC) $N \sim \| \|_\infty$, par transitivité il n'y a qu'une seule classe d'éq

Cor. Deux normes N_1, N_2 sur E (ev dim f) sont équivalentes

D/ Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ un isomorphisme
sur $\mathbb{R}^n$, les normes $N_1 \circ \varphi$ et $N_2 \circ \varphi$ sont équivalentes,

φ étant surjective, N_1 et N_2 sont équivalentes (on a aussi utilisé φ^{-1} inj)

B) Suites, composantes

Th. Soit $(u_p) \in E$, $u_p = \sum_{i=1}^{n} u_{ip} e_i$; $\| \|$ une norme sur E

$\Updownarrow$ (u_p) converge pour $\| \|$
$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\exists l_i \in \mathbb{R}$, $u_{pi} \xrightarrow[p \to \infty]{} l_i$ (dans $\mathbb{R}$)

Dans ce cas, $\lim u_n = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i$

Ex: montrons $A_p \xrightarrow[\| \|]{} A \iff \forall (i,j)\ A_p(i,j) \to A(i,j)$

D/ On pose pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $N(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Alors $N \sim \| \|$, donc (u_p) CV pour $\| \|$ (vers l)

$\Leftrightarrow (u_p) \subset V$ pour N (vers ℓ) $\left\{ \max_{1\leq i\leq n} |u_{p_i} - \ell_i| \to 0 \right.$

$\Leftrightarrow \forall i \; u_{p_i} \to \ell_i$ et $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i$

<u>Th</u>: Soient $\left| \begin{array}{l} A \subset X \text{ e.m}, f : A \to E, f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \\ a \in \bar{A} \end{array} \right.$

$\Updownarrow$ f possède une lim finie en a selon A, soit ℓ | Dans ce cas $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i$
chaque f_i — — — — — soit ℓ_i

D\ Ex pers.

C) Compacité, complétude

<u>Th</u>: (BéWé) Soit $(u_p) \in E^{\mathbb{N}}$. Si u_p est bornée pour $\| \|$ alors u_p possède au moins une valeur d'adhérence.

D/ On pose $N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \max |x_i|$

$N \sim \| \|$, donc $u_p = \sum_{i=1}^{n} u_{p_i} e_i$ est borné pour N

Dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ la suit $\tilde{u}_p = (u_{p_1}, \dots, u_{p_n})$ possède une VA

donc aussi u_p pour N (B) $\left(\tilde{u}_p \in \bar{B}_{\| \|_\infty}(0, M)\right)$

Par équivalence des normes N et $\| \|$, u_p possède une VA dans E

Cor ① Une partie A de $(E, \| \|)$ est compacte si elle est fermée et bornée

D/ Soit $u_p \in A^{\mathbb{N}}$, il existe $\left| \begin{array}{l} a \in E \\ \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}} \end{array} \right.$ tq $u_{\varphi(p)} \to a$, ainsi $a \in \bar{A}$

mais $\bar{A} = A$ □

② Tout point possède une base de voisinages compacts
$\bar{B}(a, \varepsilon)$ par ex, $\varepsilon > 0$ $\{ \forall V \in \mathcal{V}(a), \exists \varepsilon > 0 \; \bar{B}(a, \varepsilon) \subset V$