Intégration (II)

I Calculs et changements de variable

A) Fractions rationnelles (résidus)

① Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$. Déterminer $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x-(a+ib)}$

S/ $\int \frac{dx}{x-(a+ib)} = \int \frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+C\right]_{-A}^{A}$

$$\ln\left((A-a)^2+b^2\right) - \ln\left((A+a)^2+b^2\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

$$\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]_{-A}^{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \pi \ : \ \exists \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x-(a+ib)} = i\pi$$

② Soit F une fraction rationnelle sans pôle réel de degré $\leqslant -2$. Lorsque ω est un pôle de F, on note $\operatorname{Res}(F,\omega)$ le coeff de $\frac{1}{z-\omega}$ dans la DEES de F. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ en fonction des résidus

S/ La partie entière de F est nulle

Une partie polaire de F s'écrit $P(F,\omega) = \frac{\lambda_1}{z-\omega} + \frac{\lambda_2}{(z-\omega)^2} + \dots + \frac{\lambda_p}{(z-\omega)^p}$

$\lambda_1 = \operatorname{Res}(F,\omega)$

$$\int_{-A}^{A} P(F,\omega)(x)\,dx = \lambda_1 \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x-\omega} + \underbrace{\lambda_2\left[-\frac{1}{x-\omega}\right]_{-A}^{A} + \dots + \lambda_p\left[\frac{-1}{(p-1)(x-\omega)^{p}}\right.}_{\longrightarrow 0}$$

$\longrightarrow$ on pose $\omega = a+ib$

* $b>0$: on trouve $i\pi \operatorname{Res}(F,\omega)$

* $b<0$: on trouve $-i\pi \operatorname{Re}(F,\omega)$

On note P l'ensemble des pôles de F de parties imaginaires > 0

Avec ce qui précède $\int_{-\infty}^{+\infty} F = i\pi\Big(\underbrace{\sum_{w\in P} \mathrm{Res}(F,w)}_{\lambda} - \underbrace{\sum_{w\in P} \mathrm{Res}(F,\overline{w})}_{\overline{\lambda}}\Big)$

$$= -2\pi \sum_{w\in P} \mathrm{Im}\big(\mathrm{Res}(w)\big)$$

Ex : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \left(= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}\right)$ * pôles : e^{i} $z^4 = -1 = e^{i\pi}$

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi/4+\pi}, e^{i\pi/4-\pi/2}$$

$\mathrm{Res}(w) = \frac{P(w)}{Q'(w)} = \frac{1}{4w^3} = -\frac{w}{4}$ | partie imaginaire : $e^{i\pi/4} > 0$

$e^{i\pi/4+\frac{\pi}{2}} > 0$

$e^{i\pi/4+\pi} < 0$

$e^{i\pi/4-\pi/2} < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{+2\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

B) Changements de variable :

Th : Soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ un homéo $\mathcal{C}^1$ croissant

Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[, \mathbb{C})$, Alors :

i) $\int_{\to a}^{\to b} f$ CV $\Leftrightarrow \int_{\to\alpha}^{\to\beta} \varphi' f\circ\varphi$ CV, avec égalité des intégrales

ii) $f \in L^1(]a,b[) \Leftrightarrow f\circ\varphi \cdot \varphi' \in L^1(]\alpha,\beta[)$

D/ Soit $x, y \in]a,b[^2$, $u = \varphi^{-1}(x)$, $v = \varphi^{-1}(y)$

Obs : $\int_u^v f\circ\varphi\,\varphi' = \int_x^y f$ φ homéo $x \to a^+ \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \to \alpha$

$y \to b^- \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \to \beta$

Par changement de variable dans les limites, $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} \int_x^y f \Leftrightarrow \exists \lim_{(u,v)\to(\alpha,\beta)} \int_u^v f\circ\varphi\,\varphi'$

Ex: ① $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ (symétries)

$u = \pi/2 - t \qquad I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\, du = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t \sin t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) dt$$

$$= -\pi/2 \ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t\, dt)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin t\, dt}_{I}\right)$$

$$= -\pi/2 \ln 2 + I$$

donc $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

② $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi/2$

on introduit $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\, dt$. $I_0 = \pi/2$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((2n+2)t)\cancel{\sin t}}{\cancel{\sin t}}\, dt = 0$$

$\int_0^{\pi/2} \cos($

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt}_{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)}_{\mathcal{C}^0 \text{ en } 0^+} \sin(2n+1)t$$

Riemann Lesbegue. la différence tends vers 0

$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } g\ \mathcal{C}^1 \\ \int_0^{\pi/2} g(t)\sin(2n+1)t \\ = \frac{1}{2n+1}\underbrace{[\quad]}_{\text{borné}} \end{array} \right.$

Or $\int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\frac{dt}{t} = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin s}{s}\, ds$

$n \to +\infty \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi/2$ ✓

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)\right) dx = 2e^{-2}\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2}\right)$

$u=\frac{1}{x}$ $\quad I = 2e^{-2}\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\left(u+\frac{1}{u}\right)^{2}\right)\frac{du}{u^{2}}$

$I+I = 2e^{-2}\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2}\right) d\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$u = x-\frac{1}{x}$

$I+I = 2e^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^{2}\right) du = \frac{2\sqrt{\pi}}{e^{2}}$

④ Frullani Soit $f \in \mathcal{C}(]0,+\infty[, \mathbb{R})$ possédant des limites finies ℓ en 0^{+}, ℓ' en $+\infty$ Calculer $\int_{0}^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x} dx$

S/ Soient $u,v>0$, $0<u<v$ on regarde

$$\int_{u}^{v} \frac{f(bx)-f(ax)}{x} dx = \int_{u}^{v} f(bx)\frac{dx}{x} - \int_{u}^{v} f(ax)\frac{dx}{x}$$

$$= \int_{bu}^{bv} f(t)\frac{dt}{t} - \int_{au}^{av} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$= \int_{bu}^{au} f(t)\frac{dt}{t} + \int_{au}^{av} '' + \int_{av}^{bv} '' - \int_{au}^{av}$$

$$= \int_{bu}^{au} (\ell+\alpha(t))\frac{dt}{t} + \int_{av}^{bv} (\ell'+\beta(t))\frac{dt}{t}$$

$$= (\ell'-\ell)\log\frac{b}{a} + \int_{bu}^{au} \alpha(t)\frac{dt}{t} + \int_{av}^{bv} \beta(t)\frac{dt}{t}$$

Soit $\varepsilon>0$ $\exists B>0$ $\forall t \geq B$ $|\beta(t)| \leq \varepsilon$ $\quad \int_{av}^{bv} \frac{\beta(t)}{t} dt \leq \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

CC : $\exists \lim\limits_{\substack{u \to 0^+ \\ v \to +\infty}} \int_u^v \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = (\ell' - \ell)\log\left(\frac{b}{a}\right)$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\,dx$$

II Espaces de fonctions intégrables

A) Espace L^1. I est int de $\mathbb{R}$

On note $L^1(I) = \{f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C}) \mid f$ est intégrable sur $I\}$

$$L^1_c(I) = L^1(I) \cap \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$$

I ettant fixé, on note, pour $f \in L^1(I)$

$\|\ \|_1$ est une semi-norme, c'est une norme sur $L^1_c(I)$

Propriétés 1) Si I est borné, et si f est CPM bornée sur I, $f \in L^1(I)$

D/ $|f| \leq M = $ cste qui est intégrable sur I borné d'où le rés par comparaison.

2) Si $f \in L^1(I)$ et si g est bornée cpm, $fg \in L^1(I)$

D/ $|fg| \leq \|g\|_\infty |f|$, etc...

Exercices 1) On note $\mathcal{C}_c(I)$ l'algèbre des $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ tq

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}} \text{ soit compact}$$

Mq $\mathcal{C}_c(I)$ est dense dans $L^1_c(I)$ pour $\|\ \|_1$

D/ $I = \mathbb{R}$: Soit $f \in L^1_c(\mathbb{R})$. Soit φ_n

Soit $f_n = f\varphi_n$ Obs $f_n = f$ sur $[-n,n]$, $|f - f\varphi_n| = |f(1-\varphi_n)| \leq |f|$

on mult par φ_n $f\varphi_n$ est tj plus petit que f pas de risque de divergence de l'intégrale

$$\|f - f\varphi_n\|_1 = \int_{-\infty}^{-n} |f|(1-\varphi_n) + \int_n^{+\infty} |f|(1-\varphi_n) \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{-n} |f| + \int_n^{+\infty} |f|} \longrightarrow 0$$

2) Riemann - Lesbegue

Soit $f \in L^1(I)$. Alors $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_I f(t) \overset{\text{borné}}{e^{i\lambda t}} = 0$

D/ Soit $\varepsilon > 0$

On choisit $A > 0$ tq $\int_{-\infty}^{-A} |f| + \int_A^{\infty} |f| < \varepsilon$

Sur $[-A, A]$ il existe $\mu > 0$ tq

$$\forall \lambda, \ |\lambda| > \mu \Rightarrow \left| \int_{-A}^{A} e^{i\lambda t} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

Il vient:

$$\forall \lambda, |\lambda| \geq N \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-A} |f(t)| + \int_A^{+\infty} |f| + \left| \int_{-A}^{A} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon$$ ✓

3) Espace L^2:

$$L_2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C}) \ \middle| \ \int_I |f|^2 \text{ converge} \right\}$$

Prop: 1) $L_2(I)$ est un $\mathbb{C}$-ev

D) Soit $f, g \in L_2(I)$: $|f+g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$; par comparaison $f + g \in L_2(I)$

2) Si I est borné, $L_2(I)$ est contient les fonctions bornées CPM

3) Si $f \in L_2(I)$ et si $g \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ est borné, par comparaison $f g \in L_2(I)$

4) Soit $f, g \in L_2(I)$. Alors $fg \in L^1(I)$ et $\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}$

D/ Soit $[a, b] \subset I$, $a < b$, C-S donne

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2 \right)^{1/2}$$ on fait tendre $\begin{cases} a \to \inf I \\ b \to \sup I \end{cases}$

$|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ donc $fg \in L^1(I)$.

5) l'application définie sur $L_2(I)$ par $f \longmapsto \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$ est une semi-norme, c'est une norme sur $L_{2,c}(I) = \mathcal{C}(I,\mathbb{C}) \cap L_2(I)$

Comparaison L^1/L^2 (HP, savoir refaire)

1) Si I est borné on a $L^2(I) \subsetneq L^1(I)$

D/ Soit $f \in L^2(I)$ et $[a,b] \subset I$, il vient $\int_a^b |f| \times 1 \overset{C.S}{\leq} \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} \sqrt{b-a}$

donc $\int_a^b |f| \leq \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \ell(I)^{1/2}$, donc $f \in L^1(I)$, de plus $\|f\|_1 \leq \ell(I)^{1/2} \|f$

Inclusion stricte : $I =]a,b]$ par ex, on prend $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$

Si I est non borné on a aucune inclusion.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{sinon} \end{cases} \in L_1(]0,+\infty[) \quad f \notin L^2(I)$$

$$f \in L^2(I) \setminus L^2(I)$$

⚠ Suites $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$

Soit $x_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, il vient $x_n \to 0$. donc, apcr $|x_n|^2 \leq |x_n|$, comparai

Ex Soit f UC $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, si $\int_I |f|$ CV alors $\int_I |f|^2$ CV

D/ "On" sait que $|f| \to 0$, donc $\overset{\mathbb{R}^+}{}$ $\exists A > 0\ \forall x \geq A\ |f(x)| \leq 1$

Alors $\forall x \geq A$ $|f(x)|^2 \leq |f(x)|$ [illegible]

(Revoir les inégalités L_2 $\left| \begin{array}{l} \text{Hardy} \\ \text{Weyl} \end{array} \right)$

Interversion d'une limite ou d'une somme ou d'une intégrale

Préambule : On cherche à justifier des interversions de symboles

$$\left|\begin{array}{l} \int_I \lim f_n = \lim \int_I f_n \\ \int_I \sum u_n = \sum \int_I u_n \end{array}\right.$$

I Convergence Bornée

On admet le :

Th Soit $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. On suppose que (f_n) CVS vers 0

$\exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in[a,b] : |f_n(x)| \leq M$

Alors $\int_{\underset{[a,b]}{\overset{\shortparallel}{I}}} f_n \longrightarrow 0$

⚠ Faux sans bornitude

$f_n(x) = n^2 \cdot x^n (1-x)$ sur $[0,1]$

par comparaison des ordres de grandeur $f_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $[0,1]$

$\int_0^1 f_n = n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \longrightarrow 1$

Soit $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ tq $\left|\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{CVS} f \text{ CPM sur } [a,b] \\ f_n \text{ est unif}^t \text{ bornée} \end{array}\right.$

alors $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$

D/ $|f_n - f| \xrightarrow[CVS]{} 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq M + \|f\|_\infty$

Avec le th $\int_a^b |f - f_n| \longrightarrow 0$, a fortiori $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \longrightarrow 0$

Ex ① Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$ $f_n(t) = \sin^n(t)$ ~~dt~~ | $\forall n\ |f_n| \leq 1$

$f_n \xrightarrow{CVS} f$ | 0 sin(
| 1 si

par CV bornée, $I_n \to 0$

$$\begin{cases} nI_{n-1}I_n = \pi/2 \\ nI_n^2 \to \pi/2 \\ I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \end{cases}$$

② Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$

$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$

$J_n = \int_0^1 f(t^n)\,dt$

$f_n(t) = t^n f(t) \xrightarrow{CVS} \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) \text{ si } t = 1 \end{cases}$ de plus $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0,1]\ |t^n f(t)| \leq \|f\|_\infty$

Convergence bornée : $I_n \to 0$

* $f(t^n) \to \begin{cases} f(0) \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) \text{ si } t = 1 \end{cases}$ et $|f(t^n)| \leq \|f\|_\infty$

(CVB) donc $J_n \to f(0)$

Ex ① Thm de Cantor (fondamental)

Soit $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$

On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$ tq

$u_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $[\alpha, \beta]$

Alors $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$

S/ (Lebesgue) On note $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ | on veut mq $\rho_n \to 0$ (?)

On écrit $u_n(x) = \rho_n \cos(nx - \varphi_n)$

Supposons $\rho_n \not\to 0$: il existe $\mu > 0$ et $n_k \nearrow +\infty$ tq

$\forall k \in \mathbb{N}\ \rho_{n_k} \geq \mu$. Alors, pour tout k $\frac{|u_{n_k}|}{\mu} \geq \left|\frac{u_{n_k}}{\rho_{n_k}}\right| = |\cos(n_k x -$

8 →

ainsi $[\psi_n = \psi_{n_k}]$ $\underbrace{|\cos(n_k x - \psi_k)|}_{\text{borné par } 1}$ CVS vers 0 sur $[\alpha, \beta]$

Par CVB sur $[\alpha, \beta]$

$$\hookrightarrow \int_\alpha^\beta |\cos(n_k x - \psi_k)|\, dx \longrightarrow 0$$

$$\int_\alpha^\beta |\cos(n_k x - \psi_k)|\, dx \geqslant \int_\alpha^\beta \cos^2(n_k x - \psi_k)\, dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2n_k x - \psi_k)\right)$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \to \frac{\beta-\alpha}{2}$$

absurde

II Convergence dominée

Th : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

On suppose

(H) ① (f_n) CVS vers $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$

② Domination $\exists \varphi \in L^1(I)\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi$

Alors les f_n, ainsi que f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$$

D/ * Par CVS il vient $|f| \leqslant \varphi$ la comparaison donne $f_n \in L^1(I)$, $f \in L^1(I)$

** Soit $\varepsilon > 0$ $I =]-\infty, +\infty[$ par ex.

Comme $\varphi \in L^1(I)$ il existe $A > 0$ tq $\int_{-\infty}^{-A} \varphi + \int_A^{+\infty} \varphi \leqslant \varepsilon$

De là il résulte $\left\{ \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{|t| \geqslant A} |f_n(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \right.$

$$\int_{|t| \geqslant A} |f(t)|\, dt \leqslant \varepsilon$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\right| \leq \int_{|t|\geq A} (|f_n|+|f|) + \int_{-A}^{A} |f_n - f| \leq 2\varepsilon + \int_{-A}^{A} |f_n - f|$$

Or $|f_n - f| \xrightarrow{CVS} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2\varphi \leq 2\|\varphi\|_\infty$ $[-A$

La CVB s'applique : $\int_{-A}^{A} |f - f_n| \longrightarrow 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_{-A}^{A} |f - f_n| \leq \varepsilon$ et donc

$\forall n \geq N \int_{-\infty}^{+\infty} |f - f_n| \leq 3\varepsilon$ ✓

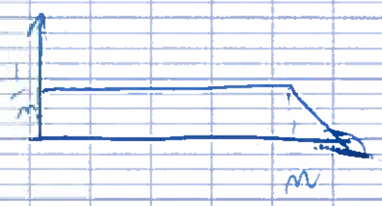
RM Si f_n CVU vers f sur tout compact, on peut se passer de la CVB

RM: Si I est fermé, les constantes sont intégrables sur I, la $\overset{\text{domin}}{\text{CVD}}$ donne la CVD

⚠ L'hypothèse de domination est essentielle.

i) $I = \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$

$f_n \xrightarrow{CVU} 0$ mais $\forall n \geq 1$ $\int_0^{+\infty} f_n = 1$

ii) 

$f_n \geq 0$, $f_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $\mathbb{R}^+$

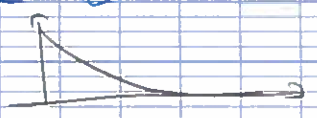
et $\int_0^{+\infty} f_n \longrightarrow 1$

Ex Calcul de l'intégrale de Gauss.

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

On se place sur $\mathbb{R}^+$: $I = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \chi_{[0,\sqrt{n}]}(x)$



1) pour $n > x^2$: $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(\overset{f_n}{1} - \frac{x^2}{n}\right)\right) \xrightarrow[CVS]{} e^{-x^2}$

② Domination : $\forall t\ 1-t \leq e^{-t}$

$\forall n \geq 1, \forall t \in [0, n]$, $1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}$

donc $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$

$\forall x \in [0, \sqrt{n}]$ $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$

càd $0 \leq f_n \leq f$

où $f : x \longmapsto e^{-x^2}$

donc le CVDom s'applique $\int_0^{+\infty} f_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \underset{\uparrow}{=} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt \overset{\text{Wallis}}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

$x = \sqrt{n}\cos t$

$dx = -\sqrt{n}\sin t\, dt$

$\longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(CC) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dt \underset{\text{CVD}}{=} \lim I_n = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

__Ex :__ $I_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2n}$

$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ $0 \leq x \leq n$ $f_n(x) = 0$ si $x > n$

① CNS $f_n(x) \xrightarrow{\text{CVS}} e^{-x}$ ② $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = e^x$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$

Le CVD s'applique $I_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$

Application à la recherche d'équivalent (HP)

Idée : chgt de variable (+ découpe..)

① Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f(1)\neq 0$. Équivalent de $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,dt$

S/ On pose $u=t^n$ ie $t=u^{1/n}$ ie $\in]0,1]$

$dt=\frac{u^{1/n-1}}{n}\,du$ $\quad I_n=\int_0^1 \frac{1}{u} f(u^{1/n})\frac{u^{1/n-1}}{n}\,d$

$I_n=\int_0^1 f(u^{1/n})u^{1/n}\,du$

posons $f_n(u)=f(u^{1/n})u^{1/n}$: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall u\in]0,1]$ $|f_n(u)|\leq\|f\|_\infty=C$

int sur $]0,1]$

et $f_n(u)\xrightarrow[]0,1]]{CVS} f(1)$, on applique le CVD : $\int_0^1 t^n f(t)\,dt \sim \frac{f(1)}{n}$

~~On applique le CVD $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim I_n=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$~~

Ex : $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^4)^n}$, Nature de $\frac{I_n}{n^\alpha}$, $\alpha>0$

On pose $t=\frac{u}{\sqrt[4]{n}}$, $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{u^4}{n}\right)^n}\cdot\frac{du}{\sqrt[4]{n}}$

On sait $\left(1+\frac{u^4}{n}\right)^n\to e^{u^4}$; $\left(1+\frac{u^4}{n}\right)^n\leq e^{u^4}$ et $\left|\begin{array}{l}\left(1+\frac{u^4}{n}\right)^n\geq 1+u \\ \left(1+\frac{u^4}{n}\right)^{-n}\leq\frac{1}{1+}\end{array}\right.$

par CVD $\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^4}{n}\right)^n}\longrightarrow\int_0^{+\infty}e^{-u^4}\,du$

$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}v^{1/4-1}e^{-v}\,dv$

$v^{-1/4}=u$ $\quad=\frac{1}{4}\Gamma(1/4)$

$\frac{1}{4}v^{-1/4-2}\,dv=du$

$\left(\Gamma(\lambda)=\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt\right)$

Recto

Bref $I_n \sim \frac{\Gamma(1/4)}{4 n^{1/4}}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt = I_{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{t.t^3}{(1+t^4)^{n+1}} dt \underset{\overset{\uparrow}{IPP}}{=} I_{n+1} + \frac{1}{\cancel{n+1}\,4n} I_n$$

IPP

$g = \frac{1}{(1+t^4)^n}$

$dg = \frac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}$

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n} \quad \Big| \quad \log I_{n+1} - \log I_n = -\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

DL

On somme correctement (DV + signe Cst)

$$\log I_n = -\frac{H_n}{4} + \underbrace{\alpha_n}_{CV} = -\frac{1}{4}\log n + \beta_n \;/\; CV$$

$$I_n \sim \frac{C}{\sqrt[4]{n}}$$

○ **Ex:** (Lundi) soit $\alpha > 0$, $I_n = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n dt$. donner un équivalent de I_n $\left(1 - t^\alpha \longrightarrow t^\alpha = \frac{u}{n}\right)$

III Convergence monotone (HP)

Th: Soit $f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, positives. On suppose de plus que f_n croît vers $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$ (aussi $f \geq 0$)

Alors $f \in L^1(I)$ $\Updownarrow$ la suite $\int_I f_n$ est majorée) Dans ce cas $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$

D/ $\Downarrow$ Si $f \in L^1(I)$ avec $\varphi = f$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n \leq \varphi$ et $\varphi \in L^1(I)$, la CVD s'applique $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$

$\Uparrow$ Soit $[a,b] \subset I$, sur $[a,b]$ la fonction CPM est majorée par $M \geq 0$; de là $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [a,b]$ $0 \leq f_n(x) \leq f(x) \leq$ mettons

La CVB s'applique sur $[a,b]$: $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$, de là :

$\int_a^b f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n < +\infty$: f est intégrable ✓

<u>RM</u> $\int R(e^x)\,dx \underset{\substack{u=e^x \\ du=e^x dx \\ dx=\frac{du}{u}}}{=} \int \frac{R(u)}{u}\,du$: on se ramène à une frac rationnelle

$I_n = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n\,dt$, $\alpha>0$, on pose : $t^\alpha = \frac{u}{n}$ $t = \frac{u^{1/\alpha}}{n^{1/\alpha}}$, $dt = \frac{u^{1/\alpha - 1}}{\alpha n^{1/\alpha}}$

$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \frac{u^{1/\alpha - 1}}{\alpha n^{1/\alpha}}\,du$ $\frac{1}{\alpha}-1 > -1$ int en 0^+

$0 \leq \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$ sur $[0,n]$

donc la fonction intégrable φ $u \longrightarrow u^{1/\alpha - 1} e^{-u}$ $(u>0)$ domine toutes les fonctions f_n $u \longrightarrow \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{1/\alpha - 1} \chi_{[0,n]}$

$\boxed{\text{CVD}}$ $\alpha n^{1/\alpha} I_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} u^{1/\alpha - 1} e^{-u}\,du = \Gamma(1/\alpha)$

donc $I_n \sim \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha n^{1/\alpha}}$ ✓ (tout repose sur le bon chgt de

$\sum\int \Leftrightarrow \int\sum$ IV Interversion d'une série et d'une intégrale BEPPO LEVI

<u>Th</u> : Soient I un intvle $\mathbb{R}$, $u_n \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $\sum u_n$ converge de somme U CPM $I \to \mathbb{R}$

Si la série de t.g. $\int_I \underset{\Delta}{|u_n|}$ converge. U est intégrable et l'on a $\int_I U = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$.

D/ on note $V_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, V_n croissante et $\lim_{n\to+\infty} V_n(x) \overset{\in\overline{\mathbb{R}}}{\geq} |U(x)|$

Soit $h_n = \inf(|U|, V_n)$ CPM

La suite h_n croit vers $|U|$, et l'on a correctement

$\forall n \in \mathbb{N}$ $h_n \leq V_n$, donc h_n est int et $\int_I h_n \leq \int_I V_n \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|}_{FIN}$

CV monotone $|U|$ est intégrable, De plus $\int_I |U| = \lim_{n\to+\infty} \int_I h_n \leq C$

(Fatou)

MATA!!

FIN: $\left|\int_I U - \int_I \sum_{k=0}^{N} u_k\right| = \left|\int_I \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k\right|$ avec la méthode précédente

$$\left|\int_I \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} \int_I |u_k|}_{\to 0 \text{ si } N\to+\infty}$$ (on commence à $N+1$ au lieu de 0)

RMQ: Si les u_n sont ≥ 0 et U intégrable, la CVD suffit
En effet $U_n \nearrow \underbrace{U}_{\varphi}$ int

Ex: Calculer [illegible] $I = \int_0^1 \underbrace{\log x \log(1-x)}_{f(x)} dx$

S/ f est int sur $[0,1]$ $f(x) \xrightarrow[0^+]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[1]{} 0$

On a (DSE) $\forall x \in]0,1[$ $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n} \log x$

~~On a (DSE) $\forall k \in]0,1[$~~ CVD car $u_n \geq 0$, on regarde

$$I_n = \int_I \left| -\frac{x^n}{n} \log x \right| dx - \frac{1}{n}\int_0^1 x^n \log x \, dx$$

$$I_1 = -\int_0^1 x \log x \, dx = -\left(\left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x \, dx \right)$$

$$n \geq 1 : \quad -n I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \overset{= 1/4}{\log x} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \, dx \right] = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2}$$

$N \to +\infty : \quad 2 - \pi^2/6$

Ex : Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

On suppose $\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi t x} dt = 0$

S/ On suppose non nulle hors de $[-a, a]$:

il vient $\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \frac{(-2i\pi t x)^n}{n!} dt = 0$

Deux façons d'intervertir à x fixé $\nearrow$ CVN sur un compact

$\searrow$ B L $\quad I_n = \int_{-a}^{a} |f(t)| \, \frac{|2i\pi}{} dt$

$I_n = \int_{-a}^{a} f(t) \frac{(-2i\pi t x)^n}{n!}$

$0 \leq I_n \leq \|f\|_\infty |x|^n \frac{(2\pi a)^n}{n!}$ Série CV.

donc, correctement : $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2i\pi x)^n \int_{-a}^{a} f(t) t^n dt$

2/ Série entière CV sur $\mathbb{R}$ de somme nulle

BL : le thm énoncé au début | Revoir Weierstrass trigo //

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{(2i\pi)^n}{n!}\underbrace{\int_{-a}^{a} t^n f(t)\,dt = 0}_{\text{théorème Weierstrass}}$$

Moments $f \equiv 0$

Ex : (Borel) Soit $a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on suppose que $\sum |a_n|$ CV

Mq $f : x \to \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right) e^{-x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et que

f est intégrable avec $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

S/ Sur $[0, M]$, il vient $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in[0,M]$, $\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| e^{-x} \leq \frac{|a_n| M^n}{n!}$

Serie CV : il y a CVN sur les segments de $\mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}^+$ $\int_I |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!} \underbrace{x^n e^{-x}}_{O\left(\frac{1}{x^2}\right)} dx = |a_n|$ (intég fondamentale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$)

$\rightarrow \sum |a_n|$ CV

BL : $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

BL ~~Σ~~ ne s'applique pas

Ex : Soit $a_n > 0$, $a_n \nearrow +\infty$. On introduit f définie pour $x>0$.

Pour $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ Mq $f \in \mathcal{C}(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

puis que $\int_0^{+\infty} f$ CV et la calculer

Soit $\alpha>0$ $\forall x\in[\alpha,+\infty[$

S/ $\sum (-1)^n e^{-a_n x}$ est alternée car $e^{-a_n x} \searrow 0$

$|R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1}x} \leq e^{-a_{n+1}\alpha} \longrightarrow 0$ unif

$\int_I |u_n| = \int_0^{+\infty} e^{-a_n x} = \frac{1}{a_n}$ éventuellement DV ✓

Puis on écrit $\forall x > 0$ $|f(x)| \leq e^{-a_0 x}$ (Leibniz) donc $f \in L^1(]0,+$

et $\left| \int_0^{+\infty} f - \int_I \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-a_n x} \right| = \left| \int_0^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}}_{g(x),\ |g(x)| \leq e^{-a_{N+1} x}} dx \right|$

soit $\left| \int_0^{+\infty} f - \int_I \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a_n} \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-a_{N+1} x} dx \leq \frac{1}{a_{N+1}} \longrightarrow 0$

y^n

⚠ Séries alternées $\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}} = \pi/4$ Calculs avec

Compléments : Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}^+)$ tq $f(0) = 1$, $f \downarrow$ ($\searrow$)

Etudier $I_n = \int_0^1 f(t)^n dt$ lorsque $\begin{cases} i) & -f'(0) = \lambda \in]0,1[\\ ii) & f'(0) = 0, f''(0) = -\mu < 0 \end{cases}$

S/ Obs soit $\alpha > 0$ il vient $\forall t \in [\alpha, 1]$, $0 \leq f(t)^n \leq k^n$

où $k = f(\alpha) < 1$, $k \geq 0$

de là $\int_\alpha^1 f(t)^n dt = O(k^n)$, $k \in [0, 1[$

i) On a au voiso : $f(t) = 1 - \overbrace{\lambda t + o(t)}^{t(-\lambda + \varepsilon(t))}$. on choisit $\alpha \in]0,1[$

$\forall t \in [0, \alpha]$, $f(t) \leq 1 - \frac{\lambda}{2} t$

$J_n = \int_0^\alpha f^n(t)\, dt$ changement de variable $t = \frac{u}{n}$, $u \in [0, n$

~~$J_n = \int_0^\alpha$~~

si $u \in [0,n]$ $f^n\left(\frac{u}{n}\right) = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{u}{n}\left(\lambda + \varepsilon\left(\frac{u}{n}\right)\right)\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVS DOM}} \exp(-\lambda u)$

si $u \in [0, n\alpha]$ $f^n\left(\frac{u}{n}\right) \le \left(1 - \frac{\lambda u}{2n}\right)^n \le e^{-\frac{\lambda}{2} u}$ u fixé

Bref : $J_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\alpha} f\left(\frac{u}{n}\right) du$ avec $f^n\left(\frac{u}{n}\right) \le e^{-\lambda u/2}$ intégrable

La CVD s'applique en prolongeant $f^n(u/n)$ par 0 pour $u > n\alpha$

$$n J_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda}$$

Bilan : $n I_n = n J_n + n \underbrace{\left(\int_\alpha^1 f^n\right)}_{o(k^n) \to 0} \longrightarrow \frac{1}{\lambda}$

donc $I_n \sim \frac{1}{n\lambda}$

⚠ demandé que Δ^2 et non pas $\mathcal{C}^2$

(ii) De même $f(t) \underset{\text{TY}}{=} 1 - \frac{\mu t^2}{2} + o(t^2)$. Il existe $\alpha > 0$ tq

$\forall t \in [0,\alpha]$, $0 \le f(t) \le 1 - \mu/4\, t^2$ (Ex plus)

On pose $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$ $f^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{u^2 \mu}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$$\longrightarrow e^{-\mu/2\, u^2}$$

Si $t \in [0,\alpha]$, $u \in [0, \sqrt{n}\alpha]$, il vient

$$0 \le f^n\left(\frac{u}{n}\right) \le \left(1 - \frac{\mu u^2}{4n}\right)^n \le e^{-\mu/4\, u^2} \text{ intégrable}$$

On prolonge $f^n\left(\frac{u}{n}\right)$ par 0 au delà de $\sqrt{n}\alpha$ pour appliquer la CVD

$$\sqrt{n} J_n = \sqrt{n}\int_0^{\alpha_n} f(t)dt = \int_0^{\sqrt{n}\alpha_n} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) du \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\mu/2\, u^2} du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\nu}{2}}}$$

$$\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{n}\int_0^{\alpha_n} g^n + \sqrt{n}\, O(k^n) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}$$

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu n}}$$

Application : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ $\boxed{\nu = 1}$ $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

→ Gauss

→ Stirling