⑦

Réduction d'endomorphisme

Préambule : Somme directe et bases adaptées

Données : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$-ev

$F_1, \dots, F_n$ sont des sev de E

$$j\begin{pmatrix} F_1 \times \dots \times F_n \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} j$ est la somme des F_j qui est dite directe lorsque j est injective

On suppose : E est de dim finie

① $\dim F_1 \times \dots \times F_n = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$

D/ IS de prouver que pour $n=2$ $(e_1, \dots, e_m)$ base de F_1

$(f_1, \dots, f_n)$ base de F_2

Alors $((e_1,0), \dots, (e_m,0), (f_1,0), \dots, (f_n,0))$ est une base de $F_1 \times F_2$

② Si les F_j sont en somme directe, $\dim\left(\bigoplus_1^n F_j\right) = \sum_1^n \dim F_j$

D/ avec ① car j est un isomorphisme

③ Recollement | Si les F_j sont en somme directe

| Si β_j est une base de F_j, $j = 1 \dots n$

$\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$ est une base de $\bigoplus_{j=1 \dots n} F_j$

D/ $\operatorname{Vect}(\beta_1 \cup \dots \cup \beta_n) = \operatorname{Vect}(\beta_1) + \dots + \operatorname{Vect}(\beta_n) = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$

β est un système générateur de $\bigoplus_1^n F_j$, or la longueur de β est $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|$

$= \sum_{j=1}^{n} \dim F_j = \dim \bigoplus_1^n F_j$

Objectifs : Soit E un $\mathbb{K}$-ev df, $u \in \mathcal{L}(E)$, on veut trouver des bases β de E

↳ $[u]_\beta = A$ soit simple

$\mathbb{K} = \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, u nil : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J$

8

où $[u]_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$, J_k bloc de Jordan

$\mathbb{K}$ qque : $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ Compagnon où $[u]_\beta \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_s \end{pmatrix}$

Matrices : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}$ ....

On se contente de trigonaliser $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, d'obtenir des matrices bloc

I Stabilité

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Déf : Un sev F de E est dit stable par u lorsque $\forall x \in E, x \in F \Rightarrow u(x) \in F$
i.e. $u(F) \subset F$

invariant : $u(F) = F$, cache $u \in G$ sg de $GL(E)$ fixe $\forall x \in F\ u(x) = x$

Ex $\{0\}$, $\mathrm{Ker}\, u^k$, $\mathrm{Im}\, u^k$, $k \in \mathbb{N}$ ...

Prop : 1) Si F et G sont stables par u alors $F+G$ et $F \cap G$ aussi...
2) Si F est de dim F stable par u et $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$, alors $u(F) = F$

D/ On pose $\tilde{u} = u|_F^F$, $\mathrm{Ker}\, \tilde{u} = \{0\}$, on applique le th du rang

3) u est une homotétie $\Leftrightarrow$ tout sev de E est stable par u

$\Rightarrow$ clair $\Leftarrow$ Lemme de Schur

Stabilité et commutation (baby)

|| Si u et v commutent, v laisse $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ stables
plus généralement : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\, P(u)$ et $\mathrm{Im}\, P(u)$ sont sont stables par v

D/ Soit $y = u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ il vient $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}\, u$
Si $P \in \mathbb{K}[X]$, de $v \circ u = u \circ v$ on déduit $\forall k \in \mathbb{N}$ $u^k \circ v = v \circ u^k$ ... $P(u)$ commute avec v

⚠ Pas de réciproque

③ Représentations matricielles : (DF)

1) Soient F un sev de E, β_1 base de F, $\beta_1 \cup \beta_2$ base de E
$u \in \mathcal{L}(E)$; $p = \dim F = |\beta_1|$

Alors u laisse stable F $\Leftrightarrow [u]_\beta = \begin{array}{c|cc} & F & \\ \hline F & A & C \\ & 0 & B \end{array}$ $B, A \in M_p(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ Si $e \in \beta$, $u(e) \in F = \text{Vect}(\beta_1)$ OK

$\Leftarrow$ $\forall e \in \beta$, $u(e) \in \text{Vect}(\beta_1)$ donc par CL $u(F) \subset F$

Dans ce cas on peut calculer $[u^k]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} A^k & C_k \\ \hline 0 & B^k \end{array}\right)$ $[P(u)]_\beta = \begin{pmatrix} P(A) & C_p \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$

2) On suppose $E = \bigoplus_{j=1}^{n} F_j$, F_j stable par u, β_j base de F_j, $j = 1 \dots n$
$\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$ alors $[u]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$ $A_i \in M_{\dim F_i}(\mathbb{K})$
$A_i = [u|_{F_i}^{F_i}]_{\beta_i}$

D/Clair / Si $P \in \mathbb{K}[X]$: $[P(u)]_\beta = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_n) \end{pmatrix}$

II Éléments propres

Déf Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $x \in E$ est appelé vecteur propre de u lorsque $\boxed{x \neq 0}$ (ne pas oublier) et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $u(x) = \lambda x$

Un tel scalaire λ est unique et est appelée valeur propre de u attachée à x

Aussi : λ est une v.p de $u \Leftrightarrow \text{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$

Voc $E_{\lambda,u} = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ est dans ce cas appelé espace propre de u pour λ

Props : 1) Soit $x \in E \setminus \{0\}$: x est un $\vec{v}p$ de $u \Leftrightarrow$ la droite $\mathbb{K}x$ est stable par u
2) $u|_{E_{\lambda,u}}^{E_{\lambda,u}} = \lambda Id_{E_{\lambda,u}}$ commute avec tout élément de $\mathcal{L}(E_{\lambda,u})$

(10) <u>Prop</u> : On suppose E de dim finie, $E \neq \{0\}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Alors u possède au moins 1 valeur propre

D/ Soit β une base de E : λ est une v.p de $u \Leftrightarrow Ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow det([u]_\beta - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + \dots$$

Celle-ci est une équation polynomiale de degré n possédant au moins 1 racine complexe.

<u>Ex</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; existe-t-il alors $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ un plan tq $P \setminus \{0\} \subset GL(\mathbb{K}^n)$

S/D $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ <u>ABS</u> $P = Vect(u, v)$ ou u et v sont inversibles

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ $det(u - \lambda v) = 0 \Leftrightarrow det(u \circ v^{-1} - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ est une vp de $u \circ v^{-1}$, Abs

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $n = 2$ $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ $det M = a^2 + b^2$

$det M = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow M = 0$

<u>Prop</u> Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tq $[u, v] = 0$, Soit λ une vp de u alors v laisse stable $Ker(u - \lambda I)$

D/ $[u, v] = 0 \Rightarrow [u - \lambda Id, v] = 0$ v laisse stable par $Ker(u - \lambda I)$

<u>Ex</u> Soit L une partie de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On dit que L est irréductible lorsque les seuls sev de E qui sont stables par tous les éléms de L sont $\{0\}$ et E, Soit $u \in Com(L)$, mq u est une homotétie

D/ Soit λ une vp de u : $u - \lambda Id$ commute avec tous les éléms de L donc $Ker(u - \lambda Id) \neq 0$ est stable par tous les éléms de L et donc

$Ker(u - \lambda Id) = E$

<u>Prop</u> : (I) Soit $(E, \| \|)$ un EVN, et $u \in \mathcal{L}_c(E)$, pour toute vp λ de u

on a $\boxed{|\lambda| \leq |||u|||}$ fondamental

D/ Soit x un $\vec{v}p$ de u pour λ : $u(x) = \lambda x$

de là $|\lambda| \|x\| = \|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$, or $x \neq 0$ et donc $|\lambda| \leq |||u|||$

(11) RM : Si F est stable par u et si $v = u|_F$, $Ker(v - \lambda Id) = Ker(u - \lambda Id) \cap F$

$\longrightarrow$ SE propre sur les sev stable.

III Endomorphisme et matrices diagonalisables :

Déf : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable (DZ) lorsque E est somme des espaces propres de u

Lemme : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des Vp 2 à 2 distincts de u, $x_1, \dots, x_p$ des $\vec{vp}$ de u attachés resp à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre

D/ Réc sur p : $p = 1$, $x_1 \neq 0$

on écrit une CL : $\mu_1 x_1 + \dots + \mu_p x_p = 0$ (1)

donc $\lambda_1 \mu_1 x_1 + \dots + \lambda_p \mu_p x_p = 0$ (2)

(1) $\times \lambda_p$ − (2) $\rightarrow \mu_1(\lambda_p - \lambda_1)x_1 + \dots + \mu_{p-1}(\lambda_p - \lambda_{p-1})x_{p-1} = 0$

Réc | $(\lambda_p - \lambda_k)\mu_k \Rightarrow$ or

Appl : ① Mq la famille $f_\alpha \begin{pmatrix}]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\\ x \longmapsto x^\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est libre

S/ Soit $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
$f \longmapsto x f'$, f_α est une vp de u

② Idem $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{\lambda x} \end{pmatrix}$ idem

Th On suppose E de dim finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les props suivantes sont équivalentes

① u est DZ / ② Il existe une base de E formée de VP / ③ $\exists B \in E : [u]_B$ est diagonale

④ $\sum \dim(\text{espaces propres}) = \dim E$

D/ ① ⇒ ② recollement de base
① ⇐⇒ ④ clair
② ⇒ ③ on regarde la base β précédente $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(3) ⇒ (2) les vecteurs de β sont des vp donc l'espace engendré par les vp contient E

CPI : $m = \dim E$, Si u possède n vp distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors u est DZ et $\forall i$ $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$

pour trouver le Ker on regarde les 0 sur la diago

I) $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$. si $x = \sum_{i=1}^{m} t_i e_i$, $u(x) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i e_i$

donc $x \in \operatorname{Ker} u \iff \forall i, t_i \mu_i = 0 \iff \forall i, t_i = 0$ si $\mu_i \neq 0$

$\iff x \in \operatorname{Vect}(e_i \mid \mu_i = 0)$

$y \in \operatorname{Im} u$: $y = u(x) = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i e_i = \sum_{\{i \mid \mu_i \neq 0\}} t_i \mu_i e_i$

$y \in \operatorname{Im} u \iff y \in \operatorname{Vect}(e_i \mid \mu_i \neq 0)$

--- $E_\lambda = \operatorname{Vect}(e_i, \mu_i = \lambda)$

Conjugaison : On suppose $v = \omega \circ u \circ \omega^{-1}$

1) λ est une vp de $u \iff \lambda$ est une vp de v
dans ce cas $E_{\lambda, v} = \omega(E_{\lambda, u})$

D/ i) clair ii) $x \in E_{\lambda, v} \iff v(x) = \lambda x \iff$ ~~$\omega \circ u \circ \omega^{-1} - \lambda x$~~
$\omega(u($

12

$u(x) = \lambda x$ — $v(a(x)) = \lambda\, v(x)$
$u(v(x)) = \lambda v(x)$

i) $u(x) = \lambda x \iff a \circ u \circ a^{-1}(u(x)) = \lambda a(x) \iff v(u(x)) = \lambda a(x)$
de plus $x \neq 0 \iff a(x) \neq 0$

2) v est diagonalisable ssi u est diago

D/ $\bigoplus E_{\lambda,u} = E \iff \bigoplus a(E_{\lambda,u}) = E \iff \bigoplus_{\lambda\, vp\, de\, u} E_{\lambda,v} = E$

Ex ①: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ possédant n vp distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$: Mq v est diago et v est un polynôme en u

i) e_i vp $\Rightarrow v(e_i)\ \vec{vp}$ avec même coef $\Rightarrow e_i$ et $v(e_i)$ sont dans le même espace propre donc e_i est sont ds Ker v soit une vp, OK

ii) Lagrange ... matrices

② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ DZ :

MQ 1) $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $u \iff v$ laisse les espaces propres de u stables

2) Calculer dim $\mathrm{Com}\, u$

1) voir ce qui précède

2) $[v_B]_B =$ $\begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \ddots \ \square \end{pmatrix}$ $\}E_{u,\lambda_1}$ ... $\}E_{u,\lambda_r}$ $\dim \mathrm{Com}\, u = \sum \dim \mathcal{L}(E_{u,\lambda_i})$
$= \sum (\dim E_{u,\lambda_i})^2$

③ Diagonalisation simultanée (codiagonalisation)

VI important : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ DZ. Alors $u \circ v = v \circ u \iff \exists B$ base dont ($[u]_B$ et $[v]_B$ sont diagonales)

⇑ 1/2 page ⇓ plus tard ...

Matrices diagonalisables

Th : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ Les props suivantes sont équivalentes

(1) $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ $\exists \Delta$ diagonale $P^{-1}AP = \Delta$

(2) $f_A \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{pmatrix}$ est DZ

(3) $\exists u \in \mathcal{L}(E)$ $\exists \beta$ base de E u DZ et $[u]_\beta = A$

(4) $(\forall u \in \mathcal{L}(E))(\forall \beta$ base de $E)([u]_\beta = A \Rightarrow u$ DZ$)$

D/ (1) ⇒ (2) Soit β la base de E formée par les colonnes de P

On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1 C_1, \lambda C_n]$

donc $[AC_1, \dots, AC_n] = [\lambda_1 C_1, \dots, \lambda_n C_n]$ | $AC_i = \lambda_i C_i$

f_A possède la base de $\vec{V_p}$ $C_1 \dots C_n$

(2) ⇒ (3) clair

(3) ⇒ (1) Changement de base soit β' une base de DZ de u et soit $P = [\beta']_\beta$ il vient $[u]_{\beta'} = P^{-1}AP = \Delta$ Diagonale

(1) ⇐ (4) exo pro

Voc On dit que A est diagonalisable

IV Action des Polynômes

A) Rappels

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, lorsque $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, on pose

$\phi(P) = a_0 Id + a_1 u + \dots + a_d u^d$ $(P(u)(0) = 0)$

$$\phi \begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longrightarrow P(u) \end{pmatrix}$$ est un morphisme d'algèbre unitaire

Si E est DF $\mathrm{Ker}\,\phi \underset{not}{=} I_u \neq \{0\}$ (sinon ...)

le générateur normalisé de I_u est appelé polynôme minimal de u not μ_u.

2) Idem pour les matrices ① $\forall F \in \mathbb{K}[X]$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$

$F(P^{-1}AP) = P^{-1}F(A)P$

: (ça marche pour les puissances donc pour les polynômes)

<u>Voc</u> : Un él P de I_u est appelé un polynôme annulateur de u

<u>Prop</u> : Soit x un vp de u pour la VP λ

1) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda).x$

2) Si $P \in I_u$, $P(\lambda) = 0$

D/ 1) clair

$\boxed{\text{NE PAS OUBLIER}}$ AAAA!

2) On a $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$

Réciproque de 2 fausse $(X-1)(X-2)$ annule Id

3) Si $\mu_u(\lambda) = 0$, λ est une vp de u

D/ On écrit $\mu_u(X) = (X-\lambda)Q(X)$ où $Q \notin I_u$ (Sinon ...)

$0 = (u - \lambda Id) \circ Q(u)$ avec $Q(u) \neq 0$

donc $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id) \neq 0$ ....

Ex p proj $\neq 0, Id$ $\mu_p = X^2 - X$

Ex (car $\mathbb{K} \neq 2$) $u \in \mathcal{L}(E)$ $u \circ u = I$, $u \notin \{-I, I\}$

$\mu_u = X^2 - 1$ | $X^2 - 1$ annule u mais pas $X - 1$ et $X + 1$

B) Décomposition des noyaux (E de dim qqe $\rightarrow$ EDL cc)

Th Soient $P_1, \dots, P_r$ des élts de $\mathbb{K}[X]$ 2 à 2 ~~distincts~~ premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_r)(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$

D/ Récurrence sur $r \geq 2$

Obs Si $P_1(u)(x) = 0$ alors $\underbrace{P_1 P_2(u)}_{P_2 P_1(u)}(x) = 0$

donc ~~$\operatorname{Ker} P_1 P$~~ $\operatorname{Ker} P_1(u) \subset \operatorname{Ker} P_2 P_1(u)$, idem pour $P_2(u)$

Clé Bézout Hyp $P_1 \wedge P_2 = 1$, donc $\exists (U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$$

On applique à u: $U_1(u) \circ P_1(u) + U_2(u) \circ P_2(u) = Id$

Si $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u)$, $U_1(u) \circ P_1(u)(x) + U_2(u) \circ P_2(u)(x) = x$

$x = 0$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1 P_2)(u)$ Notons $\begin{cases} x_1 = U_2(u) \circ P_2(u)(x) \\ x_2 = U_1(u) \circ P_1(u)(x) \end{cases}$ avec (*) $x_1 + x_2 = x$

$P_1(u)(x_1) = P_1(u) \circ U_2(u) \circ P_2(u)(x)$ | $x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$

$= U_2(u) \circ (P_1 P_2(u))(x) = 0$ | $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$

$\mathrm{Ker}(P_1P_2)(u) = \mathrm{Ker}\,P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\,P_2(u)$

FIN de la récurrence

$n \geq 3$ $P_1 \dots P_{n-1} \wedge P_n = 1$ par hyp $P_i \wedge P_j = 1$ si $i \neq j$

Donc avec le cas précédent

$$\mathrm{Ker}(P_1 \dots P_{n-1}P_n)(u) = \underbrace{\mathrm{Ker}\,P_1 \dots P_{n-1}(u)}_{\bigoplus_{1}^{n-1} \mathrm{Ker}\,P_i(u)} \oplus \mathrm{Ker}\,P_n(u)$$

$$= \bigoplus_{1}^{n} \mathrm{Ker}\,P_i(u)$$

<u>Th</u> (DF) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Alors

u est DZ

$\Leftrightarrow$ u est annulé par un polynôme scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ μ_u est scindé à racines simples

D/ $\cdot$ si u est DZ $E = \bigoplus_{1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id)$ λ_i 2 à 2 $\neq$

Si $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, on a $\forall i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ donc $X - \lambda_i \wedge X - \lambda_j = 1$

Avec le TDN $\left| \mathrm{Ker}\,P(u) = \bigoplus_{1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id) = E \right.$
$P(u) = 0$

$*$ $*$ si P disso annule u, on a $\mu_u \mid P$ donc μ_u est disso

$***$ écrivons $\mu_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ avec le TDN

$$E = \mathrm{Ker}\,\mu_u(u) = \bigoplus_{1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id)$$

<u>Ex</u> (I) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A^m = I$ alors $X^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(X - \zeta^k)$ annule A, qui est donc DZ

/

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

A est DZ

$\exists P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tq $P(A)=0$

μ_A est SARS

Prop (Refaire) soit $u \in \mathcal{L}(E)$, si u est DZ et si F est un sev de E stable par u, $v = u|_F$ est DZ ($\mathrm{Ker}(u - \lambda Id) = \mathrm{Ker}(u - \lambda u) \cap F$)

D/ Soit P divisé tq $P(u)=0$, par restriction $P(u)=0$

Compléments : projecteurs spectraux

* Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ DZ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses vp 2 à 2 $\neq$ $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ est le polynôme min de u $\begin{cases} P(u)=0 \\ \mu_u(\lambda_i) = 0 \quad i = 1 \dots n \end{cases}$ $(\mathrm{Ker}\, P(u) = \bigoplus \mathrm{Ker}(u - \lambda Id) = E$

* Prop Soient $L_1, \dots, L_n$ les interpolateurs de Lagrange attaché à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il vient $\begin{cases} L_1 + \dots + L_n = 1 \\ \text{Si } i \neq j \ P \mid L_i L_j \end{cases}$ Les deux membres sont des polynômes de degré $\leq n-1$ prenant la valeur 1 en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

On applique à u, $P_i = L_i(u)$, il vient $\begin{cases} P_1 + \dots + P_n = Id \\ P_i \circ P_j = 0 \end{cases}$

Enfin : $(X - \lambda_i) L_i$ est un multiple de P donc $(u - \lambda_i Id) \circ L_i(u) = 0$

i.e. $\mathrm{Im}\, P_i \subset E_{\lambda_i, u}$

Bilan : P_i est le proj sur $\mathrm{Im}\, p_i \,//\, \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Im}\, P_j$

$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, P_i \subset \bigoplus E_{\lambda_i, u} = E$, $\mathrm{Im}\, P_i = E_{\lambda_i, u}$

18

Ex 1) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,E)$ tq $\left| \begin{array}{l} u, v \text{ DZ} \\ u \circ v = v \circ u \end{array} \right.$ alors $\exists \beta$ base de E tq $[u]_\beta$ et $(v)_\beta$ diagonal

2) Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ tq $\left| \begin{array}{l} u_1, \dots, u_p \text{ sont DZ} \\ \forall i,j \; u_i \circ u_j = u_j \circ u_i \end{array} \right.$

Alors $\exists \beta$ base de E, $\forall i$ $[u_i]_\beta$ est diagonale

3) Généralisation en partie infinie

S/ 1) On a $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\bigoplus}} E_{\lambda_i, u}$ (u DZ), puisque $u \circ v = v \circ u$

v stabilise $E_{\lambda_1, u} \dots E_{\lambda_n, u}$

$w_i = v|_{E_{\lambda_i, u}}^{E_{\lambda_i, u}}$ est alors DZ, soit β_i une base de diago de w_i, elle

est formée de $\vec{vp}$ pour u : $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$ convient

2) Par récurrence sur p : $p = 2$ acquis

$p \geq 3$ $E = \overset{n}{\underset{1}{\bigoplus}} \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ $\left| \begin{array}{l} \text{par commutation} \\ u_2, \dots, u_p \end{array} \right.$

laissent stable $\mathrm{Ker}(u_1 - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$, l'hypothèse de récurrence donne une base de diagonalisation commune de leurs restriction.

Soit β_i : $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$ convient.

3) Soit $u_1, \dots, u_p$ une base de $\mathrm{Vect}(u_i) = F$ avec (2) $\exists \beta$ tq $[u_k]_\beta$ soit diagonale $k = 1 \dots p$, par CL $\forall v \in F$ $[v]_\beta$ est diago

Ex Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que les groupes $GL(\mathbb{C}^m)$ et $GL(\mathbb{C}^n)$ isomorphes. Mq $m = n$

S/ Soit φ un iso $GL_m(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$\det(M - XI)$ $\qquad$ $\det(M - \lambda I) = \det(0) = 0$

u, v commutent $\Leftrightarrow \varphi(u)$ et $\varphi(v)$ commutent

$$u^2 = I_m \Leftrightarrow \varphi(u)^2 = I_m$$

Pommellet: superpropriété

Soit $u_1 \dots u_p$ des involutions de $\mathbb{C}^m$ qui commutent 2 à 2, elles sont codiagonalisables $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1i} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{mi} \end{pmatrix}$ $\varepsilon_{k,i} \in \{-1, 1\}$

$p \leq 2^m$ atteint

Avec φ: $M_1 \dots M_p$ une famille maximale d'involutions qui commutent

$\Leftrightarrow \varphi(u_1) \dots \varphi(u_p)$ étant | Delà $2^m = 2^n$, $m = n$.

Exercice: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ on suppose u^2 DZ, Mq:

$$u \text{ DZ} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$$

$(\Rightarrow)$ Si $[u]_\beta = D$ diagonale: $rg(D^2) = rg(D)$ donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$

$(\Leftarrow)$ Soit $P(X) = X \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$, $(\lambda_i \neq 0)$ dissocié qui annule u^2
il vient: $P(X^2)$ annule u? ie $X^2 \prod_{i=1}^{n} (X^2 - \lambda_i)$ annule u
$\lambda_i = d_i^2$ $i = 1 \dots n$ $\{d_1, \dots, d_n, -d_1, \dots, -d_n\}$ sont 2 à 2 $\neq$

il vient donc par DN $0 = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} u^2 \oplus \operatorname{Ker}(u - d_i I d) \oplus \operatorname{Ker}(u + d_i I d)$

Si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ il vient $E = \operatorname{Ker} u \oplus \bigoplus_{i=1} \operatorname{Ker}(u - d_i I d_E) \oplus \bigoplus_{i=1} \operatorname{Ker}(u + d_i I d)$

IV Polynôme caractéristique

E est un e.v de dim finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Prop : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est vp de u $\Leftrightarrow$ $\det(u - \lambda I) = 0$

Prop : ① Si A et B sont semblables, $\det(A - XI) = \det(B - XI)$
② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Le polynôme $\det([u]_\beta - XI)$ ne dépend pas de β
On l'appelle polynôme caractéristique de u $\chi_u(X)$
variante
$\det(XI - [u]_\beta) = (-1)^n \det([u]_\beta - XI)$

dans un acu, on a tj $\det(MN) = \det M \det N$

Si A est intègre, on le vérifie dans le corps des fractions

D/ ① $B = P^{-1}AP$ $\quad \det(P^{-1}AP - XI) = \det(A - XI) \dots$
② ...

Prop Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est vp de $u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$

D/ On a $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda I)$. En effet si $A = [u]_\beta = [a_{ij}]$
$\det(A - XI) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{1\sigma(1)} - \delta_{1\sigma(1)}X) \dots (a_{n\sigma(n)} - \delta_{n\sigma(n)}X)$

⚠ Lorsque $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$, χ_u possède des zéros complexes qui ne sont pas dans $\mathbb{K}$

Calcul explicite : $\det(A - XI) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{1\sigma(1)} - \delta_{1\sigma(1)}X) \dots (a_{n\sigma(n)} - \delta_{n\sigma(n)})$

Obs : $\sigma \neq Id \Rightarrow |\{i \mid \sigma(i) \neq i\}| \geq 2$ (déc en cycles)

le terme de degré $n-1$
vient de $\sigma = Id$

$\det(A - XI) = X^n \operatorname{tr} A X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$

$(-1)^{2n} =$

$\boxed{n=2}$ $\chi_A(X) = X^2 - T_r(A)X + \det A$ ♡

$\boxed{n=3}$ $\chi_A(X) = -X^3 + T_r(A)X^2 - C_2(A)X + \det A$

$$C_2(A) = C_2(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Rq: Les coefs de χ_A sont invariants par similitude

Spectre $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ est la liste des vp de u dans $\mathbb{K}$ comptée avec leur mult dans χ_u

⚠ En général $spec_{\mathbb{K}}(u) \subsetneq spec_{\mathbb{C}}(u)$

Ex $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = A$, $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$ $\left(\text{conv} \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})\right)$

$spec(A) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$

Prop: Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le spectre de A dans $\mathbb{C}$

$T_r(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ $\quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

D/ $\det(XI - A) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = X^n - T_r(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$

Exemples: ①: Bloc de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ $\chi_{A(\lambda)} = (\lambda - X)^n$

② Matrices compagnons

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

On pose

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_{C_p} = (-1)^n P(X)$

$n=2$ $\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ $\chi_{C_p} = X^2 - \mathrm{Tr}(C_p)X + \det C_p$

$= X^2 + a_1 X + a_0$

$n \geq 3$: récurrence

$$\begin{vmatrix} -X & & & -a_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -X & -a_{n-2} \\ & & & -a_{n-1} \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & & -a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1} \\ & 1 & -a_{n-1}-X \end{vmatrix} + (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -X\left((-1)^{n-1}\left(X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1\right)\right) + (-1)^n a_0$$

$$= (-1)^n \left(X^n + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1 X + a_0\right)$$

Exercice: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ Polynôme caractéristique ~~de~~

$\Phi_A \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M \longrightarrow AM \end{pmatrix}$

Utiliser la base $(E_{11}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{nn})$

Th Soit F un sev de E stable par u ; soit $v = u|_F^F$
alors $\chi_v \mid \chi_u$

D/ Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. $[u]_{(e_i)} = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $B = [v]_{(e_1, \dots, e_p)}$

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} B - XI_p & * \\ 0 & C - XI_s \end{vmatrix} = \chi_v(X)\,\chi_C(X)$$

Pb de la diagonalisation :
Calcul de VP $\longrightarrow$ Zéros de χ_u
détermination des $E_p \longrightarrow$ SL : $(A-\lambda I)X=0$

ADZ $\Leftrightarrow$ la somme des dimension des EP est dim E

Def Soit $\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$
1) La multiplicité algébrique de λ est sa multiplicité en tant que racine χ_u : $\alpha(\lambda)$

2) La multiplicité ~~génér~~ géométrique de λ est $\dim \operatorname{Ker}(u-\lambda Id)$

Th : a) $\forall \lambda \in spec_{\mathbb{K}}(u)$, $\alpha(\lambda) \geq \beta(\lambda)$
b) uDZ $\Leftrightarrow$ χ_u scindé et $\forall \lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$, $\alpha(\lambda) = \beta(\lambda)$

D/ a) Soit $\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$. Soit $F = \operatorname{Ker}(u-\lambda Id)$, on sait que $\chi_v \mid \chi_u$ où $v = u|_F^F = \lambda Id_F$

$$\chi_v = (\lambda - X)^{\dim F} = (\lambda - X)^{\beta(\lambda)}$$

Aussi $(\lambda - X)^{\beta(\lambda)} \mid \chi_u(X)$; $\beta(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

b) $(\Rightarrow)$ Aussi Clair

$(\Leftarrow)$ On a $\dim E = \sum_{\lambda \in spec_{\mathbb{K}}(u)} \alpha(\lambda) = \sum_{\lambda \in spec} \beta(\lambda) = \sum_{\lambda \in spec} \dim(E_{\lambda,u})$

Obs : 1) Si χ_A possède n racines distincts dans $\mathbb{K}$
A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$

$\left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in spec\,A : \alpha_\lambda = \beta_\lambda = 1 \end{array} \right.$

⚠ Matrices ayant le m̂ polynômes caractéristique : $\chi_A = \chi_B$
Si A et B sont diagonalisables A et B sont semblables
En effet $spec(A) = spec(B) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec mult.

A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc semblables entre elles sans contestation, on ne peut rien dire :
par ex $\chi_A = (X-1)(X-2) = \chi_B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A n'est pas DZ car $\dim \mathrm{Ker}(A-I) = 1 = p_1 < \alpha_1 = 2$

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, avec χ_A scindé. Mq A DZ
$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{spec}(A)$. $\mathrm{Ker}(A-\lambda I) = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$

S/ $u = f_A \left(\begin{matrix} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \to AX \end{matrix} \right.$

Si A est DZ, u aussi, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base DZ de u :

$$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et si $\lambda \in \mathrm{spec}\, u$, $[u - \lambda I] = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} = M$

$$[(u-\lambda I)^2] = M^2$$

et $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, M^2$, or $\mathrm{Ker}(u-\lambda I) \subset \mathrm{Ker}(u-\lambda I)^2$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, u - \lambda I = \mathrm{Ker}(u-\lambda I)^2$

$\Leftarrow$ Si cette égalité est tj vérifiée, on a $\mathrm{Ker}\, u - \lambda I = \mathrm{Ker}\, (u-\lambda I)^{\alpha_\lambda}$
[noyaux itérés]

C-H $\chi_A(u) = 0$ soit $P(u) = 0$ où $P = \chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$

il vient par $\underbrace{D.N.}_{\text{lemme des noyaux}}$ $E = \mathbb{K}^n$ $E = \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i I)$
$= \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \lambda I)$

Ex $\varphi \left| \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto AM \end{array} \right.$ $\quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{Tr}\,\varphi \\ \chi_\varphi \\ \det \varphi \end{array} \right.$

S/ On ordonne la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$

$(E_{11}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{nn})$

$$AE_{j1} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} A_{k,l} E_{k,l} E_{j1} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} E_{k,1}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \vdots & & \\ \vdots & & A_{nn} & & \\ & \cdots & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

$\chi_\varphi = \chi_A^n$

$\mathrm{Tr}\,\varphi = n \,\mathrm{Tr}\,A$

$\det \varphi = (\det A)^n$

$\boxed{\text{Clé}}$ → **Théorème de Cayley Hamilton**

Bout CCH Amine?

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, Alors $\chi_A(A) = 0$

D/ $\chi_A(A) = \cancel{\det A - A = 0}$ non, drôle

on écrit $(A - XI)\widetilde{(A - XI)} = \chi_A(X) I_n$

avec $\widetilde{(A - XI)} = (-1)^{n-1} X^{n-1} + B_{n-2} X^{n-2} + \dots + B_0$

on écrit $(A - XI)\left((-1)^{n-1} X^{n-1} + B_{n-2} X^{n-2} + \dots + B_0\right)$

$= \left((-1)^n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0\right) I$

Après identification : $(-1)^n X^n = (-1)^n X^n$ $\quad \times A^{n}$

deg $n-1$: $(-1)^{n-1} A - B_{n-2} = \alpha_{n-1}$ $\quad | \times A^{n-1}$

deg $n-2$: $(-1)^{n} AB_{n-2} - B_{n-3} = \alpha_{n-2}$ $\quad | \times A^{n-2}$

$\vdots$

$AB_1 - B_0 = \alpha_1$ $\quad | \times A$

$AB_0 = \alpha_0$ $\quad | \times I$

et on somme

$]-\infty, n[- 8$

donc $(-1)^{n-1} A^n = \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$

d'où $\chi_A(A) = 0$

$+8$

0

Ex : $(A - XI)(X^{n-1} + C_{n-2} X^{n-2} + \dots + C_1 X + C_0) = (-X^n + \beta_{n-1} X^{n-1} + \dots + \beta_0) I$

Conséquence : μ_A / χ_A

Ex Soit $A \in M_2(K)$ tq $Tr(A) = 0$ Mq. A^2 est une homothétie

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & bc+a^2 \end{pmatrix}$

S/ $\chi_A = X^2 - Tr(A) X + \det A\, I \longrightarrow A^2 = (\det A) \times I$

Ex Soient $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ tq $\det A \wedge \det B = 1$

Mq $\exists U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ $UA + VB = I_d$

S/ $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ $a \det A + b \det B = 1$

C.H : $\chi_A(A) = 0$ donne $A^n - Tr(A) A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + (-1)^n \det I = 0$

$\det(XI - A)$

alors $\exists U$ $UA = \det A \cdot I_d$

de même $\exists V$ $VB = \det B\, I_d$

et alors $aUA + bVB = Id$

VI Trigonalisation

A) généralités : E est un $\mathbb{K}$-ev DF_n

Déf : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe $\mathcal{B}$ base de E tq $[u]_\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure

Caractérisation si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a

$[u]_\mathcal{B}$ est T.S

$\Updownarrow$

$u(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ $k = 1 \dots n$

Déf : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ soit T.S

Prop : 1) A est trigonalisable $\Leftrightarrow f_A$ est T.Z

2) u est T.Z $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E $[u]_\mathcal{B}$ T.Z

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{B}$ ——— $[u]_\mathcal{B}$ T.Z

Q : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $B = P^{-1}AP \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$

à permutation près $(a_{11}, \dots, a_{nn}) = (b_{11} \dots b_{nn})$

En effet : $\chi_A = \chi_B$ donc $\prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}) = \prod_{i=1}^{n} (X - b_{ii})$

Prop : Si A est T.Z alors χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $Tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$

D/ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$ les μ_i sont les

$\overset{\text{T.P}}{T_r(A)} = \mu_1 + \dots + \mu_n$

$\det A = \mu_1 \dots \mu_n$

Th Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) u est trigonalisable
2) χ_u est scindé
3) μ_u est scindé
4) $(\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ $(P(u) = 0$ et P est scindé$)$

D/ 1) $\Rightarrow$ 2) OK 2) $\Rightarrow$ 3) $\mu_u \mid \chi_u$ par CH
3) $\Rightarrow$ 4) OK

4) $\Rightarrow$ 1) ? On procède par récurrence sur la dimension

$n=1$ OK . $n \geq 2$: Objectif trouver un hyperplan stable
$P(u) = 0 \Rightarrow \mu_u \mid P \Rightarrow \mu_u$ est scindé.
Soit λ une racine de μ_u

On sait que $\mathrm{Ker}(u - \lambda I) \neq \{0\}$ alors $\mathrm{Im}(u - \lambda I) \subsetneq E$

Soit H un hyperplan de E tq $\mathrm{Im}(u - \lambda I) \subset H \subsetneq E$

besoin de l'hyp $\exists P$ scindé $P(u)=0$ pour que ça soit vrai.

alors H est stable par u car ~~$u(H) \subset \mathrm{Im} \subset H$~~
$u(x) - \lambda x \in \mathrm{Im}(u - \lambda I) \subset H$
et $\lambda x \in H$

d'où $u(x) \in H$ ..

Soit $v = u\big|_H^H$ il vient $P(v) = 0$ (HR) $\exists$ $(e_1, \dots, e_{n-1})$ base tq H est trigonalisée ; on complète en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$[u]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline 0 \;—\; 0 & \end{array}\right) \text{ où } A = [v]_{(e_1, \dots, e_{n-1})} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $[u]$ est triang sup.

APPL: 1) Si u est nilpotent $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ En effet $\exists m \in \mathbb{N}^*$, X^m annule u strict

si $\lambda \in spec\, u$, $\lambda^m = 0$ donc $\lambda = 0$

2) Tout el de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

3) Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathbb{K}[X]$

$spec(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow spec(F(A)) = (F(\lambda_1) \dots F(\lambda_n))$

D/ Si λ est VP de $u = f_A$ et $u(X) = \lambda X$ avec $X \neq 0$

il vient $F(u).X = F(\lambda).X = F(\lambda) X$ (calcul)
et si $F(u) = 0$, $F(\lambda) = 0$ (sans récip)

Pb: multiplicité
On écrit $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$F(A) = P \begin{pmatrix} F(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & F(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$

Ex 1) On suppose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $Tr(u) = \dots = Tr(u^n) = 0$

MQ u est nilpotent

S/ On trigonalise u: $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

il vient alors $\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n} + \dots + \lambda_n^{n} = 0 \end{cases}$

Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0$

On renomme $\left| \begin{array}{l} \lambda_1 \mid \alpha_1 \\ \lambda_r \mid \alpha_r \end{array} \right.$ avec multiplicité
2 à 2 distincts

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^r + \dots + \alpha_r \lambda_r^r = 0 \end{cases}$$ ie $M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ d'où

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}$$ $\det M = (\lambda_1 \cdots \lambda_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$

| M inv
| $M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$
| NON! ABS...

<u>Ex</u> (Me) : $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ $\chi_A = (X - \lambda)^2$, $A \neq \lambda I$

Mq $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2) Si $\mu_A = \mu_B$ mq $A \simeq B$

3) Idem dans $M_3(\mathbb{C})$ 4) Faux à partir de $n = 4$
$\chi_A = \chi_B$

1) Si a n'est pas DZ, elle possède une vp double λ, Alors $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
avec $a \neq 0$ car A n'est pas (HYP) une homotétie

$[f_A]_{(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \simeq [f_a]_{ae_1, e_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

b. Si $\mu_A = \mu_B$ i) Spec $A = (\lambda, \mu)$ avec $\lambda \neq \mu$, Alors $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \simeq B$
ii) spec$(A) = \lambda, \lambda$: $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\mu_A \mid (X - \lambda)^2$
$u = 0$, $\mu_A = X - \lambda$ et $A = \lambda I$!
et $A = \lambda I$ ...

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq \mu$

et $\circlearrowleft$ alors $\mu_A = (X-\lambda)^2 = \mu_B$ de même $B \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

c- $n=3$: On suppose encore $\mu_A = \mu_B$

i) $\mathrm{Spec}(A) = (\lambda, \mu, \nu)$: $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix} \simeq B$

ii) $\mathrm{spec}\, A = (\lambda, \lambda, \mu)$ $\chi_A = (X-\lambda)^2 (X-\mu)$ et $\chi_A = 0$

Soit $u = f_A$, par déc des noyaux ~~$E = (X-\lambda)^2 (X-\mu)$ et $\chi_A(A) = 0$~~

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mu I) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda I)^2$$

dans (e_1, e_2, e_3) convenable : $[u] = \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0\,0 & \mu \end{array}\right)$

avec $\chi_{A'} = (X-\lambda)^2$, en modifiant (e_1, e_2, e_3) et avec b)

$$\underbrace{[u]_{e_1 e_2 e_3} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}}_{\mu_A = (X-\lambda)(X-\mu)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{[u] = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}}_{\mu_A = (X-\lambda)^2 (X-\mu)} \Bigg\} \ \mu_A \mid \chi_A$$

Comme $\mu_A = \mu_B$, $A \simeq B$

iii) $\mathrm{Spec}\ A = (\lambda, \lambda, \lambda)$, donc $\chi_A = (X-\lambda)^3$, $(A - \lambda I)^3 = 0$

$N = A - \lambda I$ est nilpotent

1er cas : $N^2 \neq 0$, soit X tq $N^2 X \neq 0$; (X, NX, N^2X) est une base de $\mathbb{C}^3$

$$[f_N]_{(N^2X, NX, X)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Mais $N^2 \neq 0$ signifie $(A - \lambda I)^2 \neq 0$, comme $\mu_A \mid \chi_A$

il vient $\mu_A = (X-\lambda)^3$

Bilan : $A \approx \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \mu_A = (X-\lambda)^3$

donc $\mu_A = \mu_B \Rightarrow A \approx B$

$\underline{2^e \text{ cas}}$: $N^2 = 0$, $N \neq 0$ Alors $\underbrace{\operatorname{Im} N}_{\text{droite}} \subset \underbrace{\operatorname{Ker} N}_{\text{plan}}$ en dim 3.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E tq $\left| \begin{array}{l} e_1 \text{ base de } \operatorname{Im} f_N, \ e_1 \in \operatorname{Ker} f_N \\ f_N(e_2) = e_1 \ (\text{donc } f_N\ e_2 \notin \operatorname{Ker} f_N) \\ (e_1, e_3) \text{ base de } \operatorname{Ker} f_N \end{array} \right.$

alors $[f_N]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$[f_A]_e = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

De plus $N^2 = 0$ et $N \neq 0 \iff \mu_A = (X-\lambda)^2$ $\left\{ \begin{array}{l} (A-\lambda I)^2 = 0 \\ A - \lambda I \neq 0 \end{array} \right.$

Ainsi $\mu_A = \mu_B \Rightarrow A \approx B \approx \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

cas 3 : $N = 0$: $A = \lambda I$

d) $\boxed{n=4}$ On suppose $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$

il y a nécessairement une racine double

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mu_A = \mu_B = X^2$, $\chi_A = \chi_B = X^4$

$A \not\approx B$ $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B$

$\underline{\text{Ex}}$ Soient $A_1, \dots, A_p \in M_n(\mathbb{K})$, trigonalisables

$A_1, \dots, A_p$ commutent 2 à 2

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})\ \forall i\ P^{-1} A_i P$ est trig sup.

D/ On passe aux endo $u_1, \dots, u_p$

RM ~~En effet χ_B / χ~~ si F est stable par u, $u_{|F}$ est trigonalisable

En effet $\chi_{\tilde{u}} / \chi_u$ qui est scindé, donc $\chi_{u_{|F}}$ est scindé

On raisonne par récurrence sur la dimension et sur p

$n=1$ OK $n \geq 2$ $p=1$ OK

1er cas u_1 est une homotétie, on cotrigonalise $u_2, \dots, u_p$ (HR) et c'est gagné

2e cas $u_1 \notin \{\lambda I\}_{\lambda \in K}$. Soit λ une vp de u_1, $E_\lambda = \mathrm{Ker}\, u - \lambda I$ est différent de $\{0\}$ et de E

De plus $[u_j ; u_1] = 0$ $j = 2 \dots p$ donne la stabilité de E_λ par $u_2 \dots u_p$, Alors $u_{2|E_\lambda} \dots u_{p|E_\lambda}$ sont cotrigonalisables

Soit $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de E tq $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$

il vient $[u_j]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} T_j & C_j \\ \hline 0 & B_j \end{array}\right)$ T_j T.S

et $[u_1] = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & C_1 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)$

Obs | χ_{B_i} / χ_{u_i} $i = 1 \dots p$, χ_{B_i} est scindé $i = 1 \dots p$

| produit par blocs $B_i B_j = B_j B_i$ et pour tout $i,j \in [\![1,p]\!]^2$

À nouveau par réc sur la dimension, il existe $Q \in GL_{n-r}(K)$ tq $Q^{-1} B_i Q = T_i'$ T.S $i = 1 \dots p$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} T_i & C_i \\ \hline 0 & B_i \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} T_i & C_i' \\ \hline 0 & T_i' \end{array}\right) \text{T.S}$$

3) Jordan - Dunford : (HP)

TR Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé, plus généralement si u possède un polynôme annulateur scindé, E est somme directe de sev stables par u, soit $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tq $\forall \lambda \in \Lambda$

$$u|_{F_\lambda}^{F_\lambda} = \lambda I + N_\lambda \text{ avec } N_\lambda \text{ nilpotent}$$

~~D~~ (HP) On écrit $P = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, λ_i 2 à 2 $\neq$

D. des noyaux : $P(u) = 0 \Rightarrow \underbrace{\bigoplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_i I)^{\beta_i}}_{} = E$

posons $v_i = u|_{F_{\lambda i}}^{F_{\lambda i}}$: v_i est annulé par $\underbrace{(X - \lambda_i)}_{N_{\lambda i}}{}^{\beta_i}$

$v_i = N_{\lambda i} + \lambda_i I$

donc v_i est trigonalisable et $\exists$ une base β_i de $F_{\lambda i}$

tq $[v_i] = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{p_i} \end{pmatrix}$ Comme $(v - \lambda_i I)^{\beta_i} = 0$

il vient $\mu_k = \lambda_i$, $k = 1 \dots p_i$

$[v_i] = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

RM : Dans ce cas $[u]_\beta = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & * \\ & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & * \\ & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & * \\ & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$

et χ_u scindé

2) On peut identifier les $F_{\lambda i}$ (I) on garde les $F_{\lambda i} \neq \{0\}$

En effet, on a $\chi_u = \prod_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \dots}}^{n} (X - \lambda_i)^{\dim F_{\lambda i}} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ α_i mult algébrique

et donc $F_{\lambda i} = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ où λ_i vp de u, α_i sa mult algébrique

car $[u - \lambda_1 I]_\beta^{\alpha_i} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & * \\ & 0 \end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n - \lambda_1 & \\ & \lambda_n - \lambda_1 \end{matrix}} \end{pmatrix}^{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_i} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

pas compris OK

$\sum \alpha_i = n$

$\sum \dim F_{\lambda i} = n \quad \forall i \ \dim F_{\lambda i} = \alpha_i$

$\mathcal{M}$ Voc (HP) : $F_{\lambda i} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i I)^{\alpha i}$ est l'espace caractéristique attaché à λ_i

$\dim F_{\lambda i} = \alpha i$

3) $F_{\lambda i, u} = E_{\lambda i, u}$ $i = 1 \cdots p \iff u$ est diagonalisable

ssi si $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i I) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i I)^2$ $i = 1 \cdots p$

Ex : On suppose χ_u scindé, Mq $u = \delta + \nu$ où | δ est D2, ν nilp, $[\delta, \nu] = 0$

puisque δ et ν convenables sont uniques

D/ On a par CH et le DN $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i I)^{\alpha i}}_{F_{\lambda i}}$

soit δ tq $\delta|_{F_{\lambda i}} = \lambda_i I$ d $F_{\lambda i}$ $i = 1 \ldots n$

$\begin{cases} x = \sum_1^n x_i, \ x_i \in F \\ \delta(x) = \sum_1^n \lambda_i x_i \end{cases}$

| $\delta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ où P_i est le proj $E \to F_{\lambda i} \mathbin{//} \bigoplus_{j \neq i} F_{\lambda j}$
| δ est D2 par recollement de bases

On a de m̂ on défint ν par $\nu|_{F_{\lambda i}} = u - \lambda_i I$ d $F_{\lambda i}$ $i = 1 \ldots n$

il vient $\begin{cases} u = \delta + \nu \\ \nu^{\alpha i} = 0 \text{ sur } F_{\lambda i}, i = 1 \ldots n \Rightarrow \nu^{\max(\alpha i)} = 0 \end{cases}$

et $[\delta, \nu] = 0$ sur $F_{\lambda i}$ $i = 1 \ldots n$ donc $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$

Unicité : Si $u = \delta' + \nu'$ il vient $\delta' - \delta = \nu - \nu'$

On résout le Pb par commutation : $[\delta', u] = 0$

δ' laisse stable $\underbrace{\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i)^{\alpha_i}}_{= F_{\lambda_i}}$ $i = 1 \dots p$ $i = 1 \dots p$

donc

Sur F_{λ_i} stable par δ et δ' on a $\delta'_{|F_{\lambda_i}} = \lambda_i \, Id_{F_{\lambda_i}}$

donc $[\delta_{|F_{\lambda_i}}, \delta'_{|F_{\lambda_i}}] = 0$

$E = \bigoplus F_{\lambda_i}$, $\delta \circ \delta' = \delta' \circ \delta$

Ainsi : δ et δ' sont codiagonalisables mettons dans la base $\mathcal{B}$
$\delta' - \delta$ est diag

de plus $\nu = u - \delta$, $\nu' = u - \delta'$ donc ν et ν' commutent

donc $\nu - \nu'$ nilpotent donc $\delta' - \delta$ diago et nilp

Idée : Commutation

$\delta' - \delta = 0$ et on est contents.

Ex : Racines a) Trouver les $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = B$

$(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)(X-3)(X+3)$

S/ On a $[f_A, f_B] = 0$ donc f_A, f laisse stable les sous esp propres de B : $\mathbb{R}\varepsilon_i$ $i = 1, 2, 3$

donc A est diago $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^2 = 1, \beta^2 = 4, \gamma^2 = 9$
$\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 2$, $\gamma = \pm 3$

b_ Soit $a \in \mathbb{C}$, étudier dans $M_2(\mathbb{C})$: $X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$P($

$A = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

1er Cas : si $a = 0$ Si X est solution il vient $X^4 = 0$
on est en dim 2 $X^2 = 0$, absurde.

Cas 2 : $\alpha \neq 0$ X commute avec la matrice $M \Rightarrow X$ laisse stable les Ep de M

$\Rightarrow X$ laisse stable $\ker(M - aI) = \mathbb{C}\varepsilon_1$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta + \beta\gamma \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$\alpha = \pm a$, $\gamma = \pm a$

$\beta(\alpha + \gamma) = 1 \longrightarrow \beta = \frac{\pm 1}{a}$

et $\alpha = \pm a$, $\beta = \pm a$ avec même signe.

RM : $\alpha \neq \gamma$ | X D^2, M non $D2$ alors $\begin{pmatrix} \beta a & < \frac{da}{2} \\ & 1 \end{pmatrix}$

② Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1$: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on permute la base pour résoudre

$$Y^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = M \quad | \quad [Y, M] = 0$$

$$\Rightarrow Y = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 \; 0 & c \end{array}\right) \quad Y^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \hline & c^2 \end{array}\right)$$

$C = \pm 1$, A involution $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sablier ouvert

Merci hugo

38

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

Exo : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, et Φ_u $v \longmapsto u \circ v - v \circ u$

Mq u D2 $\Leftrightarrow$ Φ_u D2

$\Rightarrow$ Soit $\mathcal{B}$ une base tq $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

$[u \circ v - v \circ u]_{\mathcal{B}} = DA - AD$ et $DE_{ij} - E_{ij}D = (\lambda_j - \lambda_i) E_{ij}$

(E_{ij}) est une base de $\overrightarrow{vp}$ de Φ_u

$\Leftarrow$ $u = s + \nu$ $\begin{cases} s \text{ D2} \\ \nu \text{ nilp} \end{cases}$ et $[s, \nu] = 0$

Alors $\Phi_u = \Phi_s + \Phi_\nu$ Φ_s est D2, Φ_ν est nilpo (linéaire)

et $\Phi_s \circ \Phi_\nu = \Phi_\nu \circ \Phi_s$

$\rightarrow$ On utilise l'unicité : par unicité de la décomposition de Jordan-Dunford

si $\Phi_u = \underbrace{D}_{D2} + \underbrace{N}_{\text{nilpo}}$ (endo de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$)

et $[D, N] = 0$ $\Rightarrow$ $D = \Phi_s$ et $N = \Phi_\nu$

or Φ_u est D2 donc $N = \Phi_\nu = 0$, donc $\nu \in Z(\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)) \Rightarrow \nu$ homothétie donc nulle

Ex Soit $u \in GL(\mathbb{C}^n)$ Mq u possède une racine

S/ On sait que E est somme directe de sev F stables par u et tq $u|_F = \underbrace{\lambda I_F + N}_{w}$, N nilpo, ici $\lambda \neq 0$ ici car $\det(u) \neq 0$

IS de travailler sur F : $w = \lambda(I + \nu)$ où $\nu = \frac{1}{\lambda} N$ nilpo

λ possède une racine $\mu \in \mathbb{C}^*$

Idée : DL : Taylor : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + o(x$ grand on élève au carré $1+x = P^2 + O_1(x^n)$

Delà $1+x - P^2(x) = O_1(x^n)$

On en tire $\begin{cases} O_1(x^n) \text{ est un polynôme} \\ \text{valuation } O_1(x^n) = x^n Q(x) \end{cases}$

bref $1+x = P^2(x) + x^n Q(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$

$$I + \nu = P^2(\nu) + \nu^n Q(\nu)$$

$$\text{FIN} \quad v = (\mu P(\nu))^2 \quad \text{OK}$$

$\boxed{\text{RM}}$ Si ν nilp il existe une base β

$$[\nu]_\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{J}_r \end{pmatrix} \quad \forall k \; \mathcal{J}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec χ_u scindé. Il existe β base de E

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_n & * \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

N_1 nilp $N_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{J}_r \end{pmatrix}$, de m̂ pour N_2, ETC

BILAN : il existe (e) tq, $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathcal{J}}_r \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathcal{J}}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

VII Endomorphismes cycliques (Tout est HP)

Données: E est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n \geq 1$
$u \in \mathcal{L}(E)$

Th-Def: Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On appelle espace cyclique engendré par x (pour u) le sev de E défini par $F_{x,u} = \mathrm{Vect}(\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\})$

On a
a) $F_{x,u}$ est le plus petit espace de E stable par u contenant x
b) Soit $p = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, \dots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$. Alors $(x, \dots, u^{k-1}(x))$ est une base de F_x
c) Soit $v = u\big|_{F_x}^{F_x}$, alors $[v]_\beta$ est une matrice compagnon
$[v] = C_P$ $P \in \mathbb{K}[X]$
d) P est le générateur normalisé de $\{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(u)(x) = 0\}$ idéal
on note $P = \mu_{u,x}$ on a $P \mid \mu_u$.

D/ a) Si $y = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k u^k(x) \in F_x$, $u(y) \in F_x$ qui est donc stable par u
Si F est stable par u, $x \in F$ on a $\forall k\ u^k(x) \in F$ donc $F_x \subset F$

b) On a $\begin{cases} (x, \dots, u^{p-1}(x)) \text{ libre} \\ (x, \dots, u^p(x)) \text{ lié} \end{cases} \Rightarrow u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$

De là $u(\mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))) \subset \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$
avec a) : $F_x = \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{p-1}(x))$

c) Posons $u^p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$ $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$

$$[v]_{(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}} = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

$\chi_v = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1 X - a_0$
(ou $(-1)^p(\,)$ si $\det(A - XI_p)$)

d) $P(v)(x) = u^p(x) - a_{p-1}u^{p-1}(x) - \dots - a_1 u(x) - a_0(x) = 0$ (Def)
Si $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\deg Q \leq p-1$ $Q(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ $(\alpha_k) \neq 0$
$Q(u)(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) \neq 0$ car $(x, \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. OK

Déf On dit que u est cyclique lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tq $E_x = E$

ie : $\exists x \in E, (x, \dots, u^{n-1}(x))$ est libre

Exercices : ① On suppose u cyclique. Mq $\chi_u = \mu_u$ $(\chi_u = (-1)^n \mu_u)$

C.H $\mu_u \mid \chi_u$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$, $\deg P \leq n-1$ ie $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$

$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ ✓

$P(x) = 0 \Rightarrow P(u) = 0$ ou $\deg P \geq n \longrightarrow \deg \mu_u \geq n \mid \chi_u = \mu_u$

② Si u est cyclique, $\mathrm{Com}(u) = \mathbb{K}[u]$

S/ $\Rightarrow$ Tj vrai. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tq $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ base de E ($H \neq p$)

Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. On écrit $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x)$

Soit $\omega = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$

Mq $v = \omega$ (?). Comme $v \in \mathrm{Com}(u)$ il vient $\forall k\ u^k \circ v = v \circ u^k$

donc $\forall k$, $u^k(v(x)) = v(u^k(x))$

$$u^k\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x)\right) = v(u^k(x))$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(u^k(x)) = v(u^k(x))$$

$$\omega(u^k(x)) = v(u^k(x))$$

par égalité sur une base $v = \omega$.

Ex Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ Mq

$\Updownarrow$ χ_u irréductible

Les sev propres de E stables par u sont $\{0\}$ et E

S/ $\Downarrow$ Contraposée : il existe F sev de E tq $F \neq \{0\}$, $F \neq E$ et F stable par u. Soit $v = u_{|F}^{F}$ $1 \leq \deg \chi_v < n$

χ_v / χ_u donc χ_u n'est pas irréductible

$\Uparrow$ Aussi contraposée espaces cycliques.

On écrit $\chi_u = QR$ $1 \leq \left| \begin{array}{l} \deg Q \\ \deg R \end{array} \right| < n$

CH : $Q(u) \circ R(u) = 0$, par ex $Q(u)$ non inversible

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \text{ avec } \lambda_A = 1 \ (OK) \text{, soit } x \neq 0 \text{ tq } Q(u)(x) = 0$$

il vient $u^n(x) = -\lambda_{n-1} u^{n-1} - \dots - \lambda_0 x$ $\left| \begin{array}{l} \dim F_x \leq n < n \\ F_x \text{ stable par } u. \end{array} \right.$

Rq : si χ_u irréductible tout $x \neq 0$ est cyclique pour u

car $\underset{\substack{\neq \{0\} \\ \text{stable}}}{F_x} = E$ ...

__Valeurs propres__ :

Ex : Soit A une matrice compagnon, Mq les E_p de A ont pour multi. (dim) 1.

D/ $A = \begin{pmatrix} 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ $\chi_A = (-1)^n (X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_0)$

$\lambda \in \operatorname{Spec} A$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda & a_1 \\ & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ rg $\geq n-1$

donc dim $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 1$ si λ vp.

d'où $\dim E_{x,A} = 1$

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mq $u = f_A$ est cyclique $\Leftrightarrow$ DZ

MQ: $\Updownarrow$ u cyclique
A possède n vp 2 à 2 ≠

(⇒) A cyclique $\to$ $A \simeq C_P$ donc tous les E_p sont de dim 1 OK.
(+DZ) ⇐

(⇐) $[u]_{(e_1,\dots,e_n)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 2 à 2 ≠ $\Big|$ $x = e_1 + \dots + e_n$ ✓

$u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$

$[(x, \dots, u^{n-1}(x))]_{(e)} = \begin{pmatrix} & VDM & \end{pmatrix}$ inversible x cyclique

Ex: (Entiers algébriques) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire de degré n;
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines.
(a) Mq $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont racines d'un polynôme unitaire de degré n
(b) On suppose $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$. Mq les λ_j sont des racines de l'unité

S/ On introduit C_P $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On constate que (C_P trig) si $k \in \mathbb{N}^*$ $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ est le spectre avec répétition de $C_P^k = A_k$, ainsi $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = Z(\chi_{A_k})$,
comme $A_k \in M_n(\mathbb{Z})$ $\chi_{A_k} \in \mathbb{Z}[X]$ et unitaire

(b) $\chi_{A^k} = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j^k)$, si $\chi_{A^k} = X^n + \dots - a_{k,\ell} X^\ell + \dots + a_{k,0}$

il vient $a_{k,\ell} = (-1)^{n-\ell} \sigma_{n-\ell}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ où $\sigma_{n-\ell}(Y_1, \dots Y_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_{n-\ell}} Y_{i_1} \dots Y_{i_{n-\ell}}$

De là il vient $|a_{k,\ell}| \leq C_n^{n-\ell}$

Comme les χ_{A^k} sont dans $\mathbb{Z}[X]$, $\{\chi_{A^k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est fini

~~Il existe des entiers $1 \leq p < q$, $\chi_{A^p} = \chi_{A^q}$~~

a fortiori (λ_j^k) est fini, $k \in \mathbb{N}^*$, $\exists k' > k$ $\lambda_j^k = \lambda_{\sigma(j)}^{k'}$

Exercice (polynômes locaux) Rappel on fixe $\Rightarrow \lambda_j^{k-k'}$

$u \in \mathcal{L}(E)$

μ_x est le générateur normalisé de $\{P, P(u)(x) = 0\}$

On écrit désormais $P.(x)$ au lieu de $P(u)(x)$

$(P, x) \longmapsto P.x$ bilinéaire

(a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on écrit $\mu_x = P.Q$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ puis $y = Q x$

MQ $\mu_y = P$

(b) Soit $(x, y) \in E^2$, on suppose $\mu_x \wedge \mu_y = 1$ Mq $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$

(c) ______ Mq $\exists z \in E$, $\mu_z = \mu_x \vee \mu_y$

(d) Mq $\exists a \in E$ tq $\forall x \in E$, $\mu_x | \mu_a$. En conclure que μ_a est le polynôme minimal de u

5/(a) Soit $U \in \mathbb{K}[X]$ il vient $U.y = 0 \iff (U Q) x = 0$

$U \cdot Q(u) = U(u) \circ Q(u)$

$\iff \mu_x | U.Q \iff PQ | UQ \iff P | U$

donc $\langle P \rangle = \{U \mid U.y = 0\}$

(b) Il est clair que $(\mu_x \mu_y)(x+y) = 0$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, si $P(x+y) = 0$ il vient $P \cdot x = -P \cdot y$

on applique μ_x : $\mu_x P_y = 0$

$\Downarrow$

$\mu_y \mid \mu_x P$

$\Downarrow$ gauss

$\mu_y \mid P$

et alors par symétrie $\mu_x \mid P$, Comme $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, $\mu_x \mu_y \mid P$

(c) On écrit $\mu_x = P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$ $\mu_y = P_1^{\beta_1} \dots P_n^{\beta_n}$, P_i irréd (Normalisés)

$\alpha_1 < \beta_1$

$\alpha_k < \beta_k$

$\alpha_{k+1} \geq \beta_{k+1}$

$\alpha_n \geq \beta_n$

On pose $\alpha'_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \geq \beta_i$ | $\beta'_i = \beta_i$ si $\beta_i > \alpha_i$
$= 0$ sinon | $= 0$ sinon

Soit $P_x = P_1^{\alpha'_1} \dots P_n^{\alpha_n}$ $Q_y = P_1^{\beta'_1} \dots P_n^{\beta'_n}$

P_1

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\mu_x}{P_x} \cdot x \\ y' = \dfrac{P_{x_y}}{Q_y} \cdot x \end{cases}$$

avec (a) $\mu_{x'} = P_x$
$\mu_{y'} = Q_y$

(b) donne $\mu_{x'+y'} = P_x Q_y = \mu_x \vee \mu_y$.

(e) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, avec (c) et une récurrence évidente il existe $a \in E$ tq $\mu_a = \mathrm{ppcm}(\mu_{e_1}, \dots, \mu_{e_n})$

Alors $\mu_a \cdot e_k = 0$ $k = 1 \dots n$, par CL $\forall x \in E$, $\mu_a \cdot x = 0$

(C-C) $\mu_a \mid \mu_u$, $\forall x \in E$ $\mu_a(u)(x) = 0$
donc $\mu_a(u) = 0$.

Appl : Cayley Hamilton : $\mu_u = \mu_u = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$

On sait $(u, \dots, u^{p-1}(u))$ est une base de $F_u = \mathrm{Vect}(u^k(u))$

On peut écrire toute matrice sous forme de $\begin{pmatrix} C_{P_1} & \\ & C_{P_s} \end{pmatrix}$

et que $v = u|_{F_u}^{F_u}$ vérifie $[v] = \begin{pmatrix} 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 \quad 0 & \\ & 1 & -\alpha_{p-1} \end{pmatrix} = B$

$P_s = \mu_s$

Or $\chi_v | \chi_u$ donc $\mu_u | \chi_u$

$P_1 \dots P_s = \chi_A$

$P_k | P_{k-1}$

$k = 2 \dots s$

VIII Réduction et topologie Tout est HP

A) Normes, valeurs propres : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Rappels : Si $\|\cdot\|$ est une norme sur ~~$M_n(\mathbb{K})$~~ $\mathbb{K}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

$$|||I||| = 1 \text{ et } \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})^2, \ |||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$$

Prop : Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ alors $|\lambda| \leq |||A|||$

D/ Soit $X \neq 0$ une $\vec{vp}$ pour λ : $\frac{\|AX\|}{\|X\|} = |\lambda| \leq |||A|||$

à retenir Regionnement : $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$

MQ $\lambda \in \bigcup_{k=1}^{n} \bar{D}\left(a_{kk}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|\right) = H$

D/ Si $\lambda \notin H$ il vient $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $|a_{kk} - \lambda| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$

cf systèmes lin ← Selon Hadamard $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$ est inversible et donc

$\lambda \notin \mathrm{Spec}\, A$

Appl : $A = \begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ $\Big|\ \chi_A = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P$

$\lambda \in Z(P) \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{k=0}^{n-2} \overline{D}(0, 1+|\alpha_k|) \cup \overline{D}(\alpha_{n-1}, 1)$

a fortiori $|\lambda| \leq 1 + \max |\alpha_k|$

Exo Soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Mq $\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{spec} A \subset F\} = \tilde{F}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{K})$

S/ Soit $A_p \in \tilde{F}^{\mathbb{N}}$, $A_p \longrightarrow A$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus F$ il vient $\forall p \in \mathbb{N}$ $|\chi_{A_p}(z)| = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(A_p)} |z - \lambda|$

$\geq d(z, F)^n$

Opérations $|\chi_A(z)| \geq d(z,F)^n$

Bref $z \notin A$, $\operatorname{Spec} A \subset F$ et donc $A \in \tilde{F}$

Ex $M_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$

$\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$
par intersection $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ trigonalisable}\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$

B) Diagonalisation à ε près :

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \neq j$ $|b_{ij}| < \varepsilon$

S/ Soit $u = f_A$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ tq $[u]_{(e_1,\dots)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

On regarde $[u]_{(e_1, \delta e_2, \dots, \delta^{n-1} e_n)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta \beta_{12} & \delta^2 * & \delta^3 * & \cdots & \delta^{n-1} * \\ & \lambda_2 & \delta * & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \delta * \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

donc pour δ assez petit : $\max_{i<j} |\delta^{j-i} \beta_{ij}| \leq \varepsilon$

Obs : $A^p \to 0$ donc $AX = \lambda X$, $X \neq 0$

$\|A^p X\| = |\lambda|^p \|X\| \to 0$

donc $|\lambda| < 1$

Ex : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\operatorname{Spec} A \subset D(0,1)$. Mq $A^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

S/ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{B} P^{-1} \quad |b_{ij}| < \varepsilon$$

On munit $\mathbb{C}^n$ de $\|\cdot\|_1$: $\|BX\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i B E_i\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|BE_i\|$

$$\leq C \sum_{i=1}^n |x_i|$$

où $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|BE_i\|$. $C = |||B|||$ (atteint en E_k) • redo this one

$|||B||| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \underbrace{(|\lambda_i| + (n-1)\varepsilon)}_{\text{majore } \|BE_i\|_1}$

On choisit $\varepsilon > 0$ tq $\forall i, \underbrace{|\lambda_i|}_{<1 \text{ (hyp)}} + (n-1)\varepsilon < 1$

CCl On a $|||B||| < 1$, de là $|||B^p||| \leq |||B|||^p \longrightarrow 0$

donc $A^p \longrightarrow 0$

Ex : (X) Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tq $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset D(0,1)$. Mq A est nilpotente

S/ "On" sait que $A^p \to 0$, or $A^p \in M_n(\mathbb{Z})$, $A^p = 0$ apcr...

C) Densité des matrices diagonalisables :

Ex : Mq $\Omega = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ possède } n \text{ vp } 2 \text{ à } 2 \neq\}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

S/ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$A_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k+1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \frac{1}{k+n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit $\delta = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j| > 0$, puis k, $\frac{1}{k} < \delta$

$\lambda_i + \frac{1}{k+i} = \lambda_j + \frac{1}{k+j}$ donne $|\lambda_i - \lambda_j| = \left| \frac{1}{k+j} - \frac{1}{k+i} \right| = \frac{|i-j|}{(k+i)(k+j)} < \frac{1}{k} < \delta$

Ainsi $\lambda_i = \lambda_j$ puis $\frac{1}{k+i} = \frac{1}{k+j}$, enfin $i = j$

En particulier les endomorphismes cycliques sont ~~diagonalisables~~ dense

Appl: C H si A possède n vp 2 à 2 $\neq$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\chi_A(A) = P \underbrace{\chi_A(D)}_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0} P^{-1}$$

Bref : $\forall A \in \Omega$ $\chi_A(A) = 0$, Or $\begin{cases} M \mapsto \chi_M(M) \text{ est } C^0 \text{ par } C^0 \text{ des opérations (P)} \\ \Omega \text{ est dense} \end{cases}$ donc $\chi_M(M) = 0$

Ex Ω est ouvert

S/ $A \in \Omega(\mathbb{C}) \iff \chi_A \wedge \chi_A' = 1$

A est à spectre simple $\iff \det(\chi_A'(A)) \neq 0$

On $f : A \longmapsto \det(\chi_A'(A))$ est C^0 donc $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert

plus rapide → prendre un pol min SARS et passer à la limite.

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ Mq A est DZ $\iff \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$

$\Uparrow$ On montre que $\exists D$ diagonale dans $\overline{\mathcal{C}(A)}$

En effet Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\exists P_k \in GL_n(\mathbb{C})$ $P_k^{-1} A P_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij}^k \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

avec $\sup_{i<j} |b_{ij}^k| < \frac{1}{k}$ donc $P_k^{-1} A P_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

(CCL) Si $\mathcal{E}(A) = \overline{\mathcal{E}(A)}$, donc D est semblable à A qui est alors diago

(⇓) Soit $B \in \overline{\mathcal{E}(A)}$, on veut $B \in \mathcal{E}(A)$ (?)

χ_M est constant sur $\mathcal{E}(A)$ égal à χ_A ; par continuité de $M \mapsto \chi_M$
$\chi_B = \chi_A$
Soit λ une v.p commune à A et B, Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$

$$rg(A - \lambda I) = \text{multiplicité algébrique de } \lambda \text{ dans } \chi_A \text{ car A DZ}$$

et $rg(A - \lambda I) = rg(P_k^{-1} A P_k - \lambda I) = r$

Soit $\Delta_{I,J}$ un mineur de taille $\cancel{k}\ r+1$, $\Delta_{IJ}(P_k^{-1} A P_k - \lambda I) = 0$
$\Delta_{IJ}(B - \lambda I) = 0$ par $\mathcal{C}^0$

Bilan: $rg(B - \lambda I) \leq r$, donc $\dim E_{\lambda,B} \geq n - r \geq \dim E_{\lambda,A}$

$\Rightarrow \dim E_{\lambda,B} = \text{mult. alg de } \lambda \text{ dans } \chi_B = \chi_A$

$\Rightarrow B\,DZ \Rightarrow B \simeq A$ (ont m̂ v.p.s)

D) Valeurs propres "pures"

espace caractéristique / Déf: $\lambda \in \mathrm{Spec}\, A$ est pure lorsque $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{d_\lambda}$

Bref $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda = \lambda_1,\ \lambda I + N_1,\ N_1 = 0$

Comme $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{d_\lambda}$

Ceci équivaut à $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2$

Ex (I): $|||\cdot|||$ norme d'opérateur attachée à $||\cdot||$ sur $\mathbb{C}^n$.
Si $|\lambda| = |||A|||$ alors λ est pure

S/ On soit $|\lambda| \leq |||A|||$, posons $B = \frac{1}{|||A|||} A$ $(A \neq 0)$

il vient $|||B||| = 1$, $|\lambda| = 1$, donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $|||B^p||| \leq |||B|||^p \leq 1$

C.H + D.N

posons $u = f_B$ $\quad v = \underbrace{u|_{F_{\lambda,u}}}_{\text{corr. ct}}$, $v = \lambda I + N$, N nil de $F_{\lambda,u}$.

on veut $N = 0$

Idée : On suppose $N \neq 0$ on va mq v^p non bornée. Soit $m \geq 2$ l'indice de nilpotence de N, $N^{m-1} \neq 0$

Calcul

Il existe donc $X \neq 0$ tq $N^{m-1}X \neq 0$. Soit $Y = N^{m-2}X$

il vient $NY \neq 0$ $\quad N^2Y = 0$

Revoir Form Som produits

$v^pY = (\lambda I + N)^pY \underset{\text{binôme}}{=} \lambda^pY + p\lambda^{p-1}NY$

$\begin{cases} \lambda^pY \text{ est borné car } |\lambda| = 1 \\ \|p\lambda^{p-1}NY\| \to +\infty \end{cases}$ $\quad \underbrace{v^pY}_{\text{borné}} =$ non borné absurde.

Ex : Si $u \in M_n(\mathbb{C})$ est une isométrie pour $\|\cdot\|$, alors u est $D\mathbb{Z}$

S/ $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(u)$ $|\lambda| = |||u||| = 1$ $\quad E_{\lambda,u} = F_{\lambda,u}$ or $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}A} F_{\lambda,u} = E$