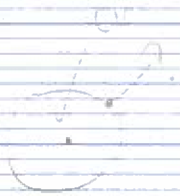
Séries entières (Approfondissement)

I Rayon de convergence

Données: $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ S $\sum a_n z^n$, $f\begin{pmatrix} D(S) \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum a_n z^n \end{pmatrix}$



$\rho(S) = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ | Si $(a_n z_0^n)$ bornée et $0 \leq |z| < |z_0|$

$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

Ex $\sqrt{2} = 1,a_1a_2\ldots$ rayon de CV de $\sum a_n z^n$?

S/ On regarde pour $r \geq 0$, $a_n r^n$:

$r<1$: comme $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n \leq 9$, $\sum a_n r^n$ CV

Si $r \geq 1$ DV...

Ex: RDC de $\sum n!\, z^{n^2}$

S/ Soit $r>0$: si $r \geq 1$: $n!\, r^{n^2} \longrightarrow +\infty$

si $r<1$: $n!\, r^{n^2} \leq n^n r^{n^2} = e^{n\ln(n)} e^{n^2 \ln r} = e^{n(\ln(n) - n\ln(r))} \longrightarrow 0$

Ex On note $R_1 = \rho(\sum a_n z^n)$, $R_2 = \rho(\sum b_n z^n)$ et l'on pose $c_{2n} = a_n$, $c_{2n+1} = b_n$, rayon de $\sum c_n z^n$?

S/ Si $|z| < \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, $|c_{2n} z^{2n}| = |a_n| (|z|^2)^n \longrightarrow 0$

$|c_{2n+1} z^{2n+1}| = |b_n| (|z|^2)^n |z| \longrightarrow 0$

donc $R_c \geq \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$

* Si $|z| > \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}) = \sqrt{R_1}$ par ex

il vient $|z|^2 > R_1$ donc $|a_{2n}| |z|^{2n}$ est non borné donc $|z| \geq R_c$

$\longrightarrow \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}) \geq R_c$

U

A) Hadamard - Cauchy

RMI : $\mathcal{R}(\sum a_n z^n) > 0 \iff \exists c > 0,\ a_n = O(c^n)$

En effet : * si $R_a > 0$ et si $0 < r < R_a$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée donc $a_n = O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^n\right)$

** Si $a_n = O(C^n)$, $c > 0$ et si $0 < r < \frac{1}{c}$ il vient $a_n r^n = O((rC)^n)$
$= O(1)$

donc $R_a \geq \frac{1}{C}$.

Ex $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ Mq $R_a > 0 \iff \forall K$ compact $\subset \mathbb{C}$ $\sqrt[n]{|S_n|}$ est U.B sur K

tout fermé de R est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite

S/ $R_a > 0$ Soit $r \in]0, R_a[$, $a_n = O(C^n)$ où $C = \frac{1}{r}$

On suppose SNG $K \subset \bar{D}(0, \ell)$, si $z \in K$, $|S_n(z)|^{1/n} \leq |M(1 + \ell C + \dots (\ell C)^n)|$

$\leq M^{1/n} (n+1)^{1/n} \ell C$

Si $|S_n|^{1/n}$ est borné sur $\bar{D}(0,1)$ mettons par $M > 1$

$|a_n z^n| = |S_n - S_{n-1}| \leq M^n + M^{n-1}$

donc $a_n z^n = O(M^n)$

$|a_n| = O(M^n) \Rightarrow R \geq M^{-n}$

(HP) **Th** Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $R_a = \mathcal{R}(\sum a_n z^n)$, avec les conventions usuelles

$$R_a = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

D/ Rappels soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\mathrm{Adh}(u_n)$ est un compact non vide de $\bar{\mathbb{R}}$

D/ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ Soit $r > 0$ $\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|}$ est non borné, donc $a_n r^n$ aussi et $R_a = 0$

$0 < \ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, Soit $r > 0$, $\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r\sqrt[n]{|a_n|}$

Si $r < 1/\ell$ on a $r\ell < 1$ Soit μ, $r\ell < \mu < 1$

la plus grande VA de $\sqrt[n]{|a_n| r^n}$ est $r\ell$ et $\mu \geq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| r^n}$

s'il y a une infinité de n tq $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \geq \mu$, il y a une VA $\geq \mu$, absurde

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leq \mu$

$|a_n| r^n \leq \mu^n$ avec $\mu < 1$ $\sum |a_n| r^n$ CV

VA $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| r^n}$

Si $r > 1/\ell$ on choisit μ $r\ell > \mu > 1$, il y a une infinité de n

tq $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \geq \mu$, ~~non bornée $r \geq R_a$~~ $|a_n| r^n \geq \mu^n$; donc $(a_n r^n)$ est non bornée : $r \geq R_a$ | $R_a = \dfrac{1}{\ell}$

*** $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 0$ I dem

Ex $R\left(\sum e^{n \sin n} z^n\right)$ (X)

$\sqrt[n]{a_n} = e^{\sin n}$, $\limsup \sin n = 1$, $\limsup e^{\sin n} = e$

$\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$

II Développements en série entière

A) Fractions rationnelles complexes (→ Séries génératrices en proba)

① On part de : Soit $p \in \mathbb{N}$ pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n \quad \left\{ \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{p}\right)' = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \right. \quad \text{dérivation réelle}$$

Important (HP) ceci reste vrai dans $D(0,1)$

① $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$ par produit de Cauchy ACV est DSE sur $D(0,1)$

② $R\left(\sum \binom{n+p}{p} z^n\right) = 1$, d'Alembert

③ Les deux fonctions coïncident sur $]-1,1[$ → unicité du DSE

② Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On n'est pas un pôle de F

Objectif: DSE de F en 0, rayon.

On décompose F : $F = \sum_{u \in \Pi} P_u + E$

$$P_u = \frac{\lambda_1}{(z-u)} + \dots + \frac{\lambda_{p+1}}{(z-u)^{p+1}}$$

résulte le plus difficile à la fin

Si $|z| < a$ $\quad \frac{\lambda_k}{(z-u)^k} = \frac{(-1)^k \lambda_k}{u^k \left(1-\frac{z}{u}\right)^k} = \underbrace{\frac{(-1)^k \lambda_k}{u^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{z^n}{u^n}}$

coeff $\frac{(-1)^k \lambda_k \binom{n+k-1}{k-1}}{a^{n+k}}$

Ainsi : F est DSE sur $D(0,\rho)$ où $\rho = \min\{|u|, u \in \Pi\}$

Notons $G(z) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} b_n z^n$ la série qui donne F sur $D(0,\rho)$ elle est de rayon $\geq \rho$

Mq: $R_b = \rho$ Si $R_b > \rho$: G est bornée sur $D(0,\rho)$

Soit u, $|u| = \rho$ on regarde F sur le rayon $[0, u[$

$\exists \lim_{\substack{z \to u \\ z \in [0,u[}} |F(z)| = +\infty$, or $F = G$ sur $[0,u[$, G n'est pas bornée ⊥ absurde

Application : Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ avec $\alpha_0 \neq 0$
On note $E_\alpha = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \alpha_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + \alpha_0 u_n\}$

Obs : $\Phi \begin{pmatrix} E_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^p \\ u \longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme $\dim E_\alpha = p$

Pb : Description explicite de $u \in E_\alpha$?

El P., Gagné

Lemme : Si $u \in E_\alpha$ il existe $C > 0$ tq $u_n = O(C^n)$

D/ Soit C, $C > |u_0| + \dots + |u_{p-1}| + 1$

Si $\forall m \leq n+p-1$, $|u_m| \leq C^{m-1}$ il vient $|u_{n+p}| \leq \max|\alpha_k| (|u_{n+p-1}| + \dots + |u_n|)$

$\leq \max|\alpha_k| (C^{n+p} + \dots + C^{n+1})$

$\leq (p \times \max|\alpha_k|) C^{n+p}$

$\leq C^{n+p+1}$

On utilise une méthode de série génératrice

Soit $G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$, on sait $u_{n+p} - \alpha_{p-1} u_{n+p-1} - \dots - u_n = 0$

$G(z)(1 - \alpha_{p-1} z - \dots - \alpha_0 z^p) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_{p-1} z^{p-1}$

Bref sur $D(0, 1/C)$ $G(z) = \dfrac{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_{p-1} z^{p-1}}{1 - \alpha_{p-1} z - \dots - \alpha_0 z^p}$

$\rho < \frac{1}{C}$ puisque $\rightarrow$ n_β [illegible]

Les pôles de la FR du membre de droite sont $\neq 0$, on la décompose par unicité, u_n est CL de suites de la forme $\dfrac{\binom{n+k-1}{k-1}}{u^{n-k}}$

NB : Pôles de G = inverse des racines de $Z^p - \alpha_{p-1} Z^{p-1} - \dots - \alpha_0$

B) Equations différentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, Alors $\forall x \in]-1, 1[$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

S/ On a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{n+1}{\alpha - n}\right| \longrightarrow 1$ $R = 1$

On pose, pour $x \in]-1, 1[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ (Rayon de convergence...)

$f \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[, \mathbb{R})$ (Reviou) $\begin{cases} ((1+x)^\alpha)' = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \\ (1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha (1+x)^\alpha \end{cases}$

$$(1+x) f'(x) = f'(x) + x f'(x) = \left(\alpha + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n$$
$$= \alpha\left(1 + \sum \left(\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{n(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right) x^n\right) = \alpha f(x)$$

<u>Bilan</u> : f et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ vérifient la même ED

$(1+x)y' = \alpha y$ avec | $1+x$ ne s'annule pas | elles sont égales sur $]-1,1[$.
$y(0) = 1$

<u>Exo</u> : DSE de $\exp(\text{Arcsin}\, x)$ ordre 2.

$f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[, \mathbb{R})$ $f(x) = e^{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

Equation différentielle $\sqrt{1-x^2}\, y' = y$ } convolution $\Rightarrow$ dérivée

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} y' + \sqrt{1-x^2}\, y'' = y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$-xy' + (1-x^2)y'' = y \quad \} \heartsuit \text{ polynômes}$$

ie $(x^2-1)y'' + xy' + y = 0$ Analyse (Hyp) : y est DSE sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$

$y = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$. on remplace $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$
$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{n} a_n x^n = 0$$

Identification : $-(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n^2 - n + n + 1) a_n = 0$

ie $\forall n \geq 0$ $a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)} a_n$ $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$ $(*)$

dém (Synthèse : on part de (a_n) $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \to 1$, donc $R(\sum a_{2n} z^n)$ $R(\sum_{n=0} a_{2n+1} z^n)$
donc $R(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) = 1$

On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-1,1[$

Avec le calcul précédent (DT ATSE) il vient $\forall x \in]-1,1[: (x^2-1)g''(x) + y'(x) + g$ $= 0$

(CC) y et f sont sol de $\heartsuit$ avec les mêmes CI, car x^2-1 ne s'annule pas $g(0)=g'(0)=1$

et alors $g = f$ (Cauchy) $\quad a_{2p+2} = \frac{\prod_{k=0}^{p}((2k)^2+1)}{(2p+2)!}$ | $a_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)^2+1}{(2p+1)!}$

C) Equations fonctionnelles.

* Inverse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\mathcal{C}(\sum a_n x^n) > 0$, si $a_0 \neq 0$

$1/f$ est DSE au V de 0 (HP)

S/ On se ramène à $a_0 = 1$. Analyse : s'il existe $\mathcal{C} > 0$, une SE $\sum b_n z^n$ de rayon $\geq \mathcal{C}$ tq $\forall x \in]-\mathcal{C}, \mathcal{C}[\, (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = 1$

il vient par convolution absolument CV, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n = 1$

par unicité du dse $a_0 b_0 = 1$, donc $b_0 = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{...}$

Inégalité récurrente : On sait qu'il existe $C > 0$ tq $|a_n| = O(C^n)$

quitte à agrandir C $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq C^n$ $(a_0 = 1)$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|b_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} C^k |b_{n+1-k}|$ } essai $|b_k| \leq C^k$ non

$|b_k| \leq 2^k C^k$? $|b_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} C^k C^{n+1-k} \leq \left(\sum_{\ell=0}^{n} 2^\ell \right) C^{n+1} \leq 2^{n+1} C^{n+1}$

$\Rightarrow \mathcal{C}(\sum b_n x^n) \geq \frac{1}{2C}$: OK !

* $\boxed{\text{Gauss}}$ Soit $q \in]0,1[$, Déterminer les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ~~tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (1-qx)f(qx)$~~

tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (1-qx) f(qx)$

S/ Analyse : Si une telle f existe il vient

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad f(x) = \prod_{k=1}^{n} (1-q^k x) f(q^n x)$

Pour $k \geq N$, $|q^k x| < 1$, $\ln\left(\prod_{k=N}^{n} 1-q^k x\right) = \sum_{k=N}^{n} \ln(1-q^k x)$

$= \sum_{k=N}^{n} -q^k x + O(q^k)$ ACV

car $q \in]0,1[$

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \underset{\text{par } \mathcal{C}^0}{f(0)} \prod_{k=1}^{+\infty} (1-q^k x)$

On suppose si le prod infini est continu.

DSE Analyse : s'il existe $\ell > 0$ tq $\forall x \in]-\ell, \ell[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

il vient $\forall x\,]-\ell,\ell[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-qx) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n$

On identifie $a_{n+1} x^{n+1} - a_n q^{n+1} x^{n+1} = -q^{n+1} a_n x^{n+1}$

donc $a_{n+1} = \dfrac{q^{n+1}}{q^{n+1}-1} a_n$

Synthèse : On pose $a_n = a_0 \prod_{k=1}^{n} \dfrac{q^k}{q^k - 1}$ $\quad \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{q^{n+1}}{q^{n+1}-1}\right| \longrightarrow 0$

On montre et c'est bon $R = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\mathcal{C}^\infty$

III FSE complexes

A) Exponentielle Rappels et approfondissements

$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ $\quad z \in \mathbb{C}$ (C+N)

$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

1) Exponentielle réelle

i) $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas et $e^0 = 1$: par $\mathcal{C}^0$ de $x \mapsto e^x$ et connexité de $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^x > 0$

ii) DTATSE $\forall x \in \mathbb{R}\ (e^x)' = e^x$. Donc exp est $\mathcal{C}^\infty$ strictement monotone

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \forall N \in \mathbb{R}\quad e^x \geq \dfrac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ $\quad \dfrac{e^x}{x^N} \longrightarrow +\infty$

wow

$e^{x} \longrightarrow +\infty$ | $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$

$e^{-x} \longrightarrow 0$

② Exponentielle $x \mapsto e^{ix}$

ⓘ $\forall x \in \mathbb{R}$, par continuité de $z \mapsto \bar{z}$: $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$

de là $|e^{ix}|^2 = e^{ix} e^{-ix} = 1$, et donc $e^{i} (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (S^1, \times)$

est un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^\infty$

ⓘⓘ on pose $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{Im}(e^{ix})$

* Les equations fonctionnelles viennent de $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$

** $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^{ix})' = i e^{ix}$ (calcul direct) | $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$

** $\cos(0) = 1$, $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < 0$

On pose $\frac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \mid \cos x = 0\}$

il vient $\forall x \in]0, \pi/2[$ $\sin' x = \cos x > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\nearrow$	$\alpha = 1$
$\cos x$		$+$	

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin^2 \pi/2 = 1 - \cos^2 \pi/2 = 1$

$e^{i\pi} = -1$

On utilise complété $e^{i(x+\pi/2)} = e^{ix} e^{i\pi/2} = i e^{ix}$

$(e^{i\pi/2})^4 = e^{2i\pi} = 1$

x		$\pi/2$	
$\sin x$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$ 0
$\cos x$	1 $\searrow$	0	$\searrow$ -1

ⓘⓘⓘ Groupe de périodes

$\mathrm{Ker}(e^{ix}) = G$ sg de $(\mathbb{R}, +)$, fermé $\neq \mathbb{R}$

donc $G = a\mathbb{Z}$ $a > 0$ | $2\pi \in G$ vérifions $\forall x \in]0, 2\pi[$ $e^{ix} \neq 1$

$$G = 2\pi\mathbb{Z}$$

③ Exponentielle complexe

$* \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, $|e^{x+iy}| = e^x$

$**$ exp est surjective $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

En effet si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z| \frac{z}{|z|} = e^{\ln(|z|)} u$, $u \in S^1$

écrivons $u = s + it$ pour ex $s < 0$, $t > 0$, $s^2 + t^2 = 1$

il vient $s = \cos x$ pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ $t = -\sqrt{1 - s^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
$= \sin x$

$$z = \exp(\ln|z| + ix)$$

B) Logarithme complexe :

① Détermination principale :

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ Soit $z \in \Omega$ $z = x + iy$, on écrit alors $z = e^{\ln|z|} e^{i\theta}$
avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, θ est unique car $e^{i\theta}|_{]-\pi,\pi[}$ est injective
$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Rightarrow \theta - \theta' \in G$
$\Rightarrow \exists$ $\theta' \in 2\pi l$
$l \in \mathbb{Z}$

Mq : $\theta = 2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x + |z|}\right)$ (1)

En effet si $z = |z|(s + it)$ il vient $\frac{y}{x + |z|} = \frac{t}{s + 1}$ $s + it = e^{i\theta}$

$s = \cos\theta$, $t = \sin\theta$, $\frac{t}{s + 1} = \frac{2 \sin\theta/2 \cos\theta/2}{2 \cos^2\theta/2} = \operatorname{tg}\theta/2$, $\theta/2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

alors $\frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{s+1}\right)$ et alors $\theta = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + |z|}\right)$

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\theta$$

2/10

Camarad

62

② DSE sur $D(1,1)$

On pose pour $z \in D(1,1)$ $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$

On va mq $\forall z \in D(1,1)$, $\exp(L(z)) = z$ (?)

ie $\forall \omega \in D(0,1)$, $\exp(L(1+\omega)) = 1+\omega$

$L(1+\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\omega^n}{n}$, Fixons $\omega \in D(0,1)$, posons $\psi(t) = L(1+t\omega)$, $t \in]-1,1[$

on pose $\varphi(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\psi(t)^p}{p!}$ | Régularité $\psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n \omega^n}{n}$

DTATSE $\psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \omega^n = \frac{\omega}{1+t\omega}$

$\varphi(t)$ est $\mathcal{C}^1$: $u_n(t) = \frac{\psi(t)^n}{n!}$ $u_n'(t) = \frac{n\psi(t)^n \psi'(t)}{n!}$

Fixons u $0 < u < \frac{1}{|\omega|}$, ψ est bornée (par M) pour $t \in [-u,u]$

$|u_n'(t)| \leq \frac{M^n}{(n-1)!} \|\psi'\|_{\infty,[-u,u]}$, on peut dériver TàT

$\varphi'(t) = \psi'(t) \underbrace{e^{\psi(t)}}_{\text{CMPLX}} = \frac{\omega}{1+t\omega} \varphi(t)$ | $\left(\frac{\varphi(t)}{1+t\omega}\right)' = 0$

$\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall t \in]-\frac{1}{|\omega|}, \frac{1}{|\omega|}[$ $\varphi(t) = \lambda(1+t\omega)$

$t=1$ $\exp(L(1+\omega)) = 1+\omega$ ✓

Comparaison sur $D(1,1) \subset \Omega$

$e^{\log z} = e^{L(z)} = z$ donc $e^{\log z - L(z)} = 1$, $\log(z) - L(z) \in i\pi\mathbb{Z}$

$\log - L$ est $\mathcal{C}^0$, nulle en 1 et $D(1,1)$ est connexe.

IV Propriétés complexes d'une FSE

A) Convergence $\mathcal{C}^0$:

$\mathcal{C}(\sum a_n z^n) = R$

1) $\sum a_n z^n$ CVN sur les compacts de $D(0,R)$ (de $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$)

2) $R < +\infty$ $\sum |a_n| R^n$ CV $\Rightarrow \sum a_n z^n$ est CV et est $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}(0,R)$

⚠ 1) $R = +\infty$ $\sum a_n z^n$ CVU sur $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \underbrace{S_{n+1} - S_n}_{a_{n+1} z^{n+1}} \xrightarrow{CVU} 0$

$\Rightarrow (a_n)$ est nulle $\Rightarrow f_a$ est un polynôme non borné dès que $|a_{n+1}| \neq 0$

2) $R < +\infty$ si $\sum a_n z^n$ CVU ~~est~~ sur $D(0,R)$ (ouvert)

$\sum a_n z^n$ vérifie le CCU sur $D(0,R)$ par $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}(0,R)$ | en particulier $\sum a_n z^n$ CV lorsque $|z| = R$

B) Zéros isolés

Ex Soit $f_a = \sum a_n z^n$ une SE de rayon $R > 0$, avec $(a_n) \neq (0)$

Alors $\exists r \in]0,R[, \forall z \in D(0,r) \setminus \{0\}$ $f(z) \neq (0)$

S/ 1er cas: $f(0) = a_0 \neq 0$ la continuité de f donne le résultat

2e cas: $f(0) = 0$, or $(a_n) \neq (0)$ Soit $p = \min\{n \geq 0 \mid a_n \neq 0\} \geq 0$

Soit $z \in D(0,R) \setminus \{0\}$, $f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n = \underbrace{z^p}_{\neq 0} \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^{n}$

Ainsi $g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^{n-p}$ est une FSE définie donc $\mathcal{C}^0$ sur $D(0,R)$

et $\forall z \in D(0,R)$ $f(z) = z^p g(z)$, or $g(0) \neq 0$ donc $\exists r \in]0,R[$, $\forall z \in D(0,r)$ $g(z) \neq 0$

Application : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur $D(0,e)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) z^n = 0$ sur $D(0,e)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$

RM : La m̂ méthode donne $f(z)-(a_0+\dots+a_p z^p) = z^{p+1} h(z)$

? avec h FSE continue, donc bornée au voisinage de 0

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + O(z^{p+1})$$

$\rightarrow$ Fonctions analytiques

c) Représentation intégrale des coefficients

thm $\rightarrow$ Ex : Soit $\sum a_n z^n$ une FSE de rayon $R>0$. Soit $r \in]0,R[$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} \, dt$$

Dm $\rightarrow$ S/ Soit $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \ (= f(re^{it}))$, comme $\sum |a_n| r^n$ converge, $\sum a_n r^n e^{int}$ CVN sur le segment $[0,2\pi]$ (on peut aussi faire BL)

On multiplie par e^{-ipt}, il vient : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} \, dt$

$$= a_p r^p 2\pi$$

qu'est ce qu'on peut dire si une SE est bornée sur R
RIEN

Ex Liouville On suppose la FSE $\sum a_n z^n$ de rayon $+\infty$ et bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est cste.

S/ Soit $p \geq 1$ $\displaystyle |a_p| = \left| \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \, dt$

$$\leq \frac{M}{r^p} \quad (M = \|f\|_{\infty, \mathbb{C}})$$

$r \rightarrow +\infty$: $a_p = 0$

Ex : Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une FSE de rayon 1 tq $\forall z \in D(0,1) \ |f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^* \ |a_n| \leq (n+1)e$

S/ Soit $n \geq 1$: Soit $r \in]0,1[$:

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt}\, dt \right|$$

De là $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \times \frac{2\pi}{1-r} \leq \frac{1}{r^n(1-r)}$

Choix de r → optimisation, $r = \frac{n}{n+1}$ $|a_n| \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e$

Formule de Cauchy : $\mathcal{C}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) = R$, $f_a = f$, $r \in]0,R[$

Soit $z \in D(0,r)$, alors $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it}\, dt$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{cercle}} \frac{f(w)\, dw}{w - z}$$

D/ f est bornée sur $C_r = \{|w| = r\}$. On écrit

(I) $\frac{re^{it}}{re^{it} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{re^{it}}} = \sum_{p=0}^{+\infty} z^p / r^p e^{-itp}$ $\left|\frac{z^p}{r^p} e^{it}\right| = q^p$, $q < 1$

$\left|\frac{z}{r}\right| = q < 1$

il y a CVN pour $t \in]0, 2\pi[$, f est bornée, donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it}\, dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{z^p}{r^p} e^{-ipt}\, dt$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} 2\pi a_p z^p \text{, OK}$$

D) L'algèbre du disque

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{C}(\overline{D}(0,1)) \mid f \text{ DSE sur } D(0,1) \}$

$\sum |a_n| < +\infty$
$\Rightarrow z \mapsto \sum a_n z^n \in \mathcal{A}$
Il y en a d'autres !

famille sommable CMPLX ⇒ famille CMPLX absolument sommable

Ex : $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire intègre

S/ Produit Si $f, g \in \mathcal{A}$, fg est $\mathcal{C}$ sur $D(0,1)$

f et g DSE sur $D(0,1)$, par produit de Cauchy ACV

f, g est DSE sur $D(0,1)$

Intégrité Valuations Hyp : $(a_n) \neq (0)$, $(b_n) \neq 0$

$\exists p$ $f(z) = z^p \tilde{f}(z)$ sur $D(0,1)$ avec $\tilde{f}(0) \neq 0$, $\tilde{g}(0) \neq 0$

$\exists q$ $g(z) = z^p \tilde{g}(z)$

Par $\mathcal{C}^0$, $f(z)g(z) = z^{p+q} \tilde{f}(z)\tilde{g}(z)$, n'est pas nul sur $D(0,r)$, $0<r<1$

X-ENS **Ex** Soit $f \in A$, si $f_{|\mathbb{U}} \equiv 0$, alors $f \equiv 0$

S/ Soit $p \geq 1$ et $r \in]0,1[$ $a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(re^{it})}_{\varphi_r} e^{-ipt} dt$

par $\mathcal{C}^0$ de f sur $\underbrace{\overline{D}(0,1)}_{\text{compact}}$ $\begin{cases} \forall r \in \forall t \in [0,2\pi] \; |\varphi_r(t)| \leq \|f\|_{\infty, \overline{D}(0,1)} \\ r \to 1^- \; \varphi_r \xrightarrow{CVS} (t \mapsto f(e^{it})) \end{cases}$

Convergence dominée (Continue une constante $\in L^1([0,2\pi])$)

à revoir $\int_0^{2\pi} \varphi_r e^{-ipt} \longrightarrow \int_0^{2\pi} \underbrace{f(e^{it})}_{=0 \text{ (Hyp)}} e^{-ipt} dt = 0$ $|$ $a_p = 0$, car $r \mapsto \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt$ constante

Ex Soit $f \in A$ Mq $\exists (P_n) \in \mathbb{C}[z]^{\mathbb{N}}$, $P_{n|\overline{D}(0,1)} \xrightarrow{CVU} f$

S/ Soit $\varepsilon > 0$, Soit $\delta > 0$ tq selon Heine sur le compact $\overline{D}(0,1)$ appliqué à f $\mathcal{C}^0$ $\forall (z,w) \in \overline{D}(0,1)^2$ $|z-w| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$

On envisage $g : z \longmapsto f\left(\frac{z}{1+\delta}\right)$

① Si $z \in \overline{D}(0,1)$, $\left|z - \frac{z}{1+\delta}\right| \leq \delta$ donc $|g(z) - f(z)| \leq \varepsilon$

② Si $|z| \leq 1+\delta$ $g(z) = f\left(\frac{z}{1+\delta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(1+\delta)^n} z^n$

$\overline{D}(0,1)$ est un compact de $D(0, 1+\delta)$, il existe N tq $\forall z \in \overline{D}(0,1)$ $|f(z) - P_N(z)| \leq 2\varepsilon$

↳ P_N : somme de groupée à N

V Fonctions analytiques réelles (HP) I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^n$

Voc : Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Soit $a \in I$ on dit que a est un point d'analyticité de f lorsque il existe $r > 0$ tq $]a-r, a+r[\subset I$, la fonction

$$g \left| \begin{array}{l}]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C} \\ h \longmapsto f(a+h) \end{array} \right. \text{ est DSE sur }]-r, r[$$

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n h^n, \ \mathcal{R}\left(\sum \alpha_n X^n\right) \geq r, \ h \in]-r, r[$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$$

Condition nécessaire : f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Ex : 1) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, f est $\mathcal{C}^\infty$ mais $\forall n$ $f^{(n)}(0) = 0$ (Taylor)

donc la série de Taylor de f est nulle, mais pas f.

2) Equation fonctionnelle i) $f(x) = \log x$, $x > 0$, soit $a > 0$

$$\log(a+h) = \log a + \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) \underset{|h| < a}{=} \log a + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n a^n}$$

ii) $e^{a+h} = e^a e^h$ ..., cos, sin, ch, sh sont analytiques

3) Transformées intégrales : Soit $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on pose pour $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\, dt \text{ est analytique. Soit } a > 0, \text{ il vient :}$$

$$f(a+h) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-ht} g(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n t^n}{n!}\right) g(t)\, dt$$

$$\underset{(x) \text{ formel}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-at} g(t)\, dt$$

on fait BL : on regarde $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{|h|^n}{n!} t^n \underset{\text{ne sentant pas développer}}{e^{-at}} g(t)\, dt$

$$\leq \frac{|h|^n \|g\|_\infty}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,dt = \frac{|h|^n}{a^{n+1}} \|g\|_\infty$$

donc $0 \leq u_n \leq \left|\frac{h}{a}\right|^{n} \frac{1}{a} \|g\|_\infty$ CV dès que $|h| < |a|$, donc la f est bien analytique

(ii) f à support compact $\subset [-A, A]$ $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} = \hat{f} = \int_{-A}^{A} f(t) e^{-2i\pi x t}$

$$= \int_{-A}^{A} \underbrace{f(t)}_{\text{borné car } \mathcal{C}^0} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi x t)^n}{n!}}_{\text{CVU sur } [-A,A]} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n} \int_{-A}^{A} t^n f(t)\,dt$$

Problèmes généraux : Condition pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ soit analytique

Exo (Mines-Centrale) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f^{(n)}(x)| \leq 2^n |P(x)|$

Que dire de f ?

S/ $\exists a \in \mathbb{R}$ $P(a) = 0$ (H) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(a) = 0$

$$\left|f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) h^k}{k!}\right| \underset{\text{Taylor à l'ordre } n+1}{=} \left|\int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \underset{h \geq 0 \text{ par ex}}{\leq} \frac{1}{n!} \int_a^{a+h} |a+h-t|^n 2^{n+1} |P(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{2^{n+1} h^{n+1}}{n!} \|P\|_{\infty, [a, a+h]} \longrightarrow 0$$

Ex S'il existe $M > 0$, $R > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$ $|f^{(n)}(x)| \leq M n! R^n$ alors f est analytique sur I (en tout pt de I)

Suit Taylor : Soit $a \in I$ et $\delta > 0$ $]a-\delta, a+\delta[\subset I$, soit $h \in]-\delta, \delta[$

$$\left|f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k\right| \underset{\text{TaLa}}{\leq} M R^{n+1} (n+1)! \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $|h|R<1$ il vient $\exists \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k = f(a+h)$

* Fonctions absolument monotones

R => estimation du reste de Taylor

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)} \geq 0$ alors f est analytique et si $a \in I$, $a \in]b,c[\subset I$ avec $c > a$, le rayon de CV de $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} X^n$ est $\geq$ à $c-a$

S/ On suppose par translation $a=0$ $b<0<c$, $]b,c[\subset I$

Reste de Taylor : Soient x,y $a<x<y<c$ il vient

i) $f(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k + \underbrace{\int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$, de là

$0 \leq R_n(f,0,y) \leq f(y)$

ii) $0 \leq R_n(f,0,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\geq 0} dt = \int_0^x \left(\frac{x-t}{y-t}\right)^n (y-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$

$\leq \left(\frac{x}{y}\right)^n \int_0^x \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

$\leq \left(\frac{x}{y}\right)^n \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(f,$

CCP : $R_n(f,0,x) \to 0$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \to f(x)$

Soit $-c<x<0$ et $b<x<0$ et soit $x' = -x \in]0,c[$

$|R_n(f,0,x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

$\leq x' \cdot x'^n \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}$ (croissance de $f^{(n+1)}$, $0 \leq t-x \leq -x = x'$)

ie $|R_n(f,0,x)| \leq (n+1) \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$. Or $\sum (n+1) \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ CV

$\to R_n(f,0,x) \to 0$

70

Ex : $f(x) = x^x$ sur $]0,+\infty[$. existe-t-il $a > 0$ tq $\forall n\ f^{(n)} \geq 0$ sur $]a,+\infty[$?

S/ Si un tel a $\forall c > a$ $\left(\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right) \geq c-a$

$c-a$ choisi arbitrairement

le rayon de cette série est $+\infty$ on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$g = f$ sur $[a,+\infty[$

avec le TPPA + (loui) $g = f$ sur $]0,+\infty[$ $\quad f'(x) = (1+\ln x)x^x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$

Pb : f n'admet pas de prol C^1 en 0

VI Fonctions analytiques complexes

Même def : avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$

Ex Soit $\sum \alpha_n z^n$ une SE de rayon $R > 0$ et f sa somme, on définit $f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\dots(n+1)\alpha_{n+p} z^n$ $\quad \left(R\left(f^{(p)}\right) = R\right)$

Soit $a \in D(0,R)$, $|a| < R$ $\quad \Big| \ \forall h \in \mathbb{C}, |h| < R - |a| \Rightarrow f(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(a)}{p!} h^p$

S/ On effectue un calcul formel :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(a)}{p!} h^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)\dots(n+1)}{p!} \alpha_{n+p} a^n\right) h^p$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{p+n=m \\ n,p \geq 0}} \binom{m}{p} a^n h^p\right) \alpha_{n+p}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m (a+h)^m$$

$$= f(a+h)$$

Preuve : Valeur absolue. Soit $u_{n,p} = \binom{n+p}{p} |\alpha_{n+p}| |a^n| |h|^p$

On refait le calcul sur $[0,+\infty[$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n+p=m} u_{n,p}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n+p=m} \binom{m}{p} |a|^n |h|^p\right) |\alpha_m| =$$

Produit de 2 fcts DSE

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} |d_m| (|u|+|h|)^m < +\infty \text{ dès que } |u|+|h| < R = \rho\left(\sum |\lambda_m| X^m\right)$$

<u>Généralisation</u> : "Ex" Soit g DSE sur $D(0,R)$. Soit f DSE sur $D(0,R_f)$ avec $R_g > 0$, $R_f > 0$, si $|f(0)| < R_g$, $z \mapsto g \circ f(z)$ est définie et DSE sur un disque $D(0,\rho)$, $\rho < R_f$

D/ Du fait que $\left| \begin{array}{l} |f(0)| < R_g \\ f \ \mathcal{C}^0 \text{ en } 0 \end{array} \right.$, $\exists \rho_1 \in]0, R_f[$ tq $\forall z \in D(0,\rho_1)$: $f(z) \in D(0,R_g)$

<u>On introduit</u>, pour $|z| < R_f$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $f_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n \ (= (f(z))^p)$

$$\tilde{f}_p(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n\right)^p \ (= \tilde{f}(z)^p) \qquad \Big| \text{ Produit de Cauchy, ACV}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,p} |z|^n$$

$$\left. \begin{array}{l} g(w) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p w^p \\ \tilde{g}(w) = \sum_{p=0}^{+\infty} |b_p| w^p \end{array} \right| \text{ ACV si } |w| < R_g$$

1) $\forall n,p$, $|a_{n,p}| \leq \alpha_{n,p}$ (récurrence sur p, Cauchy convolution)

2) $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^0$ (composée de $z \mapsto |z|$ et d'une SE)

$$|\tilde{f}(0)| = |f(0)| < R_g \text{ (hyp)}$$

$\to \exists \rho > 0$ tq, $\forall z \in D(0,\rho)$: $0 \leq \tilde{f}(z) < R_g$

<u>et donc</u> : $\sum |b_p| \tilde{f}(z)^p = \sum |b_p| \tilde{f}_p(z) \quad \forall z \in D(0,\rho)$: <u>CV</u>.

<u>Ainsi</u>, $\underbrace{\sum_{p \in \mathbb{N}} |b_p| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{n,p} |z|^n\right)}_{\sum_{(p,n) \in \mathbb{N}^2} |b_p| \alpha_{n,p} |z|^n}$ <u>converge</u> : la famille $(|b_p| \alpha_{n,p} |z|^n)$ est <u>sommable</u>, si $|z| < \rho$.

Or $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $|b_p a_{n,p} z^n| \leqslant \underbrace{|b_p|\alpha_{n,p}|z|^n}_{\text{dominante}}$

et donc $(b_n a_{n,p} z^n)$ est sommable.

→ Correctement, si $|z|<\rho$: $\exists \sum_{p=0}^{+\infty} b_p\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} z^n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p f^p(z)$

$= g\circ f(z)$

$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sommabilité}}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}b_p\right) z^n$

Ex : f : DSE au $v(0)$, e^f aussi
DSE sur $D(0,R)$, e^f aussi

Ex : principe du prolongement analytique

Données : Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$

a) Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction analytique non-constante.
Alors, les zéros de f sont isolés

b) Soit $g:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction analytique.
S'il existe $A\subset\Omega$, tq :
| $\forall z\in A$, $f(z)=g(z)$
| A possède un pt d'accumulation dans Ω
alors : $\boxed{f=g}$

S| a) * Soit a un zéro de f non-isolé.

Hyp : $\exists r>0$, $D(a,r)\subset\Omega$, et $\forall h\in D(0,R)$:

$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n h^n$

$f(a)=0$, et $\exists (h_k)\in D(0,r)^{\mathbb{N}}$:

$h_k\to 0$, $f(a+h_k)=0$ et $\forall k$: $h_k\neq 0$

(h_k) suite de zéros de $\sum\alpha_n z^n$ avec $h_k\to 0$, $h_k\neq 0$

Zéros isolés : $\forall n$, $\alpha_n = 0$

→ f est nulle sur $D(a,r)$.

** Soit $A=\{a\in\Omega \mid f$ est nulle au $v(a)\}$

- A est clairement ouvert
- A est non-vide par hyp.

Soit $b\in\bar{A}$. Pour tout $\varepsilon>0$, $D(b,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$.

Soit $a_\varepsilon\in D(b,\varepsilon)\cap A$.

ayant que f est nulle au $v(a_\varepsilon)$, donc $D(b,\varepsilon)$ contient une influité de zeros de f $\to$ $f(b)=0$ par continuité, b non-isolé.

$\Rightarrow b \in A$

Cc : A est ouvert et fermé non-vide dans le connexe Ω :

$\Rightarrow \boxed{A = \Omega}$

b) $(f-g)$ possède alors un zéro non-isolé

$\to$ $f \equiv g$.

(Retour à $x^x = e^{x\ln(x)}$ pour $x>0$; $x\ln(x)$ est analytique

par composition, $e^{x\ln(x)}$ est analytique.)

Holomorphie :

» Ex : Soit $\sum a_n z^n = f$ une FSE de rayon $R>0$

Soit $z \in D(0,R)$.

Mq : $\exists \lim\limits_{\substack{w\to z \\ w\neq z}} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$.

S/ Calcul : $\dfrac{w^{n+1}-z^{n+1}}{w-z} - (n+1)z^n = \sum_{k=0}^{n} w^{n-k} z^k - (n+1)z^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} (w^{n-k}z^k - z^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(w^{n-k}z^k - z^n)}_{z^k(w^{n-k}-z^{n-k})}$$

$$= (w-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-k-1} w^{n-k-\ell-1} z^\ell\right)$$

$$\to \left|\frac{w^{n+1}-z^{n+1}}{w-z} - (n+1)z^n\right| \leq |w-z|\, n^2 \left(\cancel{\ldots}\right)^{n-1} \max(|z|,|w|)^{n-1}$$

Écrivons ensuite $\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \dfrac{w^{n+1}-z^{n+1}}{w-z}$

$$\to \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\left(\frac{w^{n+1}-z^{n+1}}{w-z} - (n+1)z^n\right)$$

$$\to \left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z-w|\, n^2 |a_{n+1}| \left(\cancel{\ldots}\right)^{n-1}$$

On impose, $\cancel{|w|+|z| < \rho < R}$; $\boxed{\max(|z|,|w|) \leq \rho < R}$; $\max(|z|,|w|)^{n-1}$

$$\leq |z-w| \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |a_{n+1}|\, \rho^{n-1} \quad \underline{CV}$$

» Exercice : Intégrale de chemin :

Soit $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \underbrace{\gamma([a,b])}_{\text{compact}}$:

$$f(z) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$

ouvert

$\underline{\text{Mq}}$ f est $\underline{\text{analytique}}$

5/ $f(c+h) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c-h}\,dt \qquad c \notin \gamma([a,b])$

$$= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-c)\left(1 - \frac{h}{\gamma(t)-c}\right)}\,dt$$

$\underline{\text{On suppose}}$: $\underline{|h| < \tfrac{1}{2} d(c, \gamma([a,b]))}$.

$\underline{\text{alors}}$ $\frac{1}{1-\frac{h}{\gamma(t)-c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{h^n}{(\gamma(t)-c)^n}}_{\text{CVN en } t}$, $\left|\frac{h^n}{(\gamma(t)-c)^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$

(CVN intégration sur un sgmt : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-c)^{n+1}}\right) h^n\,dt$

IV Etude au bord de l'intervalle de convergence

Rappel : $\sum a_n R^n$ converge alors f $z \longmapsto \sum_0^{+\infty}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}(0,R)$ (→ polaires)

A) Coefficients positifs :

Soit $a_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ on suppose $\rho(\sum a_n x^n) \geqslant 1$ et on pose

$$f \left| \begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

$\underline{\text{Prop}}$: $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[, \mathbb{R})$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in]-1,1[$ $f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p) \dots (n+1) x^n$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $f^{(p)} \geqslant 0$ aussi f est convexe sur $]0,1[$

Proba $X : \Omega \longrightarrow$

$\underline{\text{Th}}$. $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$

a) f admet une limite en 1^- dans $[0,+\infty[$, cette limite est finie ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

b) On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ ssi $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ converge, dans ce cas $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ $\left(= \sum_{n=1}^{} n P(X=n)\right)$

D/ a) si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, les a_n étant positifs, $\sum a_n x^n$ CVN sur $[0,1]$

* On regarde f en 1^-, la fonction f croît sur $[0,1[$ donc possède une limite $\ell \in [0,+\infty[$.

si $\ell < +\infty$: lim monotone. Soit $N \in \mathbb{N}$, $x \in [0,+\infty[$

$a_n > 0$ $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant f(x) \leqslant \ell$; on fait $x \to 1^-$ d'où $\sum a_n \leqslant \ell$
interversion

b) Sur $[0,1[$ DTATSE, il vient $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ CVN

* Si $\sum n a_n$ CV, (a_n) étant positive la série $\sum n a_n x^{n-1}$ CVN sur $[0,1]$

Il y a une interv. converge ?

donc f est dérivable et $f'(1) = \sum^{+\infty} n a_n$

($\Rightarrow$) f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a vu que f' croît sur $[0,1]$: il vient : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$$

$$x \to 1 : \quad \sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$$

$\to (\sum n a_n)$ CV ; avec $((\Leftarrow))$, $\boxed{f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n}$

B) Abel and Co (HP)

CPI : On dispose d'une suite $u_n \searrow 0$, $\mathcal{C}(\sum (-1)^n u_n x^n) \geqslant 1$

On note f la somme de cette série sur $[0,1[$

Ex : $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^n$ } Leibniz

5/ On observe que, en posant $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ (sans avoir a priori la continuité de f), la majoration des séries alternées appliquée à $(-1)^n u_n x^n$, ayant $|(-1)^n u_n x^n| = u_n x^n$ qui décroît vers 0, si $x \in [0,1]$, donne : $\forall n, \forall x \in [0,1]$: $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k x^k \right| \leqslant u_{n+1} x^{n+1} \leqslant u_{n+1}$

$\to$ $R_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0,1]$
$\Rightarrow$ il y a CVU sur $[0,1]$

$\Rightarrow f$ est continue.

Application :

① Si $x \in [0,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$\left| \underbrace{\exists \lim_{1^-} f}_{\ln(2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right.$ $\ln(2) = $ "

② Si $x \in [0,1[$, $\text{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

$\left| \underbrace{\exists \lim_{1^-} f}_{\frac{\pi}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right.$

Thm d'Abel : Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CV.

$\longrightarrow f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $[0,1]$

Alors, $\exists \lim_{1^-} f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

D/ On va montrer la CVU sur $[0,1]$, et pour ce faire : CCU, en utilisant

$a_n = R_n - R_{n-1}$ $(\underbrace{R_{-1} = S}_{\sum a_n})$ $(R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} a_n)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^*$, tq $\forall n \geq N$: $|R_n| \leq \varepsilon$

Soit $m \geq n \geq N$; $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n}^{m} (R_{k-1} - R_k) x^k \right|$

$$= \left| \sum_{k=n-1}^{m-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{m} R_k x^k \right|$$

$$= \left| R_{n-1} x^n - R_m x^m + \sum_{k=n}^{m-1} R_k \underbrace{(x^{k+1} - x^k)}_{\leq 0} \right|$$

$$\leq |R_{n-1}| x^n + |R_m| x^m + \sum_{k=n}^{m-1} |R_k| (x^k - x^{k+1})$$

$$\leq \varepsilon x^n + \cancel{\varepsilon x^m} + \varepsilon (x^n - \cancel{x^m})$$

$$\leq 2\varepsilon x^n$$

$$\boxed{\left| \sum_{k=m}^{n} a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon}$$

$\longrightarrow$ On a apriori le CCU : f est continue.

Problème réciproque (Tauber)

On suppose $\left| \begin{array}{l} \rho(\sum a_n x^n) \geq 1 \\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$, $x \in [0,1[$

et que $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$

A-t-on $\underline{\underline{\sum_{n=0} a_n = P}}$:

en fait, non en général.

$a_n = (-1)^n$, $f(x) = \frac{1}{1+x} \cdots$

$\cancel{x} \qquad \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{2}$

X-82 : Condition sur (a_n) pour que ça marche,

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (Hardy-Littlewood)

$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (Tauber)

3) Étude asymptotique au bord :

Ex : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} = f$ | $R=1$: $|x| > 1$ DV, $|x| < 1$ CV

pb : équivalent en 1^-

S1 : Comparaison série-intégrale :

on pose $x = e^{-t}$, $t > 0$ (on intend de faire partir t vers 0^+)

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2^n t}$$

(!) Idée : On compare à $\int_0^{+\infty} e^{-2^u t}\, du$

à $t > 0$ fixé, on a :

$$e^{-2^{n+1} t} \leq \int_n^{n+1} e^{-2^u t}\, du \leq e^{-2^n t} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-2^u t}\, dt$$

$$g(t) - e^{-t} \leq \int_0^{+\infty} e^{-2^u t}\, du \leq g(t)$$

On pose $v = 2^u$ ie $u = \frac{\ln(v)}{\ln(2)}$, $du = \frac{dv}{v \ln(2)}$ | $u=0$: $v=1$, $u \to +\infty$: $v \to +\infty$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2^u t}\, du = \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{+\infty} e^{-vt} \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w}\, dw$$ (t est fixé, c'est le paramètre)

en 0^+, l'intégrale diverge ; $\frac{e^{-w}}{w} \sim \frac{1}{w}$ positifs

$$\rightarrow \int_t^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w}\, dw \underset{t \to 0^+}{\sim} \int_t^1 \frac{dw}{w} \underset{t \to 0^+}{\sim} -\ln(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow \underline{g(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2)}}$$

$$\rightarrow f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \quad \left(f(x) = g\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$\to f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{\ln(2)} \ln(\underbrace{\ln(\tfrac{1}{x})}_{\sim 1-x})$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{\ln(2)}} \checkmark$$

S2, régularisation : $(a_n) \to (\sum_{k=0}^{n} a_k)$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{(1+x+x^2+\dots)} f(x) = \sum_{N=1}^{+\infty} \Big(\sum_{2^k \leqslant N} 1 \Big) x^N = \sum_{N=1}^{+\infty} \Big(\frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \underbrace{\alpha_N}_{\text{borné}} \Big) x^N .$$

Rlues-centrale) $\sum_{N=1}^{+\infty} \log(N) \cdot x^N = \sum_{N=1}^{+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}\right)x^N}_{\frac{1}{1-x}(-\log(1-x))} + \sum_{N=1}^{+\infty} \underbrace{\beta_N}_{\text{borné}} x^N$

$$\Big(\sum_{N=1}^{+\infty} \overbrace{(\alpha_N+\beta_N)}^{\text{borné}} x^N \Big) \leqslant M(1+x+x^2+\dots) \leqslant \frac{M}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \cdot \frac{1}{\ln(2)} + O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\to \boxed{f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\ln(2)} + O(1)}$$

• **Ex,** En $+\infty$: soient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x)$ deux FSE

de rayon $+\infty$. On suppose $\left| \begin{array}{l} a_n > 0 \text{ pour } n \geqslant N \\ b_n \underset{+\infty}{=} o(a_n) \end{array} \right.$

$\to$ Mq $g \underset{+\infty}{=} o(f)$.

S/ * Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_\varepsilon \geqslant N$ tq $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, $|b_n| \leqslant \varepsilon a_n$.

Correctement, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \left|\sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} b_n x^n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} a_n x^n$

1er cas : tous les a_k sont positifs ; alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\Big| \underbrace{\sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} b_n x^n}_{g(x)-P(x),\ P \text{ polynôme}} \Big| \leqslant \varepsilon f(x)$$

$$|g(x)| \leqslant |g(x) - P(x)| + |P(x)| \leqslant \varepsilon f(x) + |P(x)|$$

. Soit $\left.\begin{array}{l} n \geqslant N \\ > n_\varepsilon \end{array}\right)$, il vient $f(x) \geqslant a_n x^n$ et $|P(x)| = o(a_n x^n)$ (degré)

$\to \exists A > 0$ tq, $\forall x \geqslant A$: $|P(x)| \leqslant \varepsilon f(x)$

$\rightarrow$ CQ : $\forall x \geq N_1 \quad |g(x)| \leq \varepsilon f(x)$

2^e cas : cas général.

On montre $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \tilde{f}(x) : x \longmapsto \sum_{N}^{+\infty} a_n x^n$

$$\begin{cases} f(x) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k = P \ , \ \deg(P) \leq n-1 \\ f(x) \geq \underbrace{a_N}_{>0} x^N + P \quad \text{avec} \quad P \underset{+\infty}{=} o(a_n x^n + P) \end{cases}$$

il en résulte : $f(x) - \tilde{f}(x) = o(f(x))$

$\rightarrow$ (cc) 1er cas : $g = o(\tilde{f})$, $f \sim \tilde{f}$ $\rightarrow \boxed{g = o(f)}$

80