Probabilités

Préliminaires : ① logique si $\left| \begin{array}{l} A = \{P \text{ est vraie}\} \\ B = \{Q \text{ est vraie}\} \end{array} \right.$

$A^c = \{\neg P\}$, $A \cap B = \{P \wedge Q\}$, $A \cup B = \{P \vee Q\}$

② Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$

$$A = \bigcap_{N=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \right) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ infiniment souvent}\}$$

I Tribus :

Soit E un ensemble. On appelle tribu $\mathcal{T}$ sur E une famille de parties de E - $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ - qui vérifie les propriétés suivantes

1) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$
2) Si $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$
3) Si $A \in \mathcal{T}$, $A^c \in \mathcal{T}$

Ex $\{\emptyset, E\}$, $\mathcal{P}(E)$ ($\to E$ dénombrable)

Props : ① Soit $\mathcal{T}$ une tribu, Soit $(A_n) \in \mathcal{T}$

i) $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathcal{T}$

ii) $\bigcap_{i=1}^{N} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \right)^c \in \mathcal{T}$ $(A_i^c \in \mathcal{T})$

② Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Il existe une suite $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ formée d'ensembles 2 à 2 disjoints tq $\bigcup_{i=0}^{N} A_i = \bigcup_{i=0}^{N} B_i$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

D/ On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, ..., $B_m = A_m \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{m-1})$

Pour tout i les props sont vérifiées etc.

③ Tribu engendrée

① Si $(\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de tribus sur E, $\bigcap \mathcal{T}_\lambda$ est aussi une tribu

Soit X une partie de $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{T}(X) = \bigcap\limits_{\mathcal{T} \text{ tribu} \supset X} \mathcal{T}$

Ex: Tribu boréliene sur $\mathbb{R}$. On prend pour X les ouverts de $\mathbb{R}$

Not $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ contient tous les fermés par complémentarité

$\Rightarrow$ points $\Rightarrow \mathcal{B} \supset \mathbb{Q}$

dém

$\supset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Ex Si $A_1, \dots, A_m$ des parties de E incluant $\emptyset$ et E

On note $\mathcal{T}_a \{ A_\varepsilon \mid$ où $\varepsilon \{1, \dots, m-1\} \to \{1, -1\}$, $A_\varepsilon = \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i^{\varepsilon(i)} \}$

Les éléments de $\mathcal{T}_a$ sont deux à deux disjoints. La tribu engendrée par par $A_1, \dots, A_m$ est l'ens de reunion d'ens $\in \mathcal{T}_a$

$A_i^1 = A_i$

$A_i^{-1} = \bar{A_i}$

Ex: Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$, A_n 2 à 2 disjoints, $\bigcup A_n = E$

$\mathcal{T}$ est engendré par les A_n est $\{ A_I \mid I \subset \mathbb{N}, A_I = \bigcup\limits_{n \in I} A_n \}$

$(X : \Omega \to \mathbb{N}, A_n = \{X_n = n\})$

3.2

En effet : $E = \bigcup A_n \in \mathcal{T}$ $\emptyset = \bigcup_{\emptyset} A_n \in \mathcal{T}$ $\mathcal{T}$ est stable par $\cup$ dén et si $I \subset \mathbb{N}$, $E \setminus A_I = A_{\mathbb{N} \setminus I}$

(I1) Image réciproque
Soit $f : E \to F$ si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, l'image réciproque de $\mathcal{T}'$ par f $\{f^{-1}\langle A' \rangle, A' \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur E

Si $f^{-1}\langle \mathcal{T}' \rangle \in \mathcal{T}$, on dit que $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{T}')$ est mesurable

II Espaces probabilistes

Déf : Soient E un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur E (événements)

On dit que $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ est une probabilité lorsque :
1) $P(\emptyset) = 0$, $P(E) = 1$
2) Si $A_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, et si les A_n sont 2 à 2 disjoints,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Props : 1) Si $A_0, \dots, A_n$ sont est év^ts 2 à 2 disjoints

$$P(A_0 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$

2) Croissance si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$

3) Soit $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ (TU)

$$P(A_0 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$ + Formule de Poincaré

~~D/ On pose $B_0 = A_0$~~

4) On suppose $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ et $\forall n$ $A_n \subset A_{n+1}$, Soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ alors $P(A_n) \to P(A)$
preuve à refaire

Conséquence : $A_n \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

(dans $[0,+\infty[$)

D/ $A_0 \cup \dots \cup A_n \nearrow A$ $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_0 \cup \dots \cup A_n)$

$\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$

5) Si $A_{n+1} \subset A_n$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

Em effet : $\bigcup_{k=0}^{n} A_k^C$ tend vers $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C = A^C$

$P(\text{"}) \longrightarrow P(A^C)$

$1 - P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \longrightarrow 1 - P(A)$

III Ensembles presque sûrs, négligeables

Def : Soit $\mathcal{C} \ni A$ | A presque sûr $\underset{\Delta}{\Leftrightarrow} P(A) = 1$

| A négligeable $\underset{\Delta}{\Leftrightarrow} P(A) = 0$

Propriétés : ① $A \subset B$, A ps $\Rightarrow B$ ps ② $\forall n$ A_n négligeable alors $\bigcup A_n$ nég

$B_n \Rightarrow A_n$

$P(\bigcup A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = 0 \dots$

Exo : Si $\sum P(A_n)$ CV, que dire de $\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n\geq N} A_n\right)$?

en effet $P(\bigcup A_n) \leqslant \varepsilon \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

③ Si $\forall n$, A_n est ps, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est ps.

D/ $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c}_{\text{négligeable}}$. Donc $(\bigcap A_n)^c$ est négligeable.

Ex : Si $\sum P(A_n)$ CV, que dire de $\bigcap_{N=0}^{+\infty} (\bigcup_{n \geqslant N} A_n)$?

IV - Exemples d'espaces probabilisés (Images)

① Ensembles finis

ⓐ Équiprobabilité, X fini $\neq \emptyset$; on pose, si $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|X|} \dots$$

ⓑ Bernoulli : $\mathcal{B}(n,p)$ $\Big| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ p \in]0,1[\end{array}$

$E = [\![0,n]\!]$; $P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $\sum_{k=0}^{n} P(\{k\}) = (p+(1-p))^n = 1$ ✓

Si $A \subset E$, $P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$

② E dénombrable, $E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, énumération bijective (problèmes pour la répétition sinon)

soit (a_n) une suite de nombres positifs tq $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$; si $A \in \mathcal{T}$, on pose $P(A) = \sum_{x_n \in A} a_n$

$\Big| \begin{array}{l} P(\emptyset) = 0 \\ P(E) = 1 \end{array}$. Si les (A_n) sont deux à deux disjoints

et $A = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}_{\text{partition}}$; il vient, par le thm d'associativité

pour les familles sommables positives : $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{x_m \in A_n} x_m \right)$

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Ex : ① $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 1$: $P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a)\, n^a}$

(Cf : Si $\underset{\text{Transformée de Laplace}}{\mathcal{L}_X} \sim P$, $\Big| \underset{t > 0}{E(e^{t \cdot X})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{tn}}{\zeta(a)\, n^a} = +\infty$)

② $p \in]0,1[$; loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, $P(n) = (1-p)^{n-1} p$

(somme = 1 ✓)

⑤ Loi de Poisson : Soit $\lambda > 0$, $E = \mathbb{N}$, $P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1 \checkmark$$

Loi produit : $E = \{x_n\}$, $F = \{y_m\}$

$$\begin{cases} P(x_n) = a_n \geq 0 \, , & \sum_{0}^{+\infty} a_n = 1 \\ P(y_m) = b_m \geq 0 \, , & \sum_{0}^{+\infty} b_m = 1 \end{cases}$$

On définit la probabilité produit, $P(\{x_n, y_m\}) = a_n b_m$

Produit de série $\left| \begin{array}{l} cv \\ \geq 0 \end{array} \right.$: $(a_n b_m)$ est sommable de somme,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m\right) = 1$$

Indépendance, conditionnement

I - Évènements indépendants :

Données : $(E, \mathcal{T}, P)$

Déf : Deux évènements $A, B \in \mathcal{T}$ sont dits indépendants, lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

/!\ Si $A \cap B = \emptyset$, les évts sont indépendants seulement si A ou B est négligeable

→ Ex : un évt presque sûr est indépendant de tout autre
de m̂, un évt négligeable est indépendant de tout autre.

$P(A) = 1$. $B = A \cap B \underset{\text{disj}}{\sqcup} (\underbrace{(E \setminus A) \cap B}_{\subset E \setminus A})$ → négligeable

$$P(B) = P(A \cap B)$$

Prop : si A et B sont indépendants, A^c et B aussi
(de m̂, A et B^c ; puis A^c et B^c)

en effet : $P(B) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disj}}}{=} P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(A^c \cap B) + P(A)P(B)$

→ $P(A^c \cap B) = (1 - P(A))P(B)$
$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$

l'autre vient par symétrie, la dernière par double

Généralisation : des évènements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants, lorsque : $\forall I \subset [\![1, n]\!] : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Prop : $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants

Si $I, J \subset [\![1, n]\!]$ et $I \cap J = \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{j \in J} A_j$ sont indépendants.

2) $A_1^c, A_2, \dots, A_n$ sont mut. indépendants

D/ Proposition précédente.

Idem en remplaçant les A_i par des A_i^c.

|| des év^t ~~quelconques~~ de la tribu engendrée par $A_1, \dots, A_n$ sont mut. indép.

• Ex. On suppose $A_1, \dots, A_n$ indépendants (On sous-entend mutuellement)

My la probabilité pour qu'aucun d'eux ne se réalise, est $\leqslant \exp(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i))$

S/ $P((\bigcup_1^n A_i)^c) = P(\bigcap_1^n A_i^c)$

$$= \prod_1^n (1-P(A_i))$$

$$\leqslant \prod_1^n \exp(-P(A_i))$$

$$\leqslant \exp(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i))$$

II - Conditionnement :

Pté conditionnelle :

Soit A un Év^t tq $P(A) \neq 0$ ($\to P(A) > 0$)

Lorsque $B \in \mathcal{T}$, on pose $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P_A(B)$ (P_A est une probabilité, $P_A(A) = 1$)

On a

• $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$

• Si B et A sont indépendants, $P(B|A) = P(B)$

• Si $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0, \dots, P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, on a :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Formule utile : Soit (A_n) une partition de E, avec $\forall n : P(A_n) > 0$ (ie $\neq 0$) hypo essentielle

Alors, pour tout év^t B : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n) P(A_n)$ → proba totale

$P(B) = \cancel{P(B \cap A)} = P(\bigsqcup B \cap A_i)$ disj (partition)

$= \sum P(B \cap A_i) \dots$

•• $P(A_m|B) = \dfrac{P(B|A_m)P(A_m)}{\sum_n P(B|A_n)P(A_n)}$: sert pour les probabilités. ⟶ $\dfrac{P(B \cap A_m)}{P(B)}$

(HP) III - Tribus indépendantes :

Déf : Une famille $(\mathcal{E}_i)$ de tribus est dite indépendante, lorsque,

$\forall J$ fini $\subset I$, $\forall (A_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathcal{T}_j$, (A_j) est indépendante.

Ex : (A_n) : partition de E | $\mathcal{T}_A = \{\bigcup_{n\in I} A_n \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$

(B_p) : partition de E

$\mathcal{T}_B = \{\bigcup_{p\in J} B_p \mid J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$

On suppose, $\forall (n,p)$, A_n et B_p sont indépendants. Alors, $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ sont indépendants.

preuve peu que finie

D/ $P\left(\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{p\in J} B_p\right)\right) = P\left(\bigcup_{(n,p)\in I\times J}(A_n \cap B_p)\right) = \sum_{(n,p)\in I\times J} P(A_n \cap B_p)$

(HP) IV - Borel - Cantelli : Très très utile.

(BC1) On suppose (A_n) est indépendante, et $\sum P(A_n) = +\infty$ (ie toutes les sous-parties finies le sont)

alors $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p\right) = 1$

$\{\omega \mid \omega \in A_n \text{ infiniment souvent}\}$

D/ On pose $B_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$

$\rightarrow B_n^c = \bigcap_{p\geq n} A_p^c$, on note $C_{nm} = \bigcap_{p=n}^{m} A_p^c$

$\underline{C_{nm} \downarrow B_n^c}$ pour (c) $\rightarrow P(C_{nm}) \rightarrow P(B_n^c)$

et $P(C_{nm}) = \prod_{p=n}^{m} (1 - P(A_p))$ par indép.

$\rightarrow P(C_{nm}) \leq \exp\left(-\sum_{p=n}^{m} P(A_p)\right)$

$\underline{m\to\infty}$: $\exp(-\infty)$

$\rightarrow \underline{P(B_n^c) = 0}$ $\rightarrow P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c\right) = 0$

d'où ~~$P(B_n) = 1$~~ $\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p\right) = 1}$

(BC2) si $\begin{cases} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p\right) = 0, \ \sum P(A_n) \text{ cv} \\ A_n \text{ indépendante} \end{cases}$ | c'est la contraposée.

$\rightarrow$ Si (A_n) indépendante : ou $\sum P(A_n)$ cv

$\Leftrightarrow$

$P(\{\omega \in A_n \text{ infiniment souvent}\}) = 0$

Variables aléatoires

I Généralités

Données : $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $(E, \mathcal{U})$ une tribu sur E sur E

(en gal $\left| \begin{array}{l} E \text{ dén} \in \mathbb{R}^d \\ E = \mathbb{R}^d \end{array} \right.$ $\mathcal{U}$ muni de la tribu borélienne

Une variable aléatoire à valeurs dans E est une appl $X : \Omega \to E$

tq $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}$ $X^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}$

Loi de probabilité : on la définit sur $\mathcal{U}$ par

$$\mathcal{L}_X(U) = P(X^{-1}(U))$$

$$\mathcal{L}_X(E) = P(\Omega) = 1, \quad \mathcal{L}_X(\emptyset) = P(\emptyset) = 0, \quad \mathcal{L}_X(\mathcal{U}) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(U_n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X^{-1}(U_n))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_X(U_n)$$

II Variables discrètes

Déf : On dit qu'une VA $: \Omega \to \mathbb{R}^d$ est discrète lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable ⚠ pas au sens topologique

$\| \forall x \in X(\Omega)$, $(X = x)$ est un événement : $\mathcal{L}_X(\{x\}) = P(X = x)$

$\| \forall A \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(A)$ ——— $\mathcal{L}_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$

$\| \forall B \in \mathbb{R}^d$ $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B \cap X(\Omega))$

Ex $d = 1$ On peut envisager, pour $a \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq a), P(X<a), \dots$$

Operations : Si X et Y sont deux VAD et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda X \text{ est une VAD} \\ X \pm Y \text{ est une VAD} \end{cases}$$

1) L'application $\left(\begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \longrightarrow & x \pm y \end{array}\right)$ a pour image

un ensemble dénombrable de E contenant $(X+Y)(\Omega)$. Soit $z \in E$

$(X+Y)^{-1}(z) = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} (X = x \wedge Y = y) \in \mathcal{T}$ est en tant que réunion dén d'évènements

RM : $\mathcal{L}_{X+Y}(z) = \sum_{\substack{x+y=z \\ x,y \in X(\Omega), Y(\Omega)}} P((X=x) \cap (Y=y))$ (important !)

III VAD indépendantes

$X \ (\Omega, \mathcal{T}, P) \longrightarrow (E, \mathcal{U})$

Déf : On dit que n VA $X_1 \dots X_n$ sont indep lorsque $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ les évts $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendantes

Suites (B_n) indép $\Longleftrightarrow \forall I$ fini $\subset \mathbb{N}$, $(B_i)_{i \in I}$ mut. Indep

(X_n) ——— $\Longleftrightarrow \forall I$ fini $\subset \mathbb{N}$, $(X_i)_{i \in I}$ ———

RM. $(X_1, \dots, X_n)$ indep $\Longleftrightarrow$ les tribus $(X_1^{-1}(\mathcal{U}), \dots, X_n^{-1}(\mathcal{U}))$ sont indep

Prop : On suppose $X_1 \dots X_n$ discrètes à valeurs dans E dén $\subset \mathbb{R}^d$

1) $X_1, \ldots, X_n$ indép $\Leftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^N$ $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ ~~mam~~ indép

2) Si $\left. \begin{array}{l} f \ (\mathbb{R}^d)^p \to \mathbb{R}^d \\ g \ (\mathbb{R}^d)^q \to \mathbb{R}^d \end{array} \right|$ avec $p + q = n$, alors $f(X_1, \ldots, X_p)$ est une VA indép de $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$

TTU $X_1 + \ldots + X_p$ est indép de $X_{p+1} + \ldots + X_n$

$X_i X_{i+1} — X_{i+2} X_{i+3}$

D/ Familles sommables

1) Soit $A_1, \ldots, A_n \subset E$.

$$P((X_1 \in A_1) \cap \ldots \cap (X_n \in A_n)) = \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n} P(X_1 = x_1 \cap \ldots \cap X_n = x_n)$$

$$= \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n} P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$$

$$= P(X_1 \in A_1) \ldots P(X_n \in A_n)$$

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$P(f(X_1, \ldots, X_p) = x \wedge g(X_{p+1}, \ldots, X_n) = y)$$

$$= P\Big(\Big(\bigcup_{\substack{(x_i) \in E^p \\ \text{et } X_1 = x_1 \cap \ldots \cap X_n = x_n}} f(x_1, \ldots, x_p) = x\Big) \cap \Big(\bigcup_{\substack{(x_j) \in E^q \\ \text{et } X_{p+1} = x_{p+1} \\ \cap \ldots \cap X_n = x_n}} g(x_{p+1}, \ldots, x_p) = y\Big)\Big)$$

$$= \sum_{\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_p) = x \\ g(x_{p+1}, \ldots, x_n) = y \end{cases}} P((X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_p = x_p) \wedge (X_{p+1} = x_{p+1} \wedge \ldots \wedge X_n = x_n))$$

$$= \sum_{\substack{f(x_i) = x \\ f(x_j) = y}} \underbrace{P(X_1 = x_1) \ldots P(X_p = x_p)} \ \underbrace{P(X_{p+1} = x_{p+1}) \ldots P(X_n = x_n)}$$

$$= \Big(\sum_{f(x_i) = x} \qquad \Big)\Big(\sum_{g(x_j) = y} \qquad \Big)$$

$= P\left(f(X_1, \dots, X_p) = x\right) P\left(g(X_{p+1}, \dots, X_n) = y\right)$

en réorganisant par $\cup$ élém

Ex : (X_n) indép $\Big|$ X_i^2 indép
e^{tX_i} indép

Ex $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une VAD, CNS pour qu'elle soit indépendante d'elle même

S/ Soit x, $P(X=x) > 0$. Alors $P(X=x) = P(X=x)^2 \Rightarrow P(X=x) = 1$

$X = x$ p.s.

Ex X, Y $\Omega \to \mathbb{N}^*$ indépendants avec $P(X=i) = \frac{1}{2^i}$ $i \in \mathbb{N}^*$
$= P(Y=i)$

Trouver 1) $P(X=Y)$

1/ $P(X=Y) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} (X = i = Y) \Rightarrow P(X=Y) = P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} X=i \wedge Y=i\right)$

$= \sum\limits_{i \in \mathbb{N}^*} P(X=i) P(Y=i)$

$= \frac{1}{3}$

2) $P(X > Y) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(Y=i \wedge X > i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(Y=i) \sum\limits_{k=i+1}^{+\infty} P(X=k)$

$= \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^i} = 1/3$

3) $P(\min(X,Y) \leq N) = 1 - P(X > N \text{ et } Y > N)$
$= 1 - \frac{1}{2^{2N}}$

IV Suites de VAI (D)

On admettra le résultat suivant.

Th Soit $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois discrètes sur $\mathbb{R}^*$

Il existe une suite (X_n) de v.a indépendantes $\Omega \to \mathbb{R}^*$

tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{L}_{X_n} = \mathcal{L}_n$

(en général les $\mathcal{L}_n$ ont le m̂ point de départ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$)

Ex Suite de VAI de | Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$
| de Rademacher | $P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$
| $P(X_n = 1) = 1/2$

Exo Soit $\omega \in \Omega$, si $\{\omega\}$ est un événement, on a $P(\{\omega\}) = 0$

S/ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAIID de Bernoulli avec $p = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon_n = X_n(\omega)$, $\{\omega\} \subset (X_1 = \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge X_n = \varepsilon_n)$

$$P(\{\omega\}) \leq P(\wedge) = \prod_{k=1}^{n} (X_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{2^n}$$

On suppose $\forall \omega$ $\{\omega\}$ mesurable

Soit $A \in \mathcal{T}$, Si A est fini ou dénombrable, $P(A) = 0$

V Lois usuelles

① Shéma $B(n,p)$

$p \in]0,1[$ $X_1, \dots, X_n$ est une suite de VAIID de Bernoulli

$P(X_1 = 0) = 1-p$, $P(X_1 = 1) = p$

il s'agit de la VA $S_n = X_1 + \dots + X_n$ sur $\{0, 1, \dots, n\}$

$$P(S_n = k) = \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1,n]\!] \\ i_1 < \dots < i_k}} P(X_{i_1} = 1 \wedge \dots \wedge X_{i_k} = 1 \wedge X_j = 0 \ (j \neq k))$$

$$= p^k (1-p)^{n-k} C_n^k$$

② Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$. La loi géométrique G_p est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$G_p(\{n\}) = (1-p)^{n-1} p$ $\qquad \left(\text{Conc } \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p = \frac{1}{1-(1-p)} p = 1 \right)$

Th Soit (X_n) une suite de VAIID de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$

Soit $Y = \min(k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1)$ $\left(= +\infty \text{ si } \forall k \geq 1, X_k = 0 \right)$

Alors ① Y est une VA avec $P(Y = +\infty) = 0$
② $\mathcal{L}_Y = G_p$

D/ ① $(Y = +\infty) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} \underbrace{(X_1 = \dots = X_N = 0)}_{\text{décroissante}} \in \mathcal{T}$

$$P(Y = +\infty) = \lim_{N \to +\infty} P(X_1 = \dots = X_N = 0)$$

$$= \lim_{N \to \infty} (1-p)^N = 0$$

Det ② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(Y = n) = (X_1 = \dots = X_{n-1} = 0 \wedge X_n = 1)$ est un événement

et $P(Y = n) = (1-p)^{n-1} p$

RM: $1 - p = e^{-\mu}$, $(1-p)^{n-1} = \underbrace{e^{-(n-1)\mu} (1 - e^{-\mu})}_{\text{décroissance exp.}}$

Prop: ~~$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^*$~~ On suppose que $\mathcal{L}_X = G_p$

$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^*$ $P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k)$

D/ $P(X > n+k \mid X > n) = \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = \frac{\sum_{m=n+k+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1} p}{\sum_{m=n+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1} p} = \frac{(1-p)^k \cancel{p \frac{1}{1-(1-p)}}}{\cancel{p \frac{1}{1-(1-p)}}}$

$= (1-p)^k$

$= P(X > k)$

Loi de poisson

Soit $\lambda \geq 0$ $\mathcal{L} = P(\lambda)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathcal{L}(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

Correct: $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(\{n\}) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

Th Soit $B(n, p_n)$ une suite de schéma de Bernoulli avec $np_n \to \lambda > 0$

Alors $B(n, p_n)$ converge en loi vers $P(\lambda)$ ie $\forall m \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}_n(m) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$

D/ $\mathcal{L}_n(m) = C_n^m \, p_n^m (1 - p_n)^{n-m}$

$= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} (1-p_n)^{-m} \left(1 - \frac{\lambda + \varepsilon_n}{n}\right)^n p_n^m$

$= \underbrace{\frac{(n p_n)^m}{m}}_{\to \lambda} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_n}{n}\right)^{-m}}_{\to 1}$ m fixé

Ex Un insecte pond des œufs suivant une loi de poisson $P(\lambda)$.

Un œuf éclos suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$

quelle est la loi du nombre d'œufs éclos

S/ On note la VA d'apparition des œufs $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$k \leq n$; $P(Y = k \mid X = n) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n) P(X = n)$

$= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{k!\,m!} p^{k} (1-p)^{m} \frac{\lambda^{m+k}}{(m+k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m \lambda^m}{m!}$$

$$= \frac{(p\lambda)^k}{k} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$$

Ex Marches aléatoires

① (X_i) une suite de VAIID $P(X_i=-1) = P(X_i=1) = \frac{1}{2}$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$; $p \in \mathbb{N}^*$ $A_p = \{\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n| < p\}$

culut

1) Mq $P(A_p) = 0$

S/ Mq $P(A_p)=0$; on regarde pour $k \in \mathbb{N}^*$ $B_k = \{X_{kp} = \dots = X_{kp+(2p+1)} = 1\}$

$P(B_k) \underset{\text{indep}}{=} \frac{1}{2^{2p+2}}$

$\omega \in B_k$, $|S_{k(3p+1)}(\omega) - S_{kp-1}(\omega)| \geq 2p+2$

l'un des deux n'est pas dans $[1-p, p]$ donc $\omega \notin A_p$

$k = 4lp$ $l \geq 1$ si $k < k'$, B_k et $B_{k'}$ sont indépendantes

$X_{k(2p+1)}$ indep de $X_{k'p}$

Borel Cantelli : $P\left(\bigcap_{l=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{l' \geq l} B_{4l'p}\right)\right) = 1$ car $\sum P(B_k)$ diverge B_k indép.

$\omega \in B_k$ infs

2) $P(S_n \text{ bornée}) = P(\bigcup A_p) = 0$

② Retour à 0 : (X_n) VAIID $\begin{cases} P(X_n=-1) = 1-p \\ P(X_n=1) = p \end{cases}$

On fixe $n = 2m$ $P(S_{2m}=0) = P(|\{X_k = 1\}| = |\{X_k=-1\}|)$

$$= \binom{2n}{n}(1-p)^n p^n$$

Mq $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ I.S}) = 0$

5/ ↳ Soit $u_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$, $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = p(1-p)\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= p(1-p)\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\longrightarrow 4(p(1-p)) < 1 \quad p \neq \tfrac{1}{2}$$

cc $\sum \mathbb{P}(S_{2n}) < +\infty$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{n \geq N} S_{2n} = 0\right)\right) = 0$$

BC

Complément Fonction de répartition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une VA (D)

On note $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Propriétés : 1) F_X croît

2) Si $x_n \searrow -\infty$, $\bigcap (X \leq x_n) = \emptyset$

donc $\mathbb{P}(X \leq x_n) \to 0$, $F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, de même $F_X(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

3) On fixe $a \in \mathbb{R}$

si $x_n \searrow a$ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \leq x_n) = (X \leq a)$

donc $F_X(x_n) \searrow F_X(a)$

si $x_n \nearrow a$ $\bigcup \underbrace{(X \leq x_n)}_{\text{croissant}} = (X < a)$

98

∞ deux de Bernoulli $\cong [0,1]$, mesure de Lebesgue

$F_X(u) - F_X(u^-) = \mathbb{P}(\{u\})$

F discontinue en $u \iff P(x=u)>0$

Γ_{F_X} (ensemble de pts de ~~dis~~continuité) est dense dans $\mathbb{R}$)

$\Gamma_{F_X} \supset \mathbb{R} \setminus X(\Omega)$

Variables à densité :

$X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u)$ croissant $\mathcal{C}^0$ à droite, on dit que X possède une densité s'il existe $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable tq :

$\forall u \in \mathbb{R} \quad F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1\right)$

Ex
1) $X \geq 0 \quad f(t) = e^{-t}$
2) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$
3) $f(t) = \frac{1}{(1+x^2)\pi}$ (Cauchy)

(Espérance $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$, moment d'ordre 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$)

Prop : Si X possède une densité $\forall a \in \mathbb{R} \quad P(X=a) = 0$

D/ $\mathbb{P}(X=u) = F_X(u) - F_X(a^-)$ mais $u \mapsto \int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^0$

(Sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $|F_X(x) - F_X(a)| \leq \|f\|_{\infty [a-\varepsilon, a+\varepsilon]} |x-a|$)

Couples de variables

I Lois conjointe, marginales

Soient X, Y $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ deux VAD $\left| \begin{array}{l} X(\Omega) \subset E = \{a_n\} \\ Y(\Omega) \subset F = \{b_m\} \end{array} \right.$ $(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$

On note $\left(\begin{array}{l} \mathbb{P}_E(\{a_n\}) = \alpha_n \geq 0 \ \sum \alpha_n = 1 \\ \mathbb{P}_F(\{b_m\}) = \beta_m \geq 0 \ \sum \beta_m = 1 \end{array} \right.$ (Lois image)

Loi produit sur $E \times F$: $\mathbb{P}_{E \times F}(\{(a_n, b_m)\}) = \alpha_n \beta_m$

Déf : La loi conjointe de (X, Y) est définie par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(a_n, b_m)\}) = \mathbb{P}(X = a_n \text{ et } Y = b_m)$$

les lois $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ sont appelées lois marginales de $\mathcal{L}$

(I) $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ se calculent à partir de $\underbrace{\mathbb{P}(X = a_n)}_{\mathcal{L}_X(\{a_n\})} = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = a_n \wedge Y = b_m)$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{L}(\{(a_n, b_m)\})$$

Réciproque archi fausse

Si X et Y sont indépendants, la loi $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est le produit $\mathcal{L}_X \otimes \mathcal{L}_Y$

D/ $\mathbb{P}(X = a_n \wedge Y = b_m) = \mathbb{P}(X = a_n)\mathbb{P}(Y = b_m)$

Loi conditionnelle de Y // X

Elle est définie par $\mathbb{P}(Y = b_m / X = a_n) = \dfrac{\mathbb{P}(X = b_m \wedge X = a_n)}{\mathbb{P}(X = a_n)}$ si $\mathbb{P}(Y = a_n) > 0$

Si X et Y sont indép on a $\mathbb{P}(Y = b_m | X = a_n) = \mathbb{P}(Y = b_m)$

(I) $\mathbb{P}(Y = b_m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = b_m | X = a_n)\,\mathbb{P}(X = a_n)$

Ex : (Usuel) Soit $X, Y\ \Omega \xrightarrow{VA} \mathbb{N}$ tq $\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \frac{i+j}{2^{i+j+2}}$

1) ~~On somme~~ Vérifier que $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est bien une loi de probabilité

1/ On selon $i+j=n$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=n} \frac{1}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}$

$= \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

La famille étant positive et 1 réorganisation CV elle est sommable de somme 1

2) Calculer les lois marginales

$\mathcal{L}_X(j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{i,j\}) = \sum_{i=0} \frac{1}{2^{i+j+2}}$

$= \frac{1}{2^{i+1}}$

3) X et Y sont elles indépendantes

2ème version $\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{i,j\}) = \frac{i+j+2}{2^{i+j+4}}$ $\quad \sum_{i+j\in\mathbb{N}^2}\frac{i+j+1}{2^{i+j+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+3}}$

$= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2^n} + \frac{n+1}{2^n}$

$\sum_{i+j\in\mathbb{N}^2}\frac{i+j+2}{2^{i+j+4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{2^{n+4}} = \frac{1}{2^4}\ \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 1$ $\quad \frac{1}{2^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^4}\sum_{n=0}\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$

$\mathcal{L}_X(j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j+2}{2^{i+j+4}} = \frac{1}{2^{i+4}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j+2}{2^j}\ \frac{1}{2^4}$

$= \frac{1}{2^{i+4}}\left(2(i+2)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}\right)$

$= \frac{i+3}{2^{i+3}}$

pas d'indépendance.

Complément : Produit de convolution

Soit $\mathcal{L}_X$, $\mathcal{L}_Y$ deux lois sur $\mathbb{N}$ ~~...~~ $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 0 \\ j \geq 0}} \mathcal{L}_1(i)\mathcal{L}_2(j)$

Si X et Y sont indép à valeurs dans $\mathbb{N}$ $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y$

$$P(X+Y=n) = \sum_{i+j=n} P(X=i \wedge Y=j) = \sum_{i+j=n} \mathcal{L}_X(i)\mathcal{L}_Y(j)$$

Ex : Produit $\mathcal{B}(n,p) \times \mathcal{B}(m,p)$

loi de $X_1 + \dots + X_n = X$ Loi de $X_{n+1} + \dots + X_{n+m} = Y$

On suppose $(X_1, \dots, X_{n+m})$ indep, X et Y sont alors indépendantes $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y = \mathcal{B}(n+m, p)$

Ex $\mathcal{P}(\lambda) \times \mathcal{P}(\mu)$

On calcule $\sum_{i+j=n} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \lambda^i \mu^{n-i} e^{-(\lambda+\mu)}$

$= \frac{(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}$

102

Espérance

Variables finies : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$ | $\mathbb{E}(X+Y)$?

$= \sum_{\substack{x \in D \\ X(\Omega) \subset D}} x P(X=x)$

Définition : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une VAD avec $X(\Omega) \subset D$ dén

On dit que X est sommable lorsque la famille $(P(X=x)|x|)_{x \in D}$ est sommable.
L'espérance de X est alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D} x P(X=x)$

Props : 1) X possède une espérance $\iff |X|$ possède une espérance

2) Si $A \in \mathcal{T}$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$

Si $E(|X|) = 0$ alors $X = 0$ p.s.

3) Soit (A_n) une partition de Ω en éléments de $\mathcal{T}$ sur lesquels X est constant p.s. de valeur x_n.
Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(A_n)$ $\quad (A_n)_{x_n = x}$ partition de $X = x$

D/ On regroupe $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(A_n) = \sum_{x \in D} \sum_{\{n | x_n = x\}} x P(A_n)$

$= \sum_{x \in D} x P(X=x)$

4) Transfert soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f \circ X$ est sommable

$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x)$

D/ On a $\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{y \in f(D)} y P(f \circ X = y) = \sum_{y \in f(D)} \sum_{\{x \in D | f(x) = y\}} f(x) P(X=x)$

$= \sum_{x \in D} f(x) P(X=x)$

sommabilité, on régroupe

$D = \bigcup_{y \in g(D)} \left(g^{-1}(\{y\}) \cap D\right)$

5) Si X est sommable et $\lambda \in \mathbb{R}$ λX et $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

* Deux variables en jeu

1) On suppose X et Y sommables. Alors $X+Y$ l'est et

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

D/ $D \supset X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ si $(x,y) \in D^2$, $(X=x \wedge Y=y)$ est un événement sur lequel X et Y sont constant, de plus

$X \geq 0$, $Y \geq 0$

$$E(X+Y) = \sum_{z \in D+D} z P(X+Y=z) = \sum_{(x,y)\in D^2} (x+y) P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_{(x,y)\in D^2} x P(X=x \wedge Y=y) + \sum_{(x,y)\in D^2} y P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_{x \in D} x P(X=x) + \sum_{y \in D} y P(Y=y)$$

RM : Si $X \geq 0$, et $(xP(X=x))$ non sommable on convient que $E(X) = +\infty$

2e cas : cas général. On regarde $|X|$ et $|Y|$

On vient de voir que $E(|X|) < +\infty$ et $E(|Y|) < +\infty$ donnent la sommabilité de $(|x|+|y|) P(X=x \wedge Y=y)$ $(x,y) \in D^2$ partitions sur lesquelles $|X|, |Y|$ sont cste

a fortiori de $(x+y)P(X=x \wedge Y=y)$ avec le m̂ calcul $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

2) Si Y est sommable positive et $|X| \leq Y$ alors X est sommable et $E(|X|) \leq E(Y)$

$\sum_{(x,y)\in D^2} (|x|+|y|)\, P(X=x \wedge Y=y)$

$D^2 =$

D/ Idem avec la partition $P(X=x \wedge Y=y) = \Omega_{x,y}$

sur $\Omega_{x,y}$ $|x| \leq y$

$\longrightarrow$ dans $[0,+\infty]$ $\sum_{(x,y)\in D^2} |x| P(X=x \wedge Y=y) \leq \sum_{(x,y)\in D^2} y P(X=x \wedge Y=y) < +\infty$ (hyp 1)

pas super rigoureux regarder avec des familles finies

Bilan On note $\mathcal{L}^1(\Omega) = \{X \text{ VAD } \Omega \to \mathbb{R} \mid E(|X|) < +\infty\}$

1) $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-ev contenant les VA bornées ($|x| P(X=x) \leq M P(X=x)$ sommable)

2) $\mathcal{L}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $X \to E(X)$ est linéaire et positive
avec de plus $|X| \leq |Y|$ et $E(|Y|) < +\infty \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

$|E(X)| \leq E(|Y|)$

Exemples:

1) VA de Bernoulli de param p: $E(X) = p$

2) VA de Rademacher $E(X) = 0$

3) VA géométrique $\mathcal{G}(p)$: $X \sim \mathcal{G}(p)$
$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p (1-p)^{n-1} = p \left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)^2 = \frac{1}{p}$

4) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$

Exercice: Crible de Poincaré : soit $A_1, \dots, A_n$ des évts

$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$
$+ \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

S/ $\mathbb{1}_{(A_1 \cup \dots \cup A_m)^c} = \mathbb{1}_{A_1^c \cap \dots \cap A_m^c} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i^c}$

$= \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$

donc $1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_m} = \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$

donc $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_m} = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_m} + \sum_{i<j} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j} + \dots + (-1)^{m-1}\mathbb{1}_{A_1 \dots}$

$\longrightarrow E(\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_m}) = P(A_1) + \dots + P(A_m) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

$+ \dots + (-1)^{m-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$

Compléments:

① On suppose $X : \Omega \xrightarrow{VA} \mathbb{N}$

alors $[0, +\infty]$ $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$ TU

D/ $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X = n)$

$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \geq k}^{+\infty} P(X = n) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X = n)$

Fubini dans $\mathbb{R}$

Ex.: $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_m([\![1, n]\!])$ équidistribuée (tirage de m boules parmi $B_1, \dots, B_n$)

$Y = \min X$ loi du plus petit numéro

$E(Y)$?

S/ $E(Y) = \sum_{k=0}^{n-m+1} P(Y > k) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{n-m+1} \binom{n-k}{m} = \frac{\binom{n+1}{m+1}}{\binom{n}{m}}$

recca

$= \frac{n+1}{m+1}$

② (TO) $\sum_{y \in D} y P(X=y \wedge y \in A) = E(Y.\mathbb{1}_A)$

③ Si (A_n) est une partition de Ω (p s) et $X \in L^1(\Omega)$

correctement $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X \mathbb{1}_{A_n})$

D/ On envisage la partition $A_{n,x} = (X(\omega)=x \wedge \mathbb{1}_{A_n}=1)_{(n,x) \in \mathbb{N} \times D}$

$$E(X) = \underbrace{\sum_{(n,x) \in \mathbb{N} \times D} x P(X=x \wedge \mathbb{1}_{A_n}=1)}_{\text{sommable si } E(|X|)<+\infty}$$

$$= \sum_{x \in D} x \Big(\underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X=x \wedge \mathbb{1}_{A_n}=1)}_{P(X=x)} \Big)$$

✿ Inégalité de Markov :

Soit $X \in L^1(\Omega)$ pour tout $a>0$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$

D/ On note $A = (|X| \geq a)$ il vient $|X| \cdot \mathbb{1}_A \geq a \mathbb{1}_A$ donc $E(|X| \mathbb{1}_A) \geq a P(A)$

Hypothèse nécessaire

Exercice : Mq $a P(|X| \geq a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$

$P(|X| \geq a) = \sum_{|x| \geq a} \frac{|x|}{|x|} P(|X|=|x|)$ → reste d'espérance

$\frac{1}{|x|} \to O(1/a)$

dans $\mathbb{N}$:

$$a P(X \geq a) = \sum_{n=a}^{+\infty} \frac{a}{n} \underbrace{(n P(X=n))}_{u_n}$$

$$= \sum_{n=a}^{+\infty} \frac{a}{n} u_n \leq \sum_{n=a}^{+\infty} u_n \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0.$$

CC || Si $\varphi \nearrow_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ $P(|X| \geq a) = P(\varphi(|X|) \geq \varphi(a))$

$$\leq \frac{E(\varphi(|X|))}{\varphi(a)}$$

Ex 1) $\varphi(x) = x^2$ $\quad P(|X| \geq a) = P(|X|^2 \geq a^2) \leq \frac{E(|X|^2)}{a^2}$

2) $\varphi(x) = e^{tx}$, $t > 0$ $\quad P(|X| \geq a) = P(e^{t|X|} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$

Variables indépendantes :

Th : Si $X, Y \in L^1(\Omega)$, avec X et Y indép alors $XY \in L^1(\Omega)$

$$\text{et } E(XY) = E(X)E(Y)$$

D/ On introduit la partition $A_{x,y} = (X = x \wedge Y = y)$ $\quad (x,y) \in D^2$

$\sum |x||y| P(|X||Y| = |x||y|)$

puis la famille $|x||y| P(A_{x,y}) = |x||y| P(X = x) P(Y = y)$

Produit de Cauchy $|x| P(X = x) \, |y| P(Y = y)$ est le produit de Cauchy des familles sommables $|x| P(X = x)$ et $|y| P(Y = y)$

$\Rightarrow |X||Y|$ est sommable

$\Rightarrow XY$ existe et correctement $E(XY) = \left(\sum_{x \in X} x P(X = x)\right)\left(\sum_{y \in Y} y P(Y = y)\right)$

valeur absolue pour la sommabilité

en fait ? why ?

Exercice : $X_1, \dots, X_n$ VA $\begin{cases} \text{indépendantes} \\ \text{équidistribuées à valeurs dans } E \text{ fini } \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

Soit $p \in [\![1, n]\!]$ Déterminer $E\left(\frac{X_1 + \dots + X_p}{X_1 + \dots + X_n}\right)$

Variance, Covariance

I Généralité $X:\Omega \to \mathbb{R}$ VAD

Déf: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que X possède un moment d'ordre p lorsque X^p est sommable ($E(|X|^p) < +\infty$ ou $\sum |x|^p P(X=x) < +\infty$)

$p=1$ espérance $p=2$ variance

Prop: Si X possède un moment d'ordre p et $1 \leq q \leq p$ alors X possède ________ d'ordre q

D/ On a en distinguant $|X| \geq 1$, $|X| \leq 1$ | $|X|^q \leq 1 + |X|^p$, $E(\cdot) < +\infty$

Ex: $X : \Omega \to \mathbb{N}$

1) $n \geq 1$ $P(X=n) = \frac{1}{n^a \zeta(a)}$ | $\sum n^2 P(X=n) = \frac{1}{\zeta(a)} \frac{1}{n^{a-2}}$ cv ssi $a > 3$

2) $n \geq 1$ $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$ $0 < 1-p < 1$

$\forall r \geq 1$ $\sum P(X=n)\, n^r$ converge

3) $n \geq 1$ $P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ idem

Pratique (TU): On suppose que X possède un moment d'ordre $r \geq 1$ alors X possède un moment factoriel $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$

Th C.S: Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux VAD possédant un moment d'ordre 2, alors XY est sommable et $|E(XY)| \leq (E(X^2))^{1/2} (E(Y^2))^{1/2}$

D/ On a $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ d'où le premier point.
Soit A_n une partition de Ω tq sur A_n, X et Y soient (ps) constante
il vient

$\mathbb{E}(XY) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n y_n P(A_n)$ où x_n est la valeur de X sur A_n
y_n ——— Y sur A_n

$$\left|\sum_{n=0}^{N} x_n y_n P(A_n)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n|\sqrt{P(A_n)}\,|y_n|\sqrt{P(A_n)}$$
$$\underset{CS}{\leq} \left(\sum_{n=0}^{N}|x_n|^2 P(A_n)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|y_n|^2 P(A_n)\right)^{1/2}$$

$N\to+\infty$ $|\mathbb{E}(XY)| \leq |\mathbb{E}(X^2)|^{1/2}\,|\mathbb{E}(Y^2)|^{1/2}$

Ex (nms) X, Y sont des moments d'ordre $p>1$ et $q>1$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
Mq $XY \in L^1(\Omega)$ avec $|\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}(X^p)^{1/p}\,\mathbb{E}(Y^q)^{1/q}$

Conséquence : $L^2(\Omega) = \{X \text{ VAD } \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(X^2) < +\infty\}$ est un sev de $L^1(\Omega)$ sur lequel $X \mapsto \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ est une semi-norme

D/ Si $X, Y \in L^2(\Omega)$ $(X+Y)^2 = X^2 + \underbrace{2XY}_{\text{Sommable}} + Y^2 \in L^1(\Omega)$

$$\mathbb{E}((X+Y)^2) \leq \mathbb{E}(X^2)^{1/2} + \mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$$

$$\iff 2\mathbb{E}(XY) \leq 2\mathbb{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$$

Vrai par C.S

I) $\mathbb{E}(X^2) = 0 \iff \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = 0 \iff X = 0$ Ps

__Markov :__ $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$
$a>0$ $P(|X| \geq a) = P(|X|^2 \geq a^2) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(X^2)$

(HP) Convergence dominée L^2
On suppose que $X_n \to X$ en probabilité :
$\forall \varepsilon>0$ $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$

d 2) $\exists Y \in L^2(\Omega)$ $\forall n\ |X_n| \leq Y$ est aussi $|X| \leq Y$

Mq $\mathbb{E}(X_n - X) \longrightarrow 0$ (comme $|\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X_n - X|)$
$\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$)

D/ Soit $\varepsilon > 0$ $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) = \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}|X_n - X|)}_{\text{reste à majorer ce terme}} + \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n^c}|X_n - X|)}_{\leq \varepsilon}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}|X - X_n|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}(2Y)) \underset{C.S}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n})^{1/2}\, 2\,\mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$$

① il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_\varepsilon$ $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) \leq \varepsilon^2$

Alors $\forall n \geq N_\varepsilon$ $\mathbb{E}(|X - X_n|) \leq 2\varepsilon\,\mathbb{E}(Y^2)^{1/2} + \varepsilon$

II Variance, Covariance :

① On suppose que X possède un moment d'ordre deux, donc $X \in L^1(\Omega)$, On pose $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Props 1) $V(X) = 0 \iff X = \mathbb{E}(X)$ P.s

2) $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \cancel{4}\,\mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

3) $V(aX+b) = a^2 V(X)$ $\Big\{$ $\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) = \mathbb{E}((aX - a\mathbb{E}(X))^2)$
$= a^2 V(X)$

4) Tchebychev $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$

en effet $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq a^2)$

$$\leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Covariance : il s'agit de $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propo : sur $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

1) $Cov(X,X) = V(X)$ 2) $Cov(X,Y)$ est bilinéaire symétrique

3) $Cov(X,Y) = 0$ si X et Y sont indép

4) $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

(si B est bil : $B(x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i) + \sum_{i<j} B(x_i, x_j)$)

Matrice de Covariance de $X_1, \dots, X_n$ $[C(X_i)] = [Cov(X_i, X_j)]_{1 \le i,j \le n}$

Calculs : 1) $\mathcal{L}_X \sim B(n,p) = \underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{\text{indép Bernoulli param } p}$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2$$

$$V(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1^2 V(X_1) + \dots + a_n^2 V(X_n)$$
$$= a_1^2 \dots + a_n^2$$

3) Loi géométrique

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p (1-p)^{n-1} = p \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \right)$$
$$= p \left((1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{(1-(1-p))^2} \right)$$

$$E(X^2) = p \left(\frac{2(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p^2} \right)$$

$$E(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2(1-p)+p}{p^2}$$

4) Loi de Poisson $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \sum \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$ $= \frac{1-p}{p^2}$

$$= \lambda \sum_{n=2}^{+\infty}$$

Marge :

$\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) x$

$E((E(X) - X)^2)$

$p \sum_{n=1}^{+\infty} n^2$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p(1-p)^n$

$\sum_{n=1}^{+\infty}$

$p(1-p)^n$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

112

ÉCRIRE

Variable centrée réduite

Def Une VA $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite centrée si | Y sommable, $E(Y) = 0$
et réduite si de plus $E(Y^2) = 1$

Ex : Si X possède une variance $\sigma^2 > 0$, $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma}$ (A)
$0 < \mathrm{Var}\, X < +\infty$

est centrée réduite

Exos : ① Soit X une VA $\Omega \to \mathbb{R}$ possède une variance $0 < \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < +\infty$
On note $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, on suppose $E(Y^4) = 1$. Mq $\exists\, a, b \in \mathbb{R}^2$

$\exists Z \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ $X = aZ + b$

S/ On regarde $T = Y^2$ (A) $E(T) = 1$, $E(T^2) = 1$ (hyp)

de loi $V(T) = 0$

Ainsi T est ps constante $= E(T) = 1$ ps

Or X n'est pas constante (ps) car $V(X) > 0$ donc $A = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} = 1\right)$

et $B = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} = -1\right)$ sont de prob > 0 et $\underbrace{E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)}_{0} = P(A) - P(B)$

donc $P(A) = P(B) = c$

On note Z_0 | $A \longrightarrow 1$, $B \longrightarrow -1$ $\quad \frac{X - \mu}{\sigma} = Z_0$

Ex : Matrice de covariance : données $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, $n = n_1 + n_2$
On effectue un tirage successif sans remise de m boules $m \leq n$
parmi n | n_1 blanches, n_2 noires | X_i : la $i$ème boule est blanche

a) Loi de X_i ? b) Matrice de covariance de $X_1, \dots, X_m$

S/ a) Pour X_1 $P(X_1=1) = \frac{m_1}{m}$, $P(X_1=0) = \frac{m_2}{m}$

Pour X_2 : $P_2(X_2=1) = P(X_2=1 | X_1=0) P(X_1=0)$

$+ P(X_2=1 | X_1=1) P(X_1=1)$

$= \frac{m_1}{m}$

$$P(X_{k+1}=1) = \sum_{i=0}^{k} P(X_{k+1}=1 | X_1+\dots+X_k=i) P(X_1+\dots+X_k=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{m_1-i}{m-k} P(X_1+\dots+X_k=i)$$

$$= \frac{m_1}{m-k} - \frac{\sum_{i=0}^{k} i P(X_1+\dots+X_k=i)}{m-k}$$

$$= \frac{m_1}{m-k} - \frac{E(X_1+\dots+X_k)}{m-k} = \frac{m_1}{m-k} - \frac{k m_1}{m(m-k)}$$

$$= \frac{m_1}{m-k}\left(1 - \frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{m_1}{m} \quad \text{OK}$$

RM| $E(X_1+\dots+X_m) = \frac{m m_1}{m}$

$\alpha = \frac{m_1}{m}$: $V(X_i) = \alpha(1-\alpha)$ $i = 1, \dots, m$

$i<j$ $Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$

$= P(X_iX_j=1) - \alpha^2$

$= P(X_i=1 \wedge X_j=1) - \alpha^2 = P(X_2=1 \wedge X_1=1)$

$$= \frac{m_1}{m}\left(\frac{m_1-1}{m-1}\right) - \alpha^2 = \alpha\left(\frac{\alpha - 1/m}{1-\frac{1}{m}}\right) - \alpha^2$$

reste $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \alpha\left(\dfrac{\alpha - 1/n}{1 - 1/n} - \alpha\right)$

$$= \alpha\left(\frac{\alpha - 1/n - \cancel{\alpha} + \alpha/n}{1 - 1/n}\right)$$

$$= \frac{\alpha/n\,(\alpha - 1)}{1 - 1/n}$$

$$= -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{n-1} \quad (\cancel{1-\alpha}\ \text{check erreur})$$

$$[\mathrm{Cov}(X_i, X_j)] = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & & -\frac{\alpha(\alpha-1)}{n-1} \\ & \ddots & \\ \shortparallel & & \alpha(1-\alpha) \end{pmatrix} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{n}{n-1}\right) I_n - \frac{\alpha(1-\alpha)}{n-1} J$$

$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\quad J^2 = nJ$. $X(X-n)$ annule J

$$\begin{array}{c|cc} VP & 0 & n-1 \\ & n & 1 \end{array} \qquad \mathrm{spec}(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)) = \begin{cases} n\,\alpha(1-\alpha) \longrightarrow n-1 \\ 0 \longrightarrow 1 \end{cases}$$

Ex : Inégalité de Kolmogorov

Données : $X_1, \dots, X_n, \dots$ centrées, indépendantes avec $E(X_i) = 0$ et $V(X_i) < +\infty$ on note $S_k = X_1 + \dots + X_k$, on se donne $x > 0$

Alors $\mathbb{P}\left(\max\limits_{1 \le k \le n} |S_k| > x\right) < \dfrac{\mathrm{Var}(S_n)}{x^2}$

S/ On sait $\mathbb{P}(|S_n| > x) = \mathbb{P}(S_n^2 > x^2) \le \dfrac{1}{x^2} E(S_n^2)$

Insuffisant : On introduit un temps d'arrêt $\quad = \dfrac{1}{x^2} V(S_n) \quad (E(S_n) = 0)$

$A = \left\{\max\limits_{1 \le k \le n} |S_k| > x\right\}$, $A_k = (S_1 \le x, \dots, S_{k-1} \le x, S_k > x)$

Obs: $A \overset{\text{disj}}{=} A_1 \cup \dots \cup A_n$ partition

$A_k = \bigsqcup_{\substack{(v_1,\dots,v_k) \in \mathbb{D}^k \\ \text{disj}}} \{S_1 = v_1 \leq \lambda, \dots, S_{k-1} = v_{k-1} \leq \lambda, S_k = v_k > \lambda\}$

A_k est déterminé par $X_1, \dots, X_k$ indép de $X_{k+1}, \dots, X_n$

$\|| \mathbb{1}_{A_k}$ est indép de $X_{k+1}, \dots, X_n, \dots$

On écrit $V(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2) \geq \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k})$

Or $\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \mathbb{E}\left((S_n - S_k + S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}\right)$

positif $= \mathbb{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k} + 2(S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k} + S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}\right)$

$\geq 2\mathbb{E}((S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k}) + \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$

$S_n - S_k = X_{k+1} + \dots + X_n$ v.A indép de $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ $\mathbb{E}((S_n - S_k) \mathbb{1}_{A_k} S_k) = \mathbb{E}(S_n - S_k)\,\mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{A_k})$ $\overset{\shortparallel}{0}$

$\mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \underset{\text{déf}}{\geq} \lambda^2 \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_k})$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ pour n'importe v.a dép ou indép

Aussi $V(S_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 \mathbb{P}(A_k) = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \lambda^2 \mathbb{P}(A)$. ■

Suite: On suppose de plus que $\sum \text{Var}(X_i) < +\infty$ $\underset{(=\mathbb{E}(X_i^2))}{}$ | X_i Indép $\mathbb{E}(X_i) = 0$

Alors $\sum X_k$ converge presque sûrement

D/ Idée: critère de Cauchy + décalage de l'inégalité précédente.

Soit $\varepsilon > 0$ Soit $\Big| \begin{array}{l} M \in \mathbb{N}^* \\ n > M \end{array}$ $\mathbb{P}\left(\max_{M \leq k \leq n} |S_k - S_M| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=M+1}^{+\infty} V(X_k)$

11.6

$\left(S_k - S_M = X_{k+1} + \dots + X_M \right) \quad m \to +\infty \quad \left(\max_{M \le k \le m} |S_k - S_M| > \varepsilon \right)$

$$\supset \left(\max_{M \le k \le m+1} |S_k - S_M| > \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{k \ge M} |S_k - S_M| > \varepsilon \right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=M+1}^{+\infty} V(X_k)$$

croissante des ensembles

Soit $E_M = \left(\sup_{k \ge M} |S_k - S_M| > \varepsilon \right)$, on a $\mathbb{P}(E_M) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\ell = M+1}^{+\infty} V(X_k)$

Soit $F_M = \left(\sup_{\substack{k \ge M \\ \ell \ge M}} |S_\ell - S_k| > 2\varepsilon \right)$ Si $\omega \in E_M^c$ il vient

$|S_k - S_M|(\omega) \le \varepsilon \quad |S_\ell - S_M|(\omega) \le \varepsilon$ donc $|S_k - S_\ell|(\omega) \le 2\varepsilon$

Ainsi $E_M^c \subset F_M^c$ et ainsi $F_M \subset E_M$

Bilan $\mathbb{P}(F_M) \le \frac{R_M}{\varepsilon^2} \quad \mathbb{P}(F_M) \to 0 \quad F_{M+1} \subset F_M$

et donc $\mathbb{P}(\bigcap F_M) = 0$

si $\omega \notin \bigcap_{M \ge 1} F_M \Rightarrow \exists M \; \omega \in F_M^c$

$$\Rightarrow \exists M \sup_{k, \ell \ge M} |S_k - S_\ell|(\omega) \le 2\varepsilon$$

et p.s. la suite est 2ε de Cauchy

$A_\varepsilon = \bigcap F_M \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon \subset \Omega \mid \mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$

$\omega \notin A_\varepsilon \Rightarrow S_k(\omega)$ est 2ε de Cauchy

Pb : pour chaque ε ....

On prend $\varepsilon \in]0,+\infty[\cap \mathbb{Q}$ $A = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} A_\varepsilon$ est par $\cup$ dénombrable de mesure nulle

$\| \omega \notin A \Rightarrow S_n(\omega)$ de Cauchy

118

Loi faible des grands nombres

A) Rappels d'inégalités du type de Markov:

* Si $Y \geq 0$, $a > 0$ $\quad \mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{P}(Y \geq a) = \mathbb{P}(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}(Y^2)$$

* Si $V(X) < +\infty$ $\quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq a^2)$

$$\leq \frac{1}{a^2} V(X)$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma}\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \underset{t \geq 0}{=} \mathbb{P}(e^{tY} \geq e^{ta}) \leq e^{-ta} \mathbb{E}(e^{tY})$$

why

B) Convergence en probabilité ps

Déf: On dit que la suite VA X_n converge en probabilité vers X lorsque $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ tend vers 0.

Th: Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de VAAID $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Alors $\frac{S_n}{n}$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ en probabilité

implicitement: on peut choisir une inf de suites qui vivent dans l'esp Ω

D/ Soit $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|^2 \geq n^2 \varepsilon^2\right)$

$$\leq \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{n V(X_1)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{V(X_1)}{\varepsilon^2 n}$$

Fonctions génératrices

I Généralités

Rappels : Soit $a_n \geq 0$; $\mathcal{C}(\sum a_n X^n) = 1$, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $[0,1[\to \mathbb{R}$

1) $\sum a_n$ CV $\Leftrightarrow$ f possède une lim finie en 1 $(\sum a_n x^n \leq L)$ $x \mapsto 1^-$

$\sum a_n \leq L$

2) $\sum n a_n$ CV $\Leftrightarrow$ f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ en 1

Déf : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une VAD. Sa série génératrice est la série entière $\sum P(X=n) x^n$. Comme $P(X=n) \geq 0$, $\sum P(X=n) = 1$ la somme G_X de cette série est NCV sur $[0,1]$ et y définit une fonction $\mathcal{C}^0$.

Prop : Soit $S \in [0,1]$ $G_X(S) = E(S^X)$

D/ $E(S^X) = \sum_{n=0} P(X=n) S^n$

Prop : Si $G_X = G_Y$, alors $X \sim Y$ $(\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y)$

nécessairement rayon de CV stricte > 0

D/ Unicité DSE.

Th : 1) X possède une espérance $\Leftrightarrow$ G_X est $\mathcal{C}^1$, dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$

2) X ——— variance $\Leftrightarrow$ G_X est $\mathcal{C}^2$ — $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

D/ 1) G_X $\mathcal{C}^1$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n)$ converge (Rappels) | $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n)$

2) G''_X existe $\Leftrightarrow$ $\sum n(n-1) P(X=n)$ CV | $V(X) = G''(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) - E(X)^2$

$\sum n^2 P(X=n)$ CV

$= G''(X) + G'(X) - G'(X)^2$

Th : Si X et Y sont indépendantes : $\Omega \to \mathbb{N}$ $G_{X+Y} = G_X G_Y$

D/ Soit $S \in [0,1]$ $G_{X+Y} = E(S^{X+Y}) = E(S^X S^Y)$: S^X, S^Y sont indép par lemme

$= E(S^X) E(S^Y)$

(→ Convolution des lois).

Exemples : ① $X \sim B(n,p)$, $X \sim X_1 + \dots + X_n$, X_i indép $X_i \sim B(1,p)$

$$G_X \underset{\text{indep}}{=} G_{X_1}^n = (1-p+px)^n$$

② $X \sim G_p$: $G_X = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p x^n = \frac{px}{1-(1-p)x}$

Espérance : $E(X) = G_X'(1) = \frac{p(1-(1-p)x) - p(p-1)x}{(1-(1-p)x)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

③ Loi de Poisson $X \sim P(\lambda)$

$$G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} x^n = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}$$

$G_X'(1) = \lambda$, $V(X) = G''_X(1) + G_X'(1) - G_X'^2(1) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Exercices ① Formule de Wald

Données : $(X_i)_{i \geq 1}$ suite de VAAID $\Omega \to \mathbb{N}$

N VA $\Omega \to \mathbb{N}^*$ indép des X_i

$$S_N : \omega \longmapsto \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

Mq ⓘ S_N est une VA ⓘⓘ Déterminer G_{S_N} en fonction de N et X_1

déf. d'événement ?

D/ ① $(S_N = n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (N = k \text{ et } X_1 + \dots + X_k = n)$ est un événement

② Soit $x \in [0,1]$ $G_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_N = n) x^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k \wedge X_1 + \dots + X_k = n) \right) x^n$$

sommable car termes positifs

pourquoi on peut inverser

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k) \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n) x^n$$

11

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k) \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1+\dots+X_k=n) x^n}_{G_{X_1+\dots+X_k} \underset{IID}{=} G_{X_1}(x)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)\, G_{X_1}(x)^k = G_N \circ G_{X_1}(x)$$

Espérance : $(G_N \circ G_{X_1})'(1) = G_N'(G_{X_1}(1))\, G_{X_1}'(1) = E(N)\, E(X_1)$

Ex : On jette une pièce épaisse $\begin{cases} F \to 0 \\ P \to 1 \\ T \to 2 \end{cases}$ Proba $= \frac{1}{3}$ n fois de suite

Equivalent en $+\infty$ de $P(X=n)$

$X = Y_1 + \dots + Y_n$

S/ $G_X(S) = \frac{1}{3^n}(1+S+S^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} P(X=k) S^k$ $\quad P(X=0)+P(X=1)S+P(X=2)S^2$

$$2\pi P(X=n) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+e^{-it}+e^{it}}{3}\right)^n e^{-int}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+e^{it}+e^{-it}}{3}\right) dt$$

$$2\pi P(X=n) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+2\cos t}{3}\right)^n dt$$

$\int_{-\pi}^{\pi}$ mieux

équiv intégral : | localisation du max $t=0$
| DL au v du max

$$\frac{1+2\cos t}{3} = \left(\frac{1+2\left(1-t^2/2+o(t^2)\right)}{3}\right)^n = \left(1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)^n$$

Méthode utile !

$$\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)^n \underset{t=\frac{u}{\sqrt{n}}}{\approx} \int_0^{\sqrt{n}\pi/4}\left(1-\frac{u^2}{3n}\right)^n du$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/3}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{n}}$$

122

Vraie preuve : On fixe $\delta \in]0, \pi/4[$ tq $\forall t \in [0,\delta[$ $1-t^2/4 \geq \frac{2\cos t+1}{3}$

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+2\cos t}{3}\right)^n dt = \int_0^\delta '' + \int_\delta^\pi ''$$

$\forall t \in [\delta, \pi]$ $\left|\frac{1+2\cos t}{3}\right| \leq k < 1$

$$\left|\int_\delta^\pi ''\right| \leq k^n (\pi - \delta)$$

Sur $[0,\delta]$ $0 \leq \left(\frac{1+2\cos t}{3}\right)^n \leq \left(1-\frac{t^2}{4}\right)^n$

$t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, $u \in [0, \sqrt{n}\delta]$. $0 \leq \left(1-\frac{u^2}{3n}+o\left(\frac{u^2}{3n}\right)\right)^n \leq e^{-u^2/4}$

$$\int_0^{\sqrt{n}\delta} \left(1-\frac{u^2}{3n}+o\left(\frac{u^2}{3n}\right)\right)^n \xrightarrow[CVD]{} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/3} du = \frac{1}{2}\sqrt{3\pi}$$

Bilan : $2\pi P(X=n) = 2u_n + o(k^n)$, $u_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{n}}$ donc $2\pi P(X=n) \sim \sqrt{\frac{3\pi}{n}}$

$P(X=n) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi n}}$

II Fonctions caractéristiques (HP) (TTU)

Déf : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on pose pour $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$

Calcul par transfert $E(e^{itX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) e^{itx}$

Si $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ $\varphi_X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(X=n) e^{itn}$

Premières propriétés : 1) $\forall x \in X(\Omega)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $|P(X=x)e^{itx}| = P(X=x)$
il y a donc CVN et continuité

2) $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ si $E(|X|) < +\infty$, φ_X est C^1 et $\varphi_X'(0) = E(X)$

D/ $u_n(t) = P(X=n) e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, il vient $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|u_n'(t)| \leq |n| P(X=n)$
la série dérivée TàT converge normalement

3) Si X et Y sont indép $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ | $E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX} e^{itY})$
$= E(e^{itX}) E(e^{itY})$

Ex $X = X_1 + \cdots + X_n$, X_k de Rademacher

$$\varphi_{X_1} = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t$$

$$\varphi\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\right)(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \cos^n \frac{t}{\sqrt{n}} \longrightarrow e^{-t^2/2}$$

moins constante

Y

intuitive / formelle

ii) $X_p : \Omega \to \mathbb{Z}$ on suppose $\varphi_{X_p} \xrightarrow{CVS} \varphi_X$ Alors $X_p \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (infini)

càd $\forall n \in \mathbb{Z}$ $P(X_p = n) \longrightarrow P(X = n)$

D/ $P(X_p = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X=k)e^{ikt}\right) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{X_p}(t) e^{-int}\, dt$

$\forall p, \forall t$ $\left|\varphi_{X_p}(t) e^{-int}\right| \leq 1$ CV bornée dominée sur $[0, 2\pi]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{X_p}(t)\, e^{-nit}\, dt$$

$$\xrightarrow{CVB} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int}\, dt$$

$$P(X = n)$$

Exercices 1) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ deux VAI indep

intuitivement

i) On suppose que $X+Y$ est p.s constante. Mq X et Y sont p.s constantes.

S/ i) $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$ $V(X+Y) = 0$ car X et Y p.s cte

Or X et Y independants $V(X) + V(Y) = 0$, $V(X) = V(Y) = 0$ OK

Sinon

ii) On regarde $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ est p.s constante : $X+Y = c$ constant

$\varphi_{X+Y}(t) = e^{itc}$

il vient $\forall t \ |\varphi_X(t)\varphi_Y(t)| = |e^{itc}| = 1$

or $|\varphi_X(t)| = \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} P(X=m)e^{imt}\right| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} P(X=m) = 1$

On suppose par exc : $P(X=0) > 0$ $(P(X=1) > 0 \ \dots)$

S'il existe $N\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$ tq $\left|\sum_{k=-N}^{N} P(X=k)e^{ikt}\right| < \sum_{-N}^{N} P(X=k)$

il vient $|\varphi_X(t)| \leq \left|\sum_{-N}^{N} P(X=k)e^{ikt}\right| + \left|\sum_{|m|\geq N} P(X=m)e^{kt}\right|$

$< \sum_{-N}^{N} P(X=k) + \sum_{|m|\geq N} P(X=k) = 1$ ABS

Donc $\forall N\in\mathbb{N}^* \ \forall t\in\mathbb{R} \ \left|\sum_{-N}^{n} P(X=k)e^{ikt}\right| = \sum_{-N}^{N} P(X=k)$

usuel : $P(X=0) > 0$, $P(X=k)e^{ikt} \in \mathbb{R}^+$, $k = -N \dots N$

donc $\forall k \neq 0 \ P(X=k) = 0$ OK

Ex : Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de VAAID de même loi $\Omega \to \mathbb{Z}$ $\quad$ indep des X_i N $\Omega \to \mathbb{N}^*$

$S_N : \omega \mapsto \sum_{k=-N(\omega)}^{N(\omega)} X_k(\omega)$, On suppose $E(X_1) = 0$, $E(N^2) < +\infty$, $E(X_1^2) < +\infty$

S/ On calcule ! $E(e^{itS_N}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P(S_N = m)e^{itm}$

$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(N=k \wedge \sum_{i=-k}^{k} X_i = m\right) e^{itm}$

$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)\, P\left(\sum_{-k}^{k} X_i = m\right) e^{it\dots}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\left(\sum_{-k}^{k} X_i = m\right) e^{it\dots}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)\, \varphi_{X_0}^{2k+1} = \varphi_{X_0} G_N(\varphi_{X_0}^{2}$

Avec $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ $E(e^{itS_N}) = G_N(\varphi_{X_1}) \hat{=} f$

$f'(t) = G_N'(\varphi_{X_1}(t))\, \varphi'_{X_1}(t)$ $f'(0) = 0$ $E(S_N) = 0$

$f''(t) = G_N''(\varphi_{X_1}(t))\, \varphi'^2_{X_1}(t) + G_N'(\varphi_{X_1}(t))\, \varphi''_{1}(t)$

$\varphi'_{X_1}(0) = E(X_1) = 0$

$f''(0) = G_N'(1)\, V(X_1)$, $V(S_N) = E(N)\, V(X_1)$