Equations linéaires différentielles

I EDL d'ordre 1

Donnée : J est un intervalle de $\mathbb{R}$
$A, B, C \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$

(E_i) : $A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) + C(x) = 0$
On note S_{in} l'ensemble des solutions

Obs : 1) Si $C = 0$, S_0 est un $\mathbb{C}$-ev (0 est sol)
2) Si y_p est une sol, on part de (E_i) ou $y \in S_{in} \Leftrightarrow$
$y - y_p$ sol de $A(x)y'(x) + B(x)y(x)$

⚠ Si A possède 3 zéros, on peut avoir $\left| \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_{in} = \emptyset \end{array} \right.$

|| On se place sur un intervalle $I \subset J$ sur lequel A ne s'annule pas

$\longrightarrow (\mathcal{E})\ y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$, $a = -\frac{B}{A}$, $b = -\frac{C}{A}$

$(\mathcal{E})$ est une EDO le coeff de y' ne s'annule pas

Th : 1) Les solutions de $E_0 : y' = ay$ sont les fonctions de la forme $Ce^{\alpha(x)}$, où $C \in \mathbb{C}$, et α d'une primitive (fixée) de a sur I

2) Soit $x_0 \in I$. Une solution particulière y_p de $(\mathcal{E})$ est donnée par $\forall x \in I\ y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\alpha(t)}\, b(t)\, dt\; e^{\alpha(x)}$

Il vient alors $S = y_p + S_0$

3) Cauchy (linéaire) si l'on fixe $x_0 \in I$, il vient $\forall y_0 \in \mathbb{C}\ \exists! y \in S,\ y(x_0) = y_0$

11,0

U

D/ ① $\underline{CN}$ On utilise un facteur intégrant $e^{-\alpha(x)}$

Si y est sol. sur I, il vient $\forall x \in I$ $(\underbrace{e^{-\alpha(x)}y(x)}_{z(x)})' = -a(x)\,z(x) + a(x)\,z(x) = 0$

I étant un intervalle, z est constante sur I

Réciproque claire.

② Variation des constantes : on cherche $C(x) : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$
tq $x \mapsto C(x)\,e^{\alpha(x)}$ soit sol de $(\mathcal{E})$
y vérifie $(\mathcal{E}) \iff \forall x \in I$, $C'(x)\,e^{\alpha(x)} + \cancel{C(x)\,a(x)\,e^{\alpha(x)}} = \cancel{-a(x)\,C(x)\,e^{\alpha(x)}} + b(x)$

$\iff \forall x \in I \quad C'(x) = e^{-\alpha(x)}\,b(x)$

$C(x) = \int_0^x e^{-\alpha(t)}\,b(t)\,dt$ convient

puis y sol de $(\mathcal{E}) \iff y - y_p$ sol de $(\mathcal{E}_0) \iff y = y_p + \lambda\,e^{\alpha(x)}$

③ On remarque $y_p(x_0) = 0$ si $y = y_p + \lambda\,e^{\alpha(x)}$

$y(x_0) = y_0 \iff \lambda\,e^{\alpha(x_0)} = y_0 \iff \lambda = e^{-\alpha(x_0)}\,y_0$

⚠ $(\mathcal{E}_0)$ seule la solution nulle possède un zéro sur I.
⚠ $(\mathcal{E}_0)$ $y'(x) + a(x)\,y(x) = 0$ sol. $e^{-A(x)}$
⚠ Valable pour les EDO.
Exemple : On envisage $(\mathcal{E}_0)$ $\sin^3 x\,y'(x) - 2\cos x\,y(x) = 0$

Résolution sur $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$, $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'$

$\rightarrow$ $y(x) = C_n \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

elle se prolonge de façon $\mathcal{C}^\infty$ en $[n\pi, (n+1)\pi]$ en $n\pi$ avec $y(0) = 0$

$\exists$? $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dim ?

3 ny : $\forall (C_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ $\exists z$ sol $\mathcal{C}^\infty$ de $(\mathcal{E})$ $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in I_n \end{array} \right.$ $z(x) = C_n e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$

2) $\sin^3 x\, y'(x) - 2\cos x\, y(x) = \sin^3 x\, \varphi(x)$

$$y'(x) - \frac{2\cos x}{\sin^3 x} - \varphi(x)$$

VDC $\quad e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} C'(x) = \varphi(x) \qquad C(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, e^{\frac{1}{\sin^2 t}}$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \left(\int_{x_0}^{x} \varphi(t) e^{\frac{1}{\sin^2 t}} dt \right) + \lambda_n e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

pas forcément prolong en $n\pi$

$\varphi(t) = e^{\frac{1}{t^4} \xrightarrow{} -\infty}$ $\cos t \to \infty$ au bord (vérif)

donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Exercice 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tq $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ Mq $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

S/ On écrit $f(x) + f'(x) = \ell + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

VDC (EH) $y' + y = 0$ sol : Ce^{-x}

(VDC) $y(x) = C(x) e^{-x}$ $\left| y'(x) + y(x) = C'(x) e^{-x} = \ell + \varepsilon(x) \right.$

$$C'(x) = \ell e^x + \varepsilon(x) e^x$$

$$y(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \ell e^x + e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t) e^t\, dt$$

$$y(t) = \lambda e^{-x} + \ell + e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t) e^{t}\, dt$$

$\varepsilon(t) e^t = o(e^t)$, $\int_0^{+\infty} \underbrace{e^t}_{>0} dt$ DV

$$\int_0^x e^t \varepsilon(t)\, dt = o(e^x)$$

$$e^{-x}\int_0^x \varepsilon(t)e^t\,dt \xrightarrow{+\infty} 0$$

② Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tq $f + f' \in L^2(\mathbb{R}^+)$

Mq : $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $f' \in L^2(\mathbb{R}^+)$

S/ VDC $y' + y = g \in L^2$, $y(x) = C(x)e^{-x}$, $C'(x) = e^{x}g(x)$

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \underbrace{e^{-x}\int_0^x e^{t}g(t)\,dt}_{L^2 ?}$$

Ça marche pas.

Calcul direct : $(f+f')^2 = f^2 + 2ff' + f'^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (HYP)

$$\int_0^x f^2 + (f^2(x) - f^2(0)) + \int_0^x f'^2 \leq M$$

$$\int_0^x f^2 + \int_0^x f'^2 + f^2(x) \leq M + f^2(0)$$

⚠ $y' - y = 0 \to y(x) = \lambda e^{x}$

Ex : Soit $T > 0$; $a \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $b \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$(\mathcal{E})$: $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$

CNS sur a pour que $(\mathcal{E})$ possède une sol périodique et une seule

S/ Résolution par VDC : $y(x)$: $y(x) = \lambda \exp\left(\int_0^x a(t)\,dt\right) + e^{-\int_0^x a(t)dt}\left(\int_0^x e^{\int_0^t a(t)} b(t)\,dt\right)$

Soit $z(t) = y(t+T)$ par périodicité des coeff est aussi solu de $(\mathcal{E})$

I (ED) y est périodique $\Leftrightarrow y = z \Leftrightarrow y(0) = z(0) \overset{\text{Cauchy}}{\Leftrightarrow} y(0) = y(T)$

$y(0) = y(T) \iff \lambda\left(1 - e^{\int_0^T a}\right) = e^{\int_0^T a}\left(\int_0^T e^{-\alpha(t)} b(t)\,dt\right) = I$

1^{er} cas $\int_0^T a \notin 2i\pi\mathbb{Z}$, il y a 1 sol. periodique et 1 seule

$$\lambda = \frac{I}{1 - e^{\int_0^T a}}$$

how to say a

$2^{ème}$ cas $\int_0^T a \in 2i\pi\mathbb{Z}$, $I \neq 0$ pas de sol périodique

$I = 0$ ∞

RM : Si $a = 0$ on trouve $y' = b$ → $\int_0^T b \neq 0$ pas de sol periodique

→ $\int_0^T b = 0$ toutes les sol sont periodiques.

Ex $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, a, b DSE au $v(0)$ Alors toute sol est DSE au $v(0)$.

S/ Analyse-synthese | $\alpha(t) = \int_0^x a$ est DSE au $v(0)$, $e^{\alpha(t)}$ et $e^{-\alpha(t)}$ aussi (Revoir !)

Compléments:

Gronwall: "Ex" Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $u, v \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, positives $C \geq 0$. On suppose que $\forall x \in [a,b]$ $u(x) \leq C + \int_b^x u(t)v(t)\,dt$ alors $u(x) \leq C \exp\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)$

APPL : Si $v \in L^1([a, +\infty[)$, u est borné

D/ 1^{er} cas : $C > 0$. Comme v est positive

il vient $\forall x \in [a,b]$ $0 \leq u(x)v(x) \leq \left(C + \int_0^x uv\right) v(x)$

de là $\forall x \in (a,b)$ $\dfrac{u(x)\,v(x)}{C + \int_0^x uv} \leq v(x)$

3/3

on intègre " $\log\left(\frac{z(x)}{z(0)}\right) \leq \int_0^x v$

$C \quad z(x) \leq C.\exp\left(\int_0^x v\right)$ $0 \leq u \leq z$

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas}}$: $\underline{C=0}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in [a,b] \quad 0 \leq u(x) \leq \varepsilon \exp\left(\int_0^x v\right)$

$\underline{\varepsilon \to 0}$

$\underline{\text{RM}}$: $f \geq 0$, $\mathcal{C}^0$ $\exists M > 0 \; f(x) \leq M \int_0^x f$ alors $f = 0$

ignorer les prolongements

En effet $\left(e^{-Mx}\int_0^x f\right)' = e^{-Mx} f(x) - M e^{-Mx} \int_0^x f \leq 0$ | $e^{-Mx}\int_0^x f(t) \geq 0$ et nulle en 0

II. EDL Vectorielles

Données : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}(I, E)$

$(\mathcal{E})$: $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ $\quad (\mathcal{E}_0)$ $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$

Systèmes : $E = \mathbb{K}^n$, $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$

A) Généralités :

On note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ S_0 — de $(\mathcal{E}_0)$

$\underline{\text{Prop}}$: 1) S_0 est un $\mathbb{K}$-ev

2) Si X_p est une sol de $(\mathcal{E})$ | X sol de $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow X - X_p$ sol de $(\mathcal{E}_0)$

$S = X_p + S_0$.

3) Superposition : X_k sol de $X' = \underbrace{A \cdot X}_{\text{le m}} + B_k$

alors $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k$ est sol de $X' = \underbrace{AX}_{\text{linéarité}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k B_k}_{B}$

Pb de Cauchy Soit $\left|\begin{array}{l} t_0 \in I \\ x_0 \in E \end{array}\right.$ existence et unicité d'une sol de (E)

B) Théorème de Cauchy linéaire

Th : Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in E$, il existe et de façon unique une solution sur I de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ tq $X(t_0) = x_0$

(HP) D/ Obs X est sol de $(E) \Longleftrightarrow X$ est $\mathcal{C}^0$ et $\forall t \in I$ $X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)X(s) + B(s)\, ds$

$$\int_{t_0}^{t} X'(t)\,dt = X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^{t} \big(A(t)X(t) + B(t)\big)\,dt$$

si $\left|\begin{array}{l} X\ \mathcal{C}^0 \\ \forall t,\ X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(t)\cancel{X}(t) + B(t))\,dt \end{array}\right.$ alors $\left|\begin{array}{l} X \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ X(t_0) = x_0 \text{ on peut dériver} \end{array}\right.$

$x \in S$

On introduit la suite définie dans $\mathcal{C}(I, E)$ par :

$$X_0 = x_0,\ \forall t \in I\ X_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)X_k(t) + B(t)\,dt$$

Objectif $\sum (X_{k+1} - X_k)$ CVN sur les compacts de I

Soit J un segment contenant $\left|\begin{array}{l} \alpha = \sup_{t \in J} |||A(t)||| \\ \beta = \sup_{t \in J} |||B(t)||| \end{array}\right.$

Soit $t \in J$, $t \geq t_0$, il vient $\|X_1(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(u)x_0 + B(u)\|\,du$

$$\leq (\alpha\|x_0\| + \beta)(t - t_0)$$

On va mq $\forall k \geq 2$ $\forall t \in J$ $\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\| \leq \alpha^{k-1}(\alpha\|x_0\| + \beta)\dfrac{(t - t_0)^k}{k!}$ (*)

Recurrence si $t \in J$ $\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (A(s)X_k(s) - X_{k-1}(s))\,ds \right\|$

$$\leq \alpha \int_{t_0}^{t} \|X_k(s) - X_{k-1}(s)\|\,ds$$

$$\leqslant \alpha^k (\alpha \|x_0\| + \beta) \int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^k}{k!} ds = \alpha^k (\alpha \|x_0\| + \beta) \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$\ell = \ell(J)$ $\forall k \geqslant 1$, $\forall t \in J$ $\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\| \leqslant \underbrace{\alpha^{k-1} (\alpha \|x_0\| + \beta) \frac{\ell(J)^k}{k!}}_{\text{série CV}}$

(CC) $\sum (X_k - X_{k-1})$ CVN sur les compacts de I
(X_k) CVU ...

On peut donc passer à la limite dans la relation :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in I$, $X_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t) X_k(t) + B(t) ds$ ...

Unicité : On suppose : $Y, Z \in \mathcal{S}$, avec $Y(t_0) = Z(t_0)$. On pose $X = Y - Z$

X est s° sur I de $X'(t) = A(t) X(t)$, avec $X(t_0) = 0$

S_1 : Soit $\left| \begin{array}{l} t \geqslant t_0 \\ \tilde{X}(t) = \int_{t_0}^{t} \|X'(s)\| ds \end{array} \right.$. Il vient

$\forall t \in I$, $t \geqslant t_0$: $0 \leqslant \tilde{X}'(t) = \|X'(t)\| \leqslant \|A(t)\| \|X(t)\|$
$\leqslant \|A(t)\| \cdot \tilde{X}(t)$

GRONWALL : $\tilde{X} = 0$

S_2. Avec ce qui précède, pour $\left| \begin{array}{l} t \geqslant t_0 \\ t \in J \end{array} \right.$: $\|X(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} X'(s) ds \|$
$\leqslant \int_{t_0}^{t} \alpha \|X\|_{\infty, J} ds$

$\longrightarrow \|X(t)\| \leqslant \alpha \|X\|_{\infty} (t - t_0)$

On itère : $\forall t \in J$, $t \geqslant t_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$:
$\|X(t)\| \leqslant \alpha^k \|X\|_{\infty} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!}$ | $k \to +\infty$, $X = 0$

CPI : $\left| \begin{array}{l} A \text{ est cste} \\ B = 0 \end{array} \right.$ Cas particulier important

$X' = AX$, $X(0) = x_0$ ($I = \mathbb{R}$)
$X_1(t) = x_0 + \int_0^t A x_0 ds = x_0 + t A x_0$
$X_2(t) = x_0 + \int_0^t A(x_0 + s A x_0) ds$

$X_2(t) = x_0 + t A x_0 + \frac{t^2}{2} ...$

Corollaire (I) 1) $B=0$ $t_0 \in I$ est fixé, Alors

$$\Phi_{t_0} \left| \begin{array}{l} S_0 \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto X(t_0) \end{array} \right.$$ est un isomorphisme et de ce fait

$\dim S_0 = n$

2) $$\Phi_{t_0} \left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto X(t) \end{array} \right.$$ est une bijection affine (respecte les barycentres)

Ex: ① Soit F un sev de E ($=\mathbb{K}^n$ si l'on veut) tq $\forall t \in I$ $A(t)F \subset F$

Soit X sol de (S_0) tq $X(t_0) \in F$ Mq $\forall t \in I$, $X(t) \in F$

S/ S1 F est fermé $\int_{t_0}^{t} A(s) x_0 \, ds \in F$ car $\int_{t_0}^{t} \underbrace{A(s) x_0}_{\in F} ds$

S2 On pose $A(s)\big|_F^F = \tilde{A}(s)$

On résout $\left| \begin{array}{l} X'(t) = \tilde{A}(t) X(t) \\ \tilde{X}(t_0) = x_0 \end{array} \right.$ $\to$ il y une sol notons $Y : I \to F$

or Y est aussi solution de (E_0) donc par unicité $Y = X$

② Donnée A $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\mathcal{C}^0} M_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$ $\forall t \geq 0$ $A_{ij}(t) \geq 0$

On suppose que $x_0 \geq 0$; soit X la sol de (E_0) tq $X(0) = x_0$, mq

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) \geq 0$

S/ Facilement $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $X_k(t) \geq 0$. (demo Cauchy)

c) Systèmes fondamentaux, résolvant

$B \in \mathcal{C}(I, E)$ $\dim_{\mathbb{K}} E = n$

$A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$

Th Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $(X_1, \dots, X_p) \in S_0^p$ $\left(X_i'(t) = A(t)\, X_i(t) \right)$

1) $(X_1, \dots, X_p)$ est libre dans $\mathcal{C}^1(I, E)$
2) $\exists t_0 \in I$ $(X_1(t_0), \dots, X_p(t_0))$ est libre ds E
3) $\forall t \in I$ $(X_1(t), \dots, X_p(t))$ est libre ds E

D/ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) clair, 1) $\Rightarrow$ 3) : soit $t \in I$, Rappel $\Phi_t \left| \begin{array}{l} S_0 \to E \\ X \mapsto X(t) \end{array} \right.$ est un isomorphisme

donc $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ libre $\Rightarrow$ $\left(\Phi_t(X_i)\right)_{1 \leq i \leq p}$ est libre $\square$

Def : Un système fondamental de sol de (E_0) est une base de S_0

On a
$(X_1, \dots, X_n)$ SF de (E)
$\Leftrightarrow$ $\exists t_0 \in I$, $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ base de E
$\Leftrightarrow$ $\forall t \in I$ $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de (E)

Résolvance (HP) Soit $t_0 \in I$, on suppose $E = \mathbb{K}^n$
On se donne $X_1, \dots, X_n$ sol de (E) tq $X_i(t_0) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$$R(t, t_0) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$$

Th Soit $(\tilde{E}_0)$ le système à valeurs ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $M'(t) = A(t) \times M(t)$

$t \mapsto R(t, t_0)$ est la sol M de $(\tilde{E}_0)$ tq $M(t_0) = I_n$

D/ Pour appliquer Cauchy linéaire, on doit vérifier que les opérateurs
$\tilde{A}(t) \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto A(t) \times M \end{array} \right.$ sont continus (OK)

et que $t \mapsto \tilde{A}(t)$ est continue de I dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$
Soit $t, t_0 \in I$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $|||(A(t) - A(t_0))M||| \leq |||A(t) - A(t_0)|||\ |||M|||$
$\leq |||A(t) - A(t_0)|||$ si $|||M||| \leq 1$

Il est alors clair que $R'(t, t_0) = [A(t)\, X_i(t)]_{1 \leq i \leq n} = A(t)\,(X_1(t), \dots, X_n(t))$

avec $R(t_0,t_0) = I_n$

Ex : $A(t)$ est constante $= A$, $I = \mathbb{R}$; alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $R(t,t_0) = \exp((t-t_0)A)$

en effet $\left| \begin{array}{l} \exp((t-t_0)A)' = A \exp((t-t_0)A) \\ t = t_0 \longrightarrow I_n \end{array} \right.$

Ex (Systèmes de Lax) Données $A : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{K})$

Mq $\Updownarrow$ $\exists P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, GL_n(\mathbb{K}))$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P^{-1}(t)A(0)P(t)$

$\exists L \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [L(t), A(t)]$

S/ Dérivabilité de $P^{-1}(t)$, on part de $\forall t \in \mathbb{R}$ $P^{-1}(t)P(t) = I_n$

en dérivant $(P^{-1}(t))' P(t) + P^{-1}(t) P'(t) = 0$

$$\text{donc } (P^{-1}(t))' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t)$$

$\Downarrow$ il vient $A' = -P^{-1}P'P^{-1}A(0)P + P^{-1}A(0)P'$

$$= -P^{-1}P'A + P^{-1}A(0)PP^{-1}P' = -P^{-1}P'A + AP^{-1}P'$$

$$= LA - AL, \ L = -P^{-1}P'$$

$\Uparrow$ On cherche P à partir de de $L = -P^{-1}P'$

soit $P' = -PL$

SDL à données matricielles et continues

Soit P la solution de ce système tq $P(0) = I$

Les colonnes de ${}^tP$ forment un système de sol de $X' = -{}^tLX$

libre pour $t=0$ donc ~~fontionnel~~ fondamental $\forall t$, $P(t) \in GL_n(\mathbb{K})$

$(PAP^{-1})' = P'AP^{-1} + PA'(-P^{-1}P'P^{-1}) + P(AL - LA)P^{-1}$

$= P'AP^{-1} - PAP^{-1}P'P^{-1} + (-P'AP^{-1} - PALP^{-1})$

$= 0$

CC $PAP^{-1} = \text{cte} = A(0)$.

Ex : (Floquet) Soit $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}^0$, 2π-périodique
On note $(X_1, \dots, X_n)$ un SF de sol $X' = AX$ avec $X_i(0) = \varepsilon_i$, $i = 1 \dots n$
CNS pour que le SD matriciel $M' = AM$ possède une sol 2π-périodique

S/ Soit M une sol de $M' = AM$ sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{M} : t \mapsto M(t+2\pi)$

On a M 2π périodique $\Leftrightarrow M = \tilde{M} \Leftrightarrow M(0) = \tilde{M}(0) \Leftrightarrow M(2\pi) = M(0)$

Posons $R(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$; si $N(t) = R(t) M(0)$

il vient $\begin{cases} N'(t) = R'(t) M(0) = A(t) R(t) M(0) \text{ ie } N' = AN \\ N(0) = M(0) \end{cases}$

donc (unicité) $\forall t$ $M(t) = R(t) M(0)$

Cela dit $M(0) = M(2\pi) \Leftrightarrow M(0) = R(2\pi) M(0)$
$\Leftrightarrow (I - R(2\pi)) M(0) = 0$

On a ~~est~~ 2π périodique (!) la CNS $1 \in \mathrm{Spec}(R(2\pi))$

D) Variation des constantes :

Données $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ $\quad X'(t) = A(t) X(t) + B(t)$

$(X_1, \dots, X_n)$ est un SF de solution de $\mathcal{E}_0$

On cherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t) \quad , t \in I \quad , \lambda_i : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{K}$$

Analyse $X'(t) = A(t) X(t) + B(t) \Leftrightarrow \sum_1^n \lambda_i' X_i + \sum_1^n \lambda_i X_i' = \sum_1^n \lambda_i A X_i + B$

$$\Leftrightarrow \sum_1^n \underset{\substack{\downarrow \\ \mu_i}}{\lambda_i'} X_i = B$$

$$\underset{\text{Cramer}}{\iff} \quad \mu_i(t) = \frac{\det(X_1(t), \dots, \overset{i}{B(t)}, \dots, X_n(t))}{\det(X_1(t), \dots, X_n(t))}$$

$\lambda_i' = \mu_i$ on cherche

$\mu_1(t) X_1(t) + \dots + \mu_n(t) X_n(t) = B(t)$

$\det(X_1(t), \dots, \underset{i}{B(t)}, \dots, X_n)$

$= \mu_i(t) \det(X_1, \dots, X_n)$

Si λ_i est une primitive de μ_i sur I $i = 1 \dots n$

$X = \sum_1^n \lambda_i X_i$ est une sp de $(\mathcal{E})$

RM $\lambda_i \mapsto \lambda_i + cste$ ajoute une sol de S_0

Bourbaki Algèbre Tome 3

I) Wronskien C'est $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$

$$\sum_{i=1}^n \det(x_1, \dots, u(x_i), \dots, x_n) = \mathrm{Tr}(u) \det(x_1, \dots, x_n)$$

D/ $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \det(x_1, \dots, u(x_i), \dots, x_n)$ est n-linéaire

$$\Psi(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(x_1, u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \det(u(x_1), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Ψ est alterné $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\Psi = \lambda \det$ où $\lambda = \Psi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\lambda = \Psi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & 1 & \\ a_{n1} & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & \vdots \; 1 & \\ & a_{n2} & \ddots \; 1 \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} 1 & & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} + \dots + a_{nn}$$

$$[u] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

APPL : $W'(t) = \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), \dots, X_i'(t), \dots, X_n(t)) = \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), \dots, A(t) X_i(t), \dots, X_n(t))$

$= Tr(A(t)) \det(X_i(t))$ Bref $\forall t \in I$, $W'(t) = Tr(A(t))\, W(t)$

t_0 fixé $\forall t \in I$ $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\, ds\right)$

On retrouve $\left|\begin{array}{l} W \text{ ne s'annulle pas} \\ \text{ou } W \equiv 0. \end{array}\right.$

III EDLS d'ordre $n \geq 2$:

Données: I int de $\mathbb{R}$; $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$

(E') $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)\, y(x) = b(x)$ EDO

(E_0) E' pour $b = 0$

Th : a) Pour tout choix de $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ il existe une sol et une seule $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de (E) sur I tq $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

b) L'application Φ_{x_0} $\left|\begin{array}{l} S_0 \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ y \longmapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme

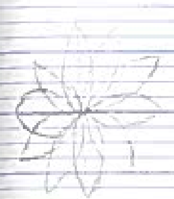
D/ Système équivalent

Lemme: y est sol de (E) sur I $\iff$ y est $\mathcal{C}^n$ et $\exists (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tq $(y, z_1, \dots, z_{n-1}) = X$ soit sol de $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_1(I, M_n(\mathbb{K}))$

De plus: $\left(y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\right) \iff X(x_0) = (y_0, \dots, y_{n-1})$

En effet: $\Rightarrow$ On pose $z_1 = y', \dots, z_{n-1} = y^{(n-1)}$, il vient

$$\begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$



$(\Leftarrow)$ Il vient $z_1 = y'$, $z_2 = z_1'$, ..., $z_{n-1} = z_{n-2}'$ | y est $\mathcal{C}^{n-1}$, $y^{(k)} = z_k$

enfin $\exists y^{(n)} = z_{n-1}' = -a_0 - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)} + b$.

D/ On applique Cauchy - linéaire

Coefficients constants / homogène : $(\mathcal{E})\ y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0$

Polynôme caractéristique $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $D \begin{pmatrix} E \to E \\ f \mapsto f' \end{pmatrix}$, f solution de $(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow P(D)(f) = 0$

On écrit $P(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, λ_i 2 à 2 $\neq$

il vient $S_0 = \mathrm{Ker}\, P(D) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, (D - \lambda_i I)^{\alpha_i}$

Noyau de $(D - \lambda I)^\alpha$: Soit $f \in E$, posons $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$

On vérifie par récurrence sur α que $(D - \lambda I)^\alpha f \Leftrightarrow g^{(\alpha)} = 0$

$\left(\alpha = 1 \quad (D - \lambda I)(e^{\lambda t} g(t)) = e^{\lambda t} g'(t)\right)$ puis :

$0 = (D - \lambda I)^{\alpha+1} f(t) = (D - \lambda I)^{\alpha} (e^{\lambda t} g'(t)) \Leftrightarrow g^{(\alpha+1)} = 0$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, (D - \lambda I)^\alpha = \{ e^{\lambda t} P(t) \mid P \in \mathbb{C}[X], \deg P \leq \alpha - 1 \}$

Exercice : Mq $(e^{\mu t} t^k)_{\substack{\mu \in \mathbb{C} \\ k \in \mathbb{N}}}$ est libre

S/ Soit $(e^{\mu_i t} t^k)_{\substack{i = 1, \dots, n \\ \mu_i \neq \mu_j \\ 0 \leq k \leq \alpha_i - 1}}$, $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)^{\alpha_i} = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

Notre famille est la base des sol de $P(D) \cdot y$

IV EDLS du second ordre

Généralités (E) $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = D(x)$ | $A, B, C, D \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$, $x \in I$

(E_0) $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$

Prop : L'espace des solutions de (E_0) est un $\mathbb{C}$-ev S_0
de (E) est soit vide, soit un espace affine : $S = y_p + S_0$

Pb : Singularités de (E) ie $\{x_0 \in I \mid A(x) = 0\}$

Idée importante : Pour franchir les singularités, user de DSE
On se place désormais sur un intervalle J où A ne s'annule pas d'où l'EDO

$$(E)\quad y'' + a(x)y' + y\,b(x) = c(x)$$

$$(E_0)\quad y'' + a(x)y' + y\,b(x) = 0$$

A) Système associé :

Th a) y est sol de (E) $\Longleftrightarrow$ y est $\mathcal{C}^1$ et $\exists z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ tq
$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ soit solution de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}}_{B(x)}$

Pommellet : Admission des deux prochaines démos peut-être ? Ça sert en très grande série ? Cf page 157

b) Pour tout $x_0 \in I$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{C}^2$, il existe une sol et une seule y de (E)
$y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$

c) Soit $x_0 \in I$, l'application $\begin{vmatrix} S_0 \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto (y(x_0), y'(x_0)) \end{vmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev

D/ a) $\Rightarrow$ y est $\mathcal{C}^2$ et on pose $z = y'$, d'où $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ Il vient $\begin{vmatrix} y \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ z \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{vmatrix}$ puis $z = y'$ donc y est $\mathcal{C}^2$ et enfin $z' = y'' = -by - ay' + c$

b) et c) Th de Cauchy linéaire : $\dim_{\mathbb{C}} S_0 = 2$

RM On voit que l'application qui va de S_0 dans l'ev des solutions de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A(x)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ définie par $y \longmapsto (y, y')$ est un isomorphisme (réciproque $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1$)

VDC : pas la même que EDL 1 et 2

Bases de S_0 : Avec ce qui précède (RM) on a :

Th : (y_1, y_2) base de $S_0 \iff \left(\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}}_{Y_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}}_{Y_2}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_0$

Conséquence I : Soit $x_0 \in I$, (y_1, y_2) Base de S_0

$\iff \left(\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}\right)$ est libre

à retenir

$\iff \Big(\underbrace{W_{y_1, y_2}}_{\text{Wronskien}}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$

Prop : Soient $(y_1, y_2) \in S_0^2$ et $\omega(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$

On a : 1) (y_1, y_2) base de $S_0 \iff \omega$ ne s'annule pas

$\iff \exists x_0, \ \omega(x_0) \neq 0$

2) $\exists C \in \mathbb{C}, \forall x \in I \quad \omega(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right)$

Caractérisation des bases.

D/ 1) et 2) directement $\omega'(x) = y_1(x) y_2''(x) - y_1''(x) y_2(x)$

$= y_1(x)\left[-a(x) y_2'(x) - b(x) y_2(x)\right]$

$- \left[a(x) y_1'(x) - b(x) y_1(x)\right] y_2(x)$

$= -a(x)\,\omega(x)$

RMI : Si $a \equiv 0$ $\left(y'' + q(x)\, y = 0\right)$: W est constant.

Exercice : Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, (E) $y'' + q(x)\, y = 0$. On suppose que $q \in L^1(\mathbb{R}^+)$, Mq (E) possède des sol non bornées

S/ Par l'absurde : Soit (y_1, y_2) une base de S_0, elles sont bornées

base de sols : toujours penser au Wronskien

$W_{y_1, y_2} = C \neq 0$

On regarde $y_1'' = -q y_1$: $|y''| \leq \|y_1\|_\infty |q|$

Aussi $y_1'' \in L^1(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \int_0^x y_1''(t)\,dt = y_1'(x) - y_1'(0)$ possède une lim en $+\infty$.

revoir $\Rightarrow$ y_1 étant bornée $\ell = 0$: Ainsi $\omega(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x) \longrightarrow 0$

donc $C = 0$: contradiction (...)

intégrabilité sommabilité $\Rightarrow$ majoration par v. absolue

B) Recherche de solution :

Δ Méthode de variation des constantes

On utilise le système associé

$\longrightarrow \lambda(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$

on part de (y_1, y_2) base de S_0

$y(x) = \lambda_1(x)\, y_1(x) + \lambda_2(x)\, y_2(x)$

$\longrightarrow$ on remplace cte $\to$ à la place fonction

$\hookrightarrow$ $\boxed{}$ ou $\boxed{}$

Z est solution du système associé équivaut

matrice A pour calcul ♡ retenir que $-a$ est la trace

à : $\lambda(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}' + \mu(x) \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}' + \lambda' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = A(\lambda Y_1 + \mu Y_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{\text{matrice wronskienne}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}}_{\text{dérivée}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}}_{\text{second membre}}$$

bien mémoriser $\Rightarrow$ facilite la vie

Ex $y'' + y = \tan x$ $\quad$ $(\cos x, \sin x)$ base de sol de l'eq homogène

matrice wronskienne $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = W$

Matrice orthogonale $\Rightarrow$ inverse = transposée

$$W\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \operatorname{tg} x\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{tg} x\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \lambda' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \mu' = \sin x \quad \text{ie} \quad \mu(x) = -\cos x + C_2$$

$$\lambda' = \cos x - \frac{1}{\cos x} \longrightarrow \lambda(x) = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1$$

$$\triangleright\ y(x) = -\sin x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1\cos x + C_2 \sin x$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t\!\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$

Ex Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ tq $y''+y'+y \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Mq $y \to 0$

On écrit $y''+y'+y = \varepsilon(x)$ où $\varepsilon \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Equation homogène (EC) $x^2+x+1=0$: $e^{jx}, e^{\bar{j}x}$ base de sols S_0

$$\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ad-bc & db-bd\\ & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e^{jx} & e^{\bar{j}x}\\ je^{jx} & \bar{j}e^{\bar{j}x}\end{pmatrix}}_{W}\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

Inverse de W : $\det W = \bar{j}e^{(j+\bar{j})x} - je^{(j+\bar{j})x}$

$$= -i\sqrt{3}\,e^{-x}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{i}{\sqrt{3}}e^{x}\begin{pmatrix}\bar{j}e^{\bar{j}x} & -e^{\bar{j}x}\\ -je^{jx} & e^{jx}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{3}}e^{x}\begin{pmatrix}\bar{j}e^{\bar{j}x} & -e^{\bar{j}x}\\ -je^{jx} & e^{jx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\lambda' = \frac{i}{\sqrt{3}}\left(0 \times \bar{j}e^{\bar{j}x} - e^{\bar{j}x}\varepsilon(x)\right)e^{x} = \left(\frac{-i}{\sqrt{3}}e^{-i\sqrt{3}/2\, x}\right)e^{x/2}\varepsilon(x)$$

$$\lambda(x)e^{jx} = \underbrace{\int_0^x \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}t}e^{t/2}\varepsilon(t)\,dt\; e^{jx}}$$

$$o\left(\int_0^x e^{t/2}\,dt\right) = o\left(e^{x/2}\right) \text{ car } e^{t/2} \ldots$$

$$|e^{jx}| = 0 \ldots$$

$\rightarrow \lambda(x) e^{\delta x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

▷ Méthode de Liouville

On suppose une sol de $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$

DSE! Soit u sol qui ne s'annule pas, on cherche une autre sol de l'eq différentielle $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$

Sous la forme $y = uz$ ne pas expliciter u

y sol de $(E) \iff A(u''z + 2u'z' + uz'') + B(u'z + uz') + Cuz = 0$

$\underset{u \text{ sol de } E_0}{\iff} (Au)z'' + (2Au' + Bu)z' = 0$

on pose $Z = z'$ on a : $\iff AuZ' + (2Au' + Bu)Z = 0$

RM : Si $A + B + C = 0$, e^x est sol particulière $\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 A + \lambda B + C = 0 \\ e^{\lambda} SP \end{array} \right.$

Ex : $(x+1)y'' - xy' - y = 0$; $u = e^x$ est sol : on applique la méthode

On pose $y = uz$

$(x+1)e^x z'' + (2(x+1)e^x - xe^x) z' = 0$

donc $(x+1)z'' + (x+2)z' = 0 \rightarrow (x+1)Z' + (x-2)Z = 0$

Symbolique ⚠ $\rightarrow \frac{Z'}{Z} = \frac{-(x-2)}{(x+1)} = -1 - \frac{1}{x+1} \rightarrow \log|Z| = -x - \log(x+1) + K$

$\hookrightarrow Z = C\frac{e^{-x}}{x+1}$, C cste

⚠ pas intervalle.

$x > -1$: $z(x) = C\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt + D$, $y(x) = Ce^x\left(\int^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt\right) + De^x$

Base : e^x, $e^x\left(\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt\right)$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{DVen} -1}$

D) Etude qualitative : (HP)

$y : I \to \mathbb{R}$

Etude des zéros

"Ex" : On se donne $(\mathcal{E})$: $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$, $x \in I$ ← fct réel

Soit φ, ψ deux solo $\neq 0$ de $(\mathcal{E})$, MQ :

ⓐ Les zéros de φ sont isolés

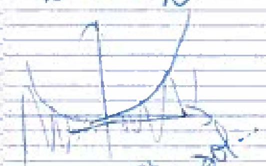
ⓑ Si $[a,b] \subset I$, $Z(\varphi) \cap [a,b]$ est fini

ⓒ Si $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$, alors ψ et φ sont proportionnelles

ⓓ Si (φ, ψ) est libre, et si $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ avec $a < b$

alors ψ s'annule dans $]a,b[$ ($\cos x$, $\sin x$ ...)

$x^2 \sin\frac{1}{x}$



peut pas être isolé

D/ ⓐ On suppose $\varphi(x_0) = 0$; si $\varphi'(x_0) = 0$, le th de Cauchy dit que $\varphi \equiv 0$, absurde

(DL) $\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0}h = \left(\varphi'(x_0) + \varepsilon(h)\right)h$

Soit $\alpha > 0$ tq $\forall h \in]-\alpha, \alpha[$ $|\varepsilon(h)| < |\varphi'(x_0)|$

Si $h \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ $\quad |\varepsilon(h) + \varphi'(x_0)| \geq |\varphi'(x_0)| - |\varepsilon(h)| > 0$

OK

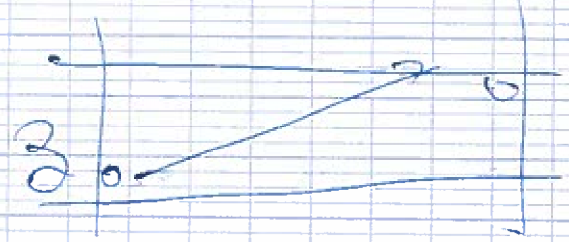
b) Supposons $A=[a,b]\cap Z(\varphi)$ infini ; soit $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ injective, il existe j $\mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$ et $\bar{x}\in[a,b]$ tq $x_{j(n)}\to\bar{x}$ | alors $\varphi(\bar{x})=0$, $\bar{x}$ non isolé !

c) 1er cas : $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=0$: unicité de Cauchy $\psi'(x_0)$ $\varphi'(x_0)$

$(\psi-\lambda\varphi)(x_0)=0$ et $(\psi-\lambda\varphi)'(x_0)=0 \to \varphi=\lambda\psi$ $\left(\lambda=\dfrac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}\right)$

d) On suppose $\psi>0$ sur $[a,b]$, on regarde $\dfrac{\varphi}{\psi}$

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'=\frac{\varphi'\psi-\varphi\psi'}{\psi^2}=\frac{W_{\psi,\varphi}}{\psi^2}$$ qui s'annule pas



Absurde

Ex : $y''+ay'+by=0$, $a,b,c\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ soit φ une solution qui s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}^+$, Mq $Z(\varphi)=\{x_0<x_1<\dots\}$ avec $x_n\to+\infty$

I/ Soit $a\geq 0$ tq on note $b=\inf\{x>a \mid \varphi(x)=0\}$ si $\neq\emptyset$

alors par $\mathcal{C}^0$ $\varphi(b)=0$, si $b=a$, a est un pt d'accumulation de $Z(\varphi)$; non !
On note x_0 le plus petit zero de φ (prendre $a=0$)
$x_1=\inf\{x>x_0 \mid \varphi(x)=0\}$ correct car $Z(\varphi)$ est infini puis
$x_{n+1}=\inf\{x>x_n \mid \varphi(x)=0\}$ | correct car sur $[0,x_n]$ φ ne possède qu'un nombre fini de zéros
Alors i) $x_n\to+\infty$ en effet $x_n\nearrow$ et si x_n est majorée, $x_n\nearrow\ell$ donc $\varphi(\ell)=0$, $\ell\in Z(\varphi)^{ac}$, absurde
ii) si $\varphi(x)=0$, on choisit p : $x_p\leq x<x_{p+1}$: $x=x_p$ par construction

Comparaison :

Ex : Données I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $y'' + p_1 y = 0$

et $z'' + p_2 z = 0$ deux EDLS d'ordre 2, avec $p_1 \leq p_2$

y et z deux sol $\neq 0$ de ces EDL, on suppose $y(a) = y(b) = 0$

alors z s'annule sur $[a, b]$

S/ ABS : $z > 0$ sur $[a, b]$, par ex : Soit $u = \frac{y}{z}$

il vient $u(a) = u(b) = 0$, $u' = \frac{y'z - z'y}{z^2}$

SNG, on suppose aussi que a et b sont des zéros consécutifs de y
zéros isolés, puis que $y > 0$ sur $]a, b[$ ainsi $y'(a) \neq 0$, $y'(b) \neq 0$
sinon $y = 0$:

DL $y(a+h) = y'(a)h + o(h) > 0$ pour h petit, $y'(a) > 0$
$y(b-h) = -y'(b)h + o(h) > 0$ —— $y'(b) < 0$

De là $u'(a) = \frac{y'(a)z(a)}{z^2(a)} > 0$, $u'(b) = \frac{y'(b)z(b)}{z^2(b)} < 0$

Or $(y'z - yz')' = y''z - yz'' = (-p_1 yz + p_2 yz) = (p_2 - p_1)yz \geq 0$

$\hookrightarrow$ mais si $y(a) > 0$ à $y(b) < 0$ ABSURDE

Ex : $y'' + qy = 0$ avec $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, soit φ une sol. de $(\mathcal{E})$

On suppose $q(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ Mq $Z(\varphi) = \{\lambda_0 < \lambda_1 < \dots\}$ avec $\lambda_n \to +\infty$
et $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to 0$

S/ Supposons $\begin{cases} q > \omega^2 \text{ sur } [A, +\infty[\\ \omega > 0 \end{cases}$, considérons $z'' + \omega^2 z = 0$

$z(t) = \sin(\omega(t-A))$ s'annule en A et $A+\frac{\pi}{\omega}$, or $\varphi \geq \omega^2$ sur cet intervalle ; φ s'annule entre A et $A+\frac{\pi}{\omega}$

(CCP) φ possède une infinité de zéros

Avec ce qui précède, pour $n \geq A$, $x_{n+1} - x_n \leq \frac{\pi}{\omega}$ $\quad x_{n+1} - x_n \to 0$

Valeur au bord :

Pb : $a y'' + b y' + c y = 0$, $(a,b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, on fixe $a, b \in I$, $a < b$

1) Etant donnés α et β, trouver une sol y tq $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

2) tq $y'(a) = \alpha$, $y'(b) = \beta$

3) Mixe $\lambda y(a) + \mu y'(a) = \alpha$, $\lambda y(b) + \mu y'(b) = \beta$

⚠ Fausses eq différentielles, sol$'(x) = \varphi(\lambda x)$

Ex : 1) $y'' \equiv 0$ 1) Existence et unicité

2) pas de sol pour $\alpha \neq \beta$

2) $y'' + y = 0$, $a = 0$, $b = 2\pi$: $\alpha = \beta \Rightarrow$ ∞

$\alpha \neq \beta$ $\emptyset$

3) $y'' - y$ OK pour 1, 2

Ex On suppose $q < 0$, Mq 1) possède une sol. et une seule

S/ Soit (φ, ψ) un SF de solutions. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \lambda\varphi(a) + \mu\psi(a) = \alpha \\ \lambda\varphi(b) + \mu\psi(b) = \beta \end{cases} \quad \text{CRAMER} \quad \begin{cases} \lambda\varphi(a) + \mu\psi(a) = 0 \\ \lambda\varphi(b) + \mu\psi(b) = 0 \end{cases}$$

n'a que la sol nulle

Soit $y \in S$ tq $y(a) = y(b) = 0$, on va donc mq : $y = 0$ (?)

Par l'absurde on suppose $y \neq 0$, SNG, on suppose que a et b sont deux zéros de y, puis que $y > 0$ sur $]a, b[$. (voir ce qui précède)

donc $\forall t \in [a, b]$, $y''(t) = -q(t) y(t) \geq 0$

alors y est convexe, $y(a)=y(b)=0 \Rightarrow y<0$ sur $[a,b]$, absurde.

Bornitude :

1) Intégrale première

Ex : Mq les sols de $y''+e^{x^2}y=0$ sont bornées.

S/ On introduit $z=e^{-x^2}y'^2+y^2$ | $z'=-2xe^{-x^2}y'^2+2e^{-x^2}y''y'+2y'y$

$= -2xe^{-x^2}y'^2$

$e^{-x^2}y''y'+yy'=0$

$=\frac{1}{2}(e^{-x^2}y'^2+y^2)'$

z est bornée par $z(0)$, $y^2 \leq z$

Newton $y''=f(y)$, on multiplie par y' : $y''y'=f(y)y'$ si $F'=f$ $\quad \frac{1}{2}y'^2-F(y)=\text{cst}$

Ex : $y''+\sin y=0 \longrightarrow \frac{1}{2}y'^2-\cos y=C \longrightarrow \frac{1}{2}y'^2=C+\cos y$

Ex : $\lambda\in\mathbb{R}$ est fixé, $x''+\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)x=0$, Mq toutes les sols sont bornées

S/ $x''x'+xx'+\frac{\lambda}{t}xx'=0$, on choisit $a>1$ $\frac{|\lambda|}{a}<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(x'^2+x^2)=-\int_a^t\frac{\lambda}{s}x(s)x'(s)\,ds+C$$

$$x'^2+x^2=-2\left(\left[\frac{\lambda}{s}\frac{x^2(s)}{2}\right]_a^t+\int_a^t\frac{\lambda}{s^2}\frac{x^2(s)}{2}\,ds\right)+2C$$

$$x'^2+x^2\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)=K-\int_a^t\frac{\lambda}{s^2}x^2(s)\,ds$$

$$\frac{x^2}{2}\leq K+\int_a^t\frac{|\lambda|}{s^2}x^2(s)\,ds$$

GRONWALL $x^2\leq 2K\exp\left(\int_a^t\frac{2|\lambda|}{s^2}\,ds\right) \rightarrow$ CV

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ q x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t\, q x \\ \cos t\, q x \end{pmatrix}$$

Ex : VDC + GRONWALL

$t \geq 1$: $x'' + (1+q)\,x = 0$ avec $q \in \mathcal{E}([1,+\infty[, \mathbb{R})$ $\int_1^{+\infty} |q| < +\infty$

Mq que les sols sont bornées.

S/ On écrit $x'' + x = q\,x = z$ second membre

VDC : On résout : $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda' = -\sin t\, z(t) \\ \mu' = \cos t\, z(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda(t) = A + \int_0^t -\sin s\, z(s)\,ds \\ \mu(t) = B + \int_0^t \cos s\, z(s)\,ds \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos t + B\sin t - \int_a^t \sin(t-s)\,q(s)\,x(s)\,ds$$

$$|x(t)| \leq K + \int_1^t |q(s)|\,|x(s)|\,ds$$

$$\rightarrow |x(t)| \leq K\exp\left(\int_1^t |q|\right) \leq K\exp\left(\int_1^{+\infty} |q|\right)$$

V Systèmes à coeff constants :

A) Th fondamentaux :

Données : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $X' = AX$ $(\mathcal{E})$

Th : a) Soit $X_0 \in \mathbb{K}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. La solution X de $(\mathcal{E})$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$

b) Si $\vec{V}$ est un vecteur propre de A pour la VP λ, $X(t) = e^{\lambda t}\vec{V}$ est sol de $\mathcal{E}$

c) Si A est diagonalisable, et si $\vec{V_1}, \dots, \vec{V_n}$ est une base de vecteurs propres pour A avec $A\vec{V_i} = \lambda_i \vec{V_i}$, $i = 1, \dots, n$, alors $\left(e^{\lambda_i t}\vec{V_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ est un système fondamental de sol de $(\mathcal{E})$

D/ a) On note $(M, x) \longrightarrow Mx$ est bilinéaire continue
si $t \longrightarrow M(t)$ et $t \longrightarrow X(t)$ sont Δ^1, $M(t)X(t)$ aussi
et $(MX)' = MX' + M'X$

De là : $\left(e^{(t-t_0)A}X_0\right)' = A\,e^{(t-t_0)A}X_0$ avec $X(t_0) = X_0$ OK

RM Sans le th de Cauchy ; avec $t_0 = 0$: $X' = AX$ donc
$\left(e^{-tA}X\right)' = 0$

$e^{-tA}X = cste = X(0)\ (t=0)$

b) $\forall p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{p} \frac{t^k A^k}{k!}\vec{V} = \sum_{k=0}^{p} \frac{t^k \lambda^k}{k!}\vec{V}$ par cc° des opérations

avec $p \to +\infty$ on obtient $\underbrace{e^{tA}\vec{V} = e^{\lambda t}V}_{sol\ X(0)=V}$

c) $(X_1(0), \dots, X_n(0)) = (V_1, \dots, V_n)$ base de $\mathbb{K}^n$

Ex $\begin{cases} x' = 3x - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x + z \end{cases} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ 2-X & 2-X & -1 \\ 2-X & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \dots = (2-X)^3$$

(CH) $(A-2I)^3 = 0 \to A = 2I + \underbrace{(A-2I)}_{Nil}$

$$e^{tA} = e^{2t}\left(I + t(A-2I) + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2\right)$$

$A - 2I \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ de rang 1 nilp, $(A-2I)^2 = 0$ ⚠ QT

Ex : $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - z \\ z' = 4x - 2y - z \end{cases}$ base de sols réelles

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = \begin{pmatrix} 1-X & -2 & 0 \\ 2 & -X & -1 \\ 4 & -2 & -X-1 \end{pmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ -2 & -X-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -X \end{vmatrix}$

$= (1-X)(X(X+1) - 2) + 2(2(X$

$= (1-X)(X^2+X-2) - 2(2X \pm 8) = \cancel{X^2+X-2-X^3-X^2+2X-4X-12}$

$= (1-X)(X^2+X-2+4)$ $\quad \cancel{= -X^3-2X-14}$

$= (1-X)(X^2+X+2)$

$\triangleright\ \lambda = 1 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{cases} x = x - 2y \\ y = 2x - z \\ z = 4x - 2y - z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{z}{2} \\ 2z = 4x \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$1-8=-7$ $\quad$ sol $e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \cancel{A-\lambda I}$

$\triangleright\ \lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\quad A - \lambda I :$ $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} & -1 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$

$z = 4 \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3+i\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ solution CMPLX $e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{e_1} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{7}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}\right)$

parties réelles $e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t\ e_1 - \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\ e_2\right)$ $\quad$ SF de sols $(e^{t}v, ..)$

~~Im~~ $\cancel{e^{-\frac{1}{2}t}(}$

Im $\quad e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}\ e_2 + \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\ e_1\right)$

B) Second membre (Pr?) :

$(\mathcal{E})\ X' = \underset{\text{cste}}{A}X + B(t)$ $\begin{cases} B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n) \\ \text{ou } B \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K})) \end{cases}$

On cherche une sp sous la forme $X(t) = e^{tA}C(t)$, $C \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$

X sol de $(\mathcal{E}) \iff e^{tA}C'(t) = B(t)$

On prend $C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds$

SG : $X(t) = e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds$

C) Etude de $X' = AX$, $A \in M_2(\mathbb{R})$, au voisinage de 0

Lemme : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont semblables de $M_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $M_n(\mathbb{R})$

$(P_1 + iP_2)A = (P_1 + iP_2)B \longrightarrow \det(P_1 + \lambda P_2)$ ...

Classes de similitudes dans $M_2(\mathbb{R})$

$A \approx \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

1er cas : Si A non DZ : $\chi_A(T) = (T-\lambda)^2$, on trigonalise ds $M_2(\mathbb{R})$:

$A \approx \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, A non DZ, $a \neq 0$, $(\infty/2)$ ds $\mathbb{R}$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (a\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ $A \approx \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2e cas : $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\chi_A) = \{\alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ $\beta \neq 0$

DZ + A spectre

A est DZ ds $M_2(\mathbb{C})$ $A \approx \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Lemme : $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

KEFTA

▷ Solutions de $X' = AX$ et $Y' = P^{-1}APY$?

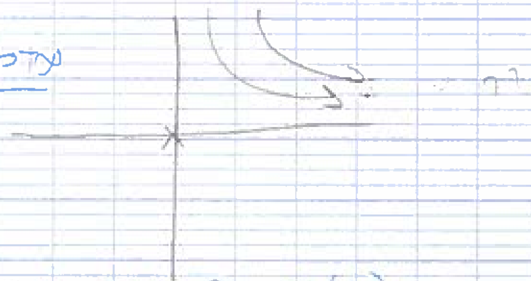
On pose $X = PY$, X sol de (1) $\iff$ Y sol de (E)

Allure des solutions de $X' = AX$

1er cas : $A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$, $\lambda > 0$, $\mu < 0$ par ex (hyperbolique)

$X(t) = \alpha e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \beta e^{\mu t}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ | avec Arcs (simples) réguliers si $(\alpha, \beta) = (0,1)$

$t \to +\infty$



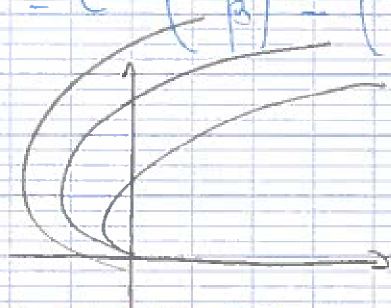
RM : si $X(t_2) = X(t_1)$ on posera $Z(t) = X(t+\tau)$ où $\tau = t_2 - t_1$ il vient $Z(t_1) = X(t_2)$, $X' = AX$, $Z' = AZ$

Cauchy $Z = X$; X est τ-périodique

2e cas : $A = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ $\exp(tA) = e^{\lambda t}\left(I + \begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

$X = e^{tA}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}\\ \beta e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

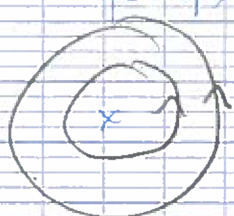
$\alpha, \beta > 0$



$|x(t)| \underset{+\infty}{\gg} |y(t)|$ $\left|\frac{y}{x}\right| \xrightarrow[+\infty]{} 0$

3e cas : $A = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ $e^{tA} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & -\sin\beta t\\ \sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}$

$\alpha = 0$



$\alpha < 0$, $t \to +\infty$ ($\beta > 0$)

D) Comportement asymptotique :

Ex1 : $X' = AX$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, MQ $\Updownarrow$ Toutes les sols de $(\mathcal{E})$ sont bornées ; $\operatorname{spec} A \subset i\mathbb{R}$ et A est DZ

$\Uparrow$ Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de $\vec{VP}$ de A, $\lambda_k = i\beta_k$ $\beta_k \in \mathbb{R}$ les VP correspondantes, toute sol X de $(\mathcal{E})$ est une CL

$X(t) = \sum_{k=1} \alpha_k e^{i\beta_k t} v_k$

$\Downarrow$ On regarde $\operatorname{spec}(A)$ si $A\vec{V} = \lambda \vec{V}$, $\vec{V} \neq \vec{0}$ | $X(t) = e^{\lambda t}\vec{V}$ est une sol bornée par HYP $\lambda \in i\mathbb{R}$

DON'T FORGET !!

Ex : Soit λ une vp de A telle que $E_{\lambda,A} \subsetneq F_{\lambda,A} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^d$

On regarde $u = A|_{F_{\lambda,A}}$; on écrit $u = \lambda I + \nu$ $\nu \neq 0$

$$e^{tu} = e^{\lambda t}\left(I + \dots + \frac{t^{p-1}\nu^{p-1}}{(p-1)!}\right) \quad p-1 \geq 1$$

pendant Dm → essentiel pour l'étude des coup

Soit X tq $\nu^{p-1}X \neq 0$ et $Y = \nu^{p-2}X$, il vient $\nu Y \neq 0$, $\nu^2 Y = 0$

$\|e^{tu}y\| = |e^{\lambda t}| \, \|y + t\nu y\|$ non bornée lorsque $t \to +\infty$

Rappel : $[A,B] = 0 \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$ → Réciproque fausse

Ceci se prouve avec le th. de Cauchy, on se donne $X_0 \in \mathbb{C}^n$

$(\mathcal{E})$: $X' = (A+B)X$, $X(0) = X_0$

$X(t) = e^{tA}e^{tB}X_0$, $Y(t) = e^{t(A+B)}X_0$

Y sol de $(\mathcal{E})$ avec $Y(0) = x_0$

X aussi : $X' = Ae^{tA}e^{tB}X_0 + e^{tA}Be^{tB}X_0 = (A+B)Y(t)$

$$[A,B] = 0 \Rightarrow [A, e^{tB}] = 0$$

$\underline{Ex}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, CNS pour que toute sol de $X' = AX$ tendent vers 0 en $+\infty$

$\underline{S/}$ $\underline{CNS}$: $\forall \lambda \in spec(A)$, $Re(\lambda) < 0$

▷ La condition nécessaire, $\vec{v} \in E_{\lambda,A} \setminus \{0\}$ $\vec{v} \in E_{\lambda,A} \setminus \{0\}$
$X(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ est solution et comme $\|e^{\lambda t}\vec{v}\| \xrightarrow[+\infty]{} 0$
il vient $Re(\lambda) < 0$

▷ Condition suffisante
On se place sur $F_{\lambda,u}$ $X(t) = e^{tA}X_0 = \sum_{\lambda \in spec(A)} e^{tA} X_\lambda$ où $X_0 = \sum_{\in F_{\lambda,A}} X$

Soit $u = A|_{F_{\lambda,A}}^{F_{\lambda,A}}$, il vient $e^{tA}X_\lambda = e^{tu}X_\lambda = e^{\lambda t}\left(I + t\nu + \dots + \frac{t^{p-1}\nu^{p-1}}{(p-1)!}\right) \times X_\lambda$

Bilan : $X = Y$ par Cauchy, donc $e^{t(A+B)}X_0 = e^{tA}e^{tB}X_0$
puis $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$

Rappel

Soit $\|\circ\|$ une norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(F_{\lambda,u})$

$$\|e^{tu}\| \leq \underbrace{|e^{\lambda t}|}_{-at}\left(1 + |t|\,\|\nu\| + \dots + \frac{|t|^{p-1}\|\nu\|^{p-1}}{(p-1)!}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

$\underline{Ex}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in spec(A)$, $Re(\lambda) < 0$
$A \in \mathbb{C}^{\prime} \exists C \|AX\| \leq C\|X\|$ soit $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^n)$ $\int_0^{+\infty} \|B(t)\|\,dt < +\infty$, $(\mathcal{E})$: $Y' = AY + B$
Mq toutes les sols de $(\mathcal{E})$ tendent vers 0 en $+\infty$.

voir page suivante

5/ $X(t) = e^{tA} C(t)$ (Variation des constantes) avec $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$

X : sol de (E) sur $\mathbb{R}_+$ $\Leftrightarrow \forall t \geq 0,\ C'(t) = e^{-tA} B(t)$

$$X(t) = e^{tA} \cdot x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds$$

On sait que $e^{tA} x_0 \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (Hyp sur spec(A))

On se place sur $F_{\lambda A}$: $B = \sum_{\lambda \in spec(A)} B_\lambda$, $\|B_\lambda(t)\| \leq |||\pi_\lambda||| \cdot \|B(t)\|$ projection sur F_λ

$\longrightarrow$ Chaque B_λ est intégrable.

et l'on a, $\|e^{tu}\| \leq e^{-\alpha t}\left(1 + t\|\gamma\| + \dots + t^{p-1}\frac{\|\gamma\|^{p-1}}{(p-1)!}\right) = e^{-\alpha t} P(t)$

On veut (?) $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{(t-s)u} B_\lambda(s)\,ds = 0$

Soit $a > 0$. Pour $t > a$, $\left\| \int_0^t e^{(t-s)u} B_\lambda(s)\,ds \right\| \leq \int_0^t e^{-\overset{>0}{\alpha}(t-s)} P(t-s) \overbrace{\|B(s)\|}^{\text{intégrable}}\,ds$

$$\leq \int_0^a e^{-\alpha(t-s)} P(t-s)\|B(s)\|\,ds + \int_a^t e^{-\alpha(t-s)} P(t-s)\|B_\lambda(s)\|\,ds$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On peut choisir a de sorte que $\int_a^{+\infty} \|B_\lambda(s)\|\,ds \leq \varepsilon$.

Si $\eta = \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} e^{-\alpha\tau} P(\tau)$, il vient, $\forall t > a$:

$$\int_a^t e^{-\alpha(t-s)} P(t-s)\|B_\lambda(s)\|\,ds \leq \eta\varepsilon.$$

On regarde, enfin : $\int_0^a e^{-\alpha(t-s)} P(t-s) \|B_\lambda(s)\|\,ds = I(t)$

Soit $N = \sup_{[0,a]} \|B_\lambda(s)\|\,ds$. Il vient :

$$I(t) \leq N \cdot \int_{t-a}^t e^{-\alpha\tau} P(\tau)\,d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

$\longrightarrow \exists b > a$, tq $\forall t \geq b$, $I(t) \leq \varepsilon$

Bilan : $\forall t \geq b$, $\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} P(t-s) \|B_\lambda(s)\|\,ds \leq (\eta+1)\varepsilon$ ✓

$\longrightarrow$ $\mathcal{S}(X' = AX + B)$ tendent vers 0 en $+\infty$. OK