Calcul différentiel et géométrie

I Différentiabilité

Données : E, F, G sont des evn de dim finie
Ω est un ouvert de E, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to E$

Déf : On dit que $h : \Omega \to F$ est un $O(x-a)$ sur $V(a)$ lorsqu'il existe $M > 0$ et $r > 0$

tq $B(a,r) \subset \Omega$ et $\forall x \in B(a,r)$ $\|h(x)\| \leq M\|x-a\|$

▷ Un $o(x-a)$ lorsque $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $B(a,\delta) \subset \Omega$

et $\forall x \in B(a,\delta)$ $\|h(x)\| \leq \varepsilon \|x-a\|$

‖ La dérivabilité de $f : I \to E$ en $a \in I$ s'exprime par

$\exists \Lambda$ $\mathbb{R} \to E$ linéaire tq $f(a+h) - f(a) = \underbrace{\Lambda(h)}_{h f'(a)} + o(h)$

$(\Lambda(h) = h\Lambda(1))$

Déf : On dit que f est différentiable en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$

$f(x) - f(a) = \varphi(x-a) + \underbrace{o(x-a)}_{\|x-a\|\varepsilon(x-a)}$ | $\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$

$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|\varepsilon(h)$

Notion locale : s'il existe $\begin{cases} g : \Omega \to F \\ U \in V(a) \text{ tq } g|_U = f|_U \end{cases}$

f diff en $a \iff g$ diff en a

Ainsi : Si $\left|\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \\ a \in I \end{array}\right.$ $\Updownarrow$ f est diff en a
f est ~~différentiable~~ dérivable en a

Propriétés : 1) Si f est différentiable, f est $\mathcal{C}^0$ en a

D/ Rappel si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, elle est $\mathcal{C}^0$; on note $|||\cdot|||$ une norme d'opérateur
pour $x \in \Omega$, il vient

$$\|f(x)-f(a)\|_F \leq |||\varphi||| \, \|x-a\|_E + \|x-a\|_E \|\varepsilon(x-a)\|_F$$

$\varepsilon = 1$: il existe $r>0$ tq $\forall x \in B(a,r)$, $\|\varepsilon(x-a)\| \leq 1$

$$\|f(x)-f(a)\| \leq (|||\varphi||| + 1)\|x-a\|$$

2) Si φ et ψ vérifient $\left.\begin{array}{l} f(x)-f(a) = \varphi(x-a)+o(x-a) \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f(x)-f(a) = \psi(x-a)+o(x-a) \text{ ---} \end{array}\right\}$ alors $\varphi = \psi$

D/ Par différence $(\varphi-\psi)(x-a) = o(x-a) = \|x-a\|\varepsilon(x-a)$

Fixons $r>0$ tq $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$, soit $h \in B(a,r)$, $t \in]0,1]$

il vient $(\varphi-\psi)(th) = \|th\| \, \varepsilon(th)$, on simplifie par $t > 0$

$$(\varphi-\psi)(h) = \|h\| \, \varepsilon(th)$$

$t \to 0^+$ $\varphi(h) = \psi(h)$

Vocabulaire : Si f est diff en a, on appelle différentielle de f en a et on note df_a l'unique φ AL $E \to F$ vérifiant
au $\mathcal{V}(a)$: $f(x)-f(a) = \varphi(x-a)+o(x-a)$

⚠ Si f est différentiable sur Ω, on dispose de

$$df\begin{pmatrix}\Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ a \longmapsto df_a\end{pmatrix} \text{ pour ex } (E=F=\mathbb{R}^n$$

$$df\begin{pmatrix}\Omega \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ a \longmapsto df_a\end{pmatrix}$$

On peut envisager $d^2f\begin{pmatrix}\Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \\ a \longmapsto d(df)_a\end{pmatrix}$

Ex : 1) Si f est linéaire $E \to F$ $\forall a \in E$, $df_a = f$, $d^2f = 0$

Ex : 2) $\pi_i\begin{pmatrix}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x_i\end{pmatrix}$ $\forall a$ $d\pi_{i,a} = \pi_i$ (noté dx_i)

$d^2 x_i = 0$

3) Si f est affine $f = \varphi + C$ où $C = cste$; φ linéaire

$f(x) - f(a) = \varphi(x-a)$, $df = \varphi$

4) Une norme $N : E \to \mathbb{R}$ n'est jamais différentiable en 0

Sinon : il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ tq au $\mathcal{V}(0)$

$N(x) = \varphi(x) + \|x\|\varepsilon(x)$

On fixe $x \in E$, pour tout $t \neq 0$, on a $N(tx) = t\varphi(x) + |t|\,\|x\|\,\varepsilon(tx)$

$|t| N(x) = t\varphi(x) + |t|\,\|x\|\,\varepsilon(tx)$

On divise par $|t|$, $\frac{|t|N(x)}{t} = \varphi(x) + \frac{|t|}{t}\|x\|\,\varepsilon(tx)$

$t \to 0^+$ $N(x) = \varphi(x)$, $t \to 0^-$ $N(x) = -\varphi(x)$ | $N = \varphi = 0$

Bof...

5) $x \longrightarrow \|x\|^2$ en euclidien

Soit $a \in E$ $\|a-h\|^2 - \|a\|^2 = \langle 2a, h\rangle + \underbrace{\|h\|^2}_{o(\|h\|)}$

$$df_a\begin{pmatrix}E \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto \langle \underbrace{2a}_{\text{gradient}}, h\rangle\end{pmatrix}$$

6) $f : \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto A^2 \end{pmatrix}$

partie linéaire

Calcul de l'accroissement $(A+H)^2 - A^2 = \overbrace{AH+HA}+H^2$

$$|||H^2||| \leqslant |||H|||^2 \quad H^2 = o(H)$$

$df_A(H) = AH + HA$

7) Applications bilinéaires $f : E \times F \longrightarrow G$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f(h,b) + f(a,k) + f(h,k)$$

f est bil $\Leftrightarrow$ $\|f(h,k)\|_G \leqslant C\|h\|_E\|k\|_F$
$\leqslant C \max(\|h\|_E, \|k\|_F)^2$

Propriétés 1) Si f et g sont diff en a, $\lambda f + \mu g$ aussi et

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

2) $f : \Omega \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_p$ $f = (f_1 \dots f_p)$

f est diff en a $\Updownarrow$ Chacune de $f_1 \dots f_p$ l'est | dans ce cas on a $\forall h \in E$ $df_a(h) = (df_{1a}(h), \dots, df_{pa}(h))$

$\Downarrow$ $\underbrace{\varphi = df_a}_{\in \mathcal{L}(E, \prod F_i)}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, soit $h \in E$

$f(a+h) - f(a) \underset{-\varphi}{=} (f_1(a+h) - f_1(a) - \varphi_1(h), \dots, f_p(a+h) - f_p(a) - \varphi_p(h))$

Comme $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\varepsilon_i(h) \longrightarrow 0$ $i = 1 \dots p$ $f_i(a+h) - f_i(a) - \varphi_i(h) = \|h\|_E \varepsilon_i(h)$ OK

EL

Th. (composition) $\left| \begin{array}{l} f : \Omega \longrightarrow F \qquad g : \Omega' \to G \\ a \in \Omega \quad b = f(a) \in \Omega' \end{array} \right.$

(IMP) f est diff en a et g est diff en b. Alors $\exists r > 0$, $f(B(a,r)) \subset \Omega'$ (1)
et $g \circ f$ est diff en a $d(g\circ f)_a = dg_b \circ df_a$

D/ L'existence de r vient de la $\mathcal{C}^0$ de f en a.
Posons $\varphi = df_a$, $\psi = dg_b$. On a vu, avec $M = \|\varphi\| + 1$

~~$\exists f$~~ $\exists \rho > 0$, $\forall x \in B(a, \rho)$ $\|f(x) - f(a)\| \leq M \|x - a\|$
$(\rho < r)$

$$\left| \begin{array}{l} f(x) - f(a) = \varphi(x-a) + \|x-a\| \varepsilon(x-a) \\ g(y) - g(b) = \psi(y-b) + \|y-b\| \eta(y-b) \end{array} \right.$$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi\big(\varphi(x-a) + \|x-a\| \varepsilon(x-a)\big) + \|f(x)-f(a)\| \eta(f(x)-f(a))$$
$$= \psi(\varphi(x-a)) + \|x-a\| \big(\underbrace{\psi \circ \varepsilon(x-a)}_{\to 0 \text{ par } \mathcal{C}^0 \text{ de } \psi \circ \varphi}\big) + \delta(x-a)$$

$$\left(\begin{array}{l} \|\delta(x-a)\| \leq M \|x-a\| \, \|\eta(f(x)-f(a))\| \\ \delta(x-a) = o(x-a) \end{array} \right.$$

Bilan: $g(f(x)) - g(f(a)) = \psi \circ \varphi(x-a) + o(x-a)$

CP: $E = F = \mathbb{R}$ $\quad df_a(h) = hf'(a)$
$\quad dg_b(k) = k g'(b)$

$$dg_b \circ df_a(h) = h \underbrace{f'(a) g'(b)}_{f'(a) g'(f(a))}$$

Pommellet
la répétition
est la base
de la pédagogie
↓
أما في المغرب :
التكرار يعلم الحمار

à compléter

Compositions avec les fonctions dérivables :

(I) Règle de la chaîne

Th Soit $\gamma : I \to E$, $t_0 \in I$, γ dérivable en t_0, $a = \gamma(t_0)$
$a \in \underset{\text{ouvert}}{\Omega}$, $f : \Omega \to F$ diff en a alors $g = f \circ \gamma : I \to F$ est différentiable en t_0 et $g'(t_0) = df_{\underset{\gamma(t_0)}{a}}(\gamma'(t_0))$

D/ détail γ est diff en t_0, $d\gamma_{t_0}$

Ex $\underbrace{\gamma(t) = (1-t)a + tb}_{[a,b] \subset \Omega} \to (f \circ \gamma)'(t) = df_{(1-t)a+tb}(b-a)$

Ex Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en a
1) Diff de f^2 ?
2) Si $f(\Omega) \subset]0, +\infty[$, diff de $\sqrt{f}$

D/ $g : y \mapsto y^2$ est dérivable en $f(a)$ de dérivée $2f(a)$
donc g est différentiable en $f(a)$ de diff $k \mapsto 2f(a)k$
Donc
$g \circ f$ est donc diff en a de diff $dg_{f(a)} \circ df_a$

$$dg_{f(a)} \circ \underbrace{df_a(h)}_{k} = 2f(a)k = 2f(a)\,df_a(h)$$

donc $d(f^2)_a(h) = 2f(a)\,df_a(h)$

24

2) Idem avec $g : y \longmapsto \sqrt{y}$ $\quad dg_{f(a)}(k) = \dfrac{k}{2\sqrt{f(a)}}$ $\quad \left(g'(f(a)) = \dfrac{1}{2\sqrt{f(a)}}\right)$

$$d(\sqrt{f})_a(h) = dg_{\sqrt{b}}\left(df_a(h)\right) = \frac{df_a(h)}{2\sqrt{f(a)}}$$

$$d(\sqrt{f})_a : h \longmapsto \frac{df_a(h)}{2\sqrt{f(a)}}$$

Ex : E est un espace affine euclidien, $A \in E$ $\quad f \begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto d(A,M) = AM \\ = \|\overrightarrow{AM}\|_2 \end{pmatrix}$

Diff en f sur $E \setminus \{A\}$

Soit $\phi = f^2$ $\quad \phi(M) = \overrightarrow{AM}^2$

$$\phi(M + \vec{h}) = \overrightarrow{AM}^2 + \underbrace{2\overrightarrow{AM}.\vec{h}}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\|\vec{h}\|^2}_{o(h)}$$

$$d\phi_M(\vec{h}) = \langle 2\overrightarrow{AM}, \vec{h} \rangle \quad \left(\nabla\phi_M = 2\overrightarrow{AM}\right)$$

[Rq : Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$df_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$
$df_a = \langle \overrightarrow{\nabla f_a}, \cdot \rangle$]

$f = \sqrt{\phi}$ $\quad df_M(h) = \dfrac{\langle 2\overrightarrow{AM}, \vec{h} \rangle}{\sqrt{\phi(M)}}$

$$= \langle \underbrace{\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|}}_{\nabla f_M}, h \rangle$$

II Dérivées partielles

A) Généralités

Dérivée selon un vecteur

Déf : $f : \Omega \longrightarrow F$ evn, $a \in \Omega$, $\vec{u} \in E$. On dit que f admet une dérivée selon le vecteur $\vec{u}$ lorsque $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a + t\vec{u}) \end{pmatrix}$ [définie sur $V(0)$ car Ω ouvert] possède une dérivée en 0

[$\exists r > 0$, $B(a, r) \subset \Omega$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ (normé), $|t| < \dfrac{r}{\|\vec{u}\|}$ $\Rightarrow a + t\vec{u} \in \Omega$

Prop : Si f est diff en a, et $\vec{u} \in E$, f possède une dérivée selon $\vec{u}$

D/ $\gamma(t) = a + t\vec{u}$ γ est dérivable en 0, $\gamma'(0) = \vec{u}$

Règle de la chaîne, $\exists\, d(f\circ\gamma)(0) = df_a(\vec{u})$

Not : $D_{\vec{u}}f(a)$ dérivée selon $\vec{u}$ de f en a

Désormais E est de dim finie $n \geq 1$, $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

Déf : La dérivée de f en a dans la direction i [non la $i$ème var de $\mathbb{R}^n$]

Si $E = \mathbb{R}^n$ $e_i = \varepsilon_i$ | $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

$$= \lim_{\substack{x \to a_i \\ x \neq a_i}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots) - f(a)}{x - a_i}$$

$=$ dérivée en a_i de $x \longmapsto f(a_1, \dots, x, \dots a_n)$

Conséquence : Si f possède des DP sur Ω, $a \in \Omega$

$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_i(t_0) = a_i$, x_i dérivable

la dérivée de $t \to f(a_1, \dots, x_i(t), \dots, a_n)$?

Composée de t : $t \longmapsto x_i(t)$

$x \longmapsto f(a_1, \dots, \underset{i}{x}, \dots, a_n)$

dérivée : $x_i'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

[CL, produit, etc.]

B) Calcul de la différentielle :

Th : Soit $f : \Omega \to F$ diff en $a \in \Omega$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Alors $\forall h \in E$, $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_{e_i}(f)(a) \underset{E=\mathbb{R}^n}{=} \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

D/ Clair : $df_a(h) = df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, df_a(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

E eve, $F = \mathbb{R}$

Gardant en BON (e_i) $df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \underbrace{D_{e_i} f(a)}_{\text{nbre réel}}$

$$\nabla f_a = \sum_{i=1}^{n} D_{e_i} f(a) \, e_i \underset{\mathbb{R}^n}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \varepsilon_i$$

$$\nabla f_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \leq i \leq n}$$

Ex : $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$

$$\nabla f_a = \left(\frac{2(x_1 - a_1)}{2\sqrt{\quad''}}, \dots, \frac{2(x_n - a_n)}{2\sqrt{\quad''}}\right) = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$$: même chose qu'avant

Ex : diff du déterminant

Obs : Par composition, un produit de deux fonctions diff

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$: $f \times g = \Phi \circ (f, g)$ où $\Phi \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{pmatrix}$

par itération : tout polynôme à plusieurs indét est différentiable

retour au déterminant $\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & x_{ij} & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} \underset{\text{dev } // j_0 \text{ ième colonne}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{ij_0} (-1)^{i+j_0} \Delta_{ij_0}}$

tous les termes sont constants en fct de x_{ij_0} sauf $x_{ij_0} (-1)^{i+j_0} \Delta_{ij_0}$

donc $\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{i_0 j_0}} = (-1)^{i_0+j_0} \Delta_{i_0 j_0}$

$d(\mathrm{Det})_A(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} h_{ij} = \mathrm{tr}(\tilde{A}.H)$

Dérivée $\det \mapsto \det(A(t)) = \mathrm{tr}(\tilde{A}(t) A'(t))$

Optimisation: $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Conditions nécessaires d'optimalité:

On suppose f diff en a

i) Si f admet un min/max local en a dans la direction $\vec{u}$

ie $\Phi : t \mapsto f(a + t\vec{u})$ possède un extremum local en 0, alors

$D_{\vec{u}} f(a) = 0$

ii) Si f admet un extr. local en a, $df_a = 0$

D/ $\Phi(t) = f(a + t\vec{u})$ (définie au $V(0)$) | Φ possède un extr. local en 0, $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}\,\Phi)$

il vient $\Phi'(0) = 0$, chaine $df_a(\vec{u}) = 0$

ii) vient de i)

Expression avec le gradient: $df_a(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{\nabla} f(a), \vec{u} \rangle = 0$

Pb: existence et différentiabilité

Regardons $f(0,0) = 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

DP sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ il y a des DP $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

$\left| \begin{array}{l} f(x,0) = 0 \\ f(0,y) = 0 \end{array} \right\} \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

selon $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

$$\frac{f(t\vec{u})-f(0,0)}{t}=\frac{t^3\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4+t^2\beta^2}=\frac{t\,\alpha^2\beta}{t^2\alpha^4+\beta^2}$$

$\beta=0 : \longrightarrow 0$

$\beta\neq 0 : \longrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta}$

Soit $\gamma : t\longmapsto f(t,t^2)$ $\quad \gamma(0)=0$, $\quad t\neq 0 \;\; \gamma(t)=\frac{1}{2}$

C) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

Déf Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque f possède sur Ω des DP continues

Ex $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$

Th : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est différentiable en tout point de Ω

D/ Si la différentielle de f en a existe, elle est donnée par :

$$df_a(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

On veut $f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=o(h)$

Soit $\varepsilon>0$: par $\mathcal{C}^0$ des DP (th. gén.) $\exists\eta>0$ $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\Omega$

$\max(|y_i-a_i|<\eta)\Rightarrow (y_i)\in\underset{\text{ouvert}}{\Omega}$ et $\max\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right\|<\varepsilon$

On écrit, pour $\|h\|_\infty<\eta$ $\quad \Delta(h)=f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

$f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)-h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$

$+f(a_1,a_2+h_2,\dots)-f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots)-h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$

$+ \dots + f(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m) - h_m \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \Delta_1 + \dots + \Delta_m$

But : $|\Delta_i| \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty$? Idée (AF)

Soit $\Phi : t \longmapsto f(a_1 + t h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots) - t h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$

$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t h_1, a_2 + h_2, \dots) h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1$ $\quad t \in [-1,1]$

$\|\Phi'(t)\| = |h_1| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t h_1, a_2 + h_2, \dots) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| \leqslant \varepsilon |h_1|$

(AF) $\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leqslant \varepsilon h_1$ soit $\Delta_1 \leqslant \varepsilon |h_1|$

De m̂ $\|\Delta_2\| \leqslant \varepsilon |h_2|, \dots, \|\Delta_m\| \leqslant \varepsilon |h_m|$

donc $\|\Delta(h)\| \leqslant \varepsilon (|h_1| + \dots + |h_m|) \leqslant \underbrace{m}_{\text{fixé}} \varepsilon \|h\|_\infty$

$\Delta(h) = o(h)$ ✓

Not : $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ appl de classe $\mathcal{C}^1$ $\Omega \to F$

Δ ① pas la même chose que le th. précédent.

Th Soit $f : \Omega \to F$, on a $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ \Updownarrow \\ f \text{ est diff sur } \Omega \text{ avec } df \left| \begin{array}{l} \Omega \to \mathcal{L}(E,F) \\ a \longmapsto d f_a \end{array} \right. \text{ continue} \end{cases}$

D/ ⇓ Soit $(a,b) \in \Omega^2$ pour tout $h \in E$ $(\simeq \mathbb{R}^n)$

On a $\|(df_a - df_b)(h)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \right) \right\|_F$

$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \right\|_F \|h\|_\infty$

et donc $|||df_a - df_b||| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \right\|_F \longrightarrow 0$ si $b \to a$

① On sait que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i)$, $\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b)\|$

$\leq \underbrace{|||df_a - df_b|||}_{\xrightarrow[b \to a]{} 0}$

Conséquences : opérations :

En usant des dérivées partielles, on vérifie :

① $\mathcal{C}(\Omega, F)$ est un $\mathbb{R}$-ev

② $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est une algèbre : si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(x) = f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

* Si f ne s'annule pas $\frac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^1$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{1}{f^2}$

+ Si $f > 0$ $\sqrt{f}$ est $\mathcal{C}^1$, $\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{f}) = \frac{1}{2\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Séries de fonctions : ① Séries entières $R = \mathcal{C}(\sum a_n z^n) > 0$; $z = x + iy$ réel

Mq la somme de $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$

S/ Il s'agit de prouver que f possède des DP continues

$$u_n(x, y) = a_n(x + iy)^n \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} = n a_n (x + iy)^{n-1}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = i n a_n (x + iy)^{n-1}$$

Pb CVU sur les compacts de $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$

Soit r $0 < r < R$ il vient $\forall z \in \bar{D}(0, r)$ $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leq n|a_n|r^{n-1}$

La série $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$ CV normalement // (x, y) si $|x + iy| \leq r$

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq r$

de là $(x,y) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ existe et est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathring{D}(0,R)$

sur $\overline{D}(0,R)$

De m̂ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}$ existe et est $\mathcal{C}^0$ sur $D(0,R)$

Par DTATSF $\begin{cases} \exists \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} \ \mathcal{C}^0 \text{ du couple } (x,y) \\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y} \ \mathcal{C}^0 \text{ du couple } (x,y) \end{cases}$

CC f est de classe $\mathcal{C}^1$

$$\underset{z=h+ik}{df}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{k\frac{\partial f}{\partial y}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f'(z)(h+ik)} \times (h+ik)$$

$$| f(x+iy+h+ik) - f(x+iy) = f'(\underset{x+iy}{z})(h+ik) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Intégrales à paramètres (Recon X2-17)

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable. On pose $F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$

Mq F est $\mathcal{C}^1$ (On vérifie - convolution - sur $x \in [a,b]$, $F(x,y) \xrightarrow[y \to 0^+]{CV} f(x)$)

Soit $G(x,y,t) = \frac{y f(t)}{(x-t)^2+y^2}$ $\left| \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{-2(x-t)y f(t)}{[(x-t)^2+y^2]^2}\right.$

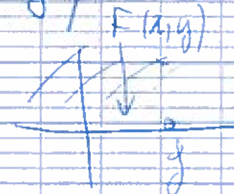
On veut $\exists \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x}$ $\mathcal{C}^0$ de (x,y)

intégrable CV normalement $/(x,y) \in K$ compact

fixons $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}^{+*}$, si $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$

$\xrightarrow[\text{intégrable}]{\text{majoration}} \left|\dfrac{\partial G}{\partial x}\right| = \dfrac{2|x-t|y\,|f(t)|}{((x-t)^2+y^2)^2} \leqslant \dfrac{|f(t)|}{((x-t)^2+y^2)}$

$\leqslant \dfrac{|f(t)|}{c^2}$



$(CCP)\ \exists \dfrac{\partial F}{\partial x} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{2(x-t)\,y f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$

Par domination $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]\times[c,d]$

Pour $\dfrac{\partial F}{\partial y}$: $\left|\dfrac{\partial G}{\partial y}\right| = \dfrac{|((x-t)^2-y^2-2y^2)f(t)|}{|(x-t)^2+y^2|^2} \leqslant \dfrac{f(t)}{c^2}$

donc $\exists \dfrac{\partial F}{\partial y}$ continue de (x,y)

D) Matrices jacobiennes

Données : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad (g : \Omega' \to \mathbb{R}^q,\ f(\Omega) \subset \Omega')$

Def : Soit $a \in \Omega$, si f est diff en a, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de df_a dans les bases canoniques

Not $J_f(a)$, si $n = p$ le jacobien de f en a est

$D J_f(a) = \det(J_f(a))$

Prop : Si $f = {}^t\underbrace{(f_1, \dots, f_p)}_{\text{composantes}}$ $\quad J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

D/ $df_a(E_j) = \begin{pmatrix} df_{1a}(E_j) \\ \vdots \\ df_{pa}(E_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$ $j$ème colonne.

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$$

$$= J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Application : Composition

On suppose f et g différentiables

$$J_{g\circ f}(a) = [dg_{\underset{f(a)}{b}} \circ df_a] = J_g(b) \times J_f(a)$$

$$\left[\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}\right]_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \quad \frac{\partial}{\partial y_p} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

On peut aussi les obtenir par règle de la chaîne

on étudie $\varphi : x_j \longrightarrow g_i(\underbrace{f_1(x_1, \dots, x_n)}_{\gamma_1(x_j)}, \dots, \underbrace{f_p(x_1, \dots, x_n)}_{\gamma_p(x_j)})$

$$\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_p)' = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \gamma_k' = \langle \nabla \varphi, \gamma' \rangle$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \psi'$$

Divergence : Soit $f : \Omega \to E$ diff en a $df_a \in \mathcal{L}(E,E)$

$$(\operatorname{div} f)(a) = T_r\,(df_a)$$

Fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

$$T_r(df_a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a)$$

Si $f = \nabla g \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ avec $g\ \mathcal{C}^2$

$$\operatorname{div} f = \Delta g \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_k^2}$$

III Accroissement finis

Données : $\Omega \subset E$ (evn), $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$.

Th Soit $a, b \in \Omega$. Si $[a,b] \subset \Omega$ on a :

1) $f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{(1-t)a+tb}(b-a)\,dt$

2) En eve : avec $F = \mathbb{R}$ $f(b) - f(a) = \int_0^1 \langle \nabla f((1-t)a+tb), b-a \rangle\,dt$

3) IAF $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |||df_{(1-t)a+tb}||| \times \|b-a\|$

D/ Fonction auxiliaire $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$

$\gamma([0,1]) \subset \Omega$ par hypothèse

$ta + (1-t)b$

$(f \circ \gamma(t))' = df_{(1-t)a+tb}(b-a)$ est $\mathcal{C}^0$ car f est $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^1 (\ ) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(b) - f(a)$$

2) $(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f_{(1-t)a+tb}, b-a\rangle$ Id

3) $\|f(b)-f(a)\| = \left\| \int_0^1 df_{(1-t)a+tb}(b-a)\right\| \leq \int_0^1 \||df_{(1-t)a+tb}\|| \, \|b-a\|$

$\leq \Pi \, \|b-a\|$

Conséquences 1) Si f est $\mathcal{C}^1$, elle est loc lipsch

En effet : si $a\in\Omega$, il existe $r>0$ tq $\bar{B}(a,r)\subset\Omega$; df, qui est $\mathcal{C}^0$, est bornée sur $\bar{B}(a,r)$ (par K)

Alors $\forall (x,y)\in\bar{B}(a,r)^2$, $\|f(x)-f(y)\|\leq K\|x-y\|$

2) Si $\forall x\in\Omega$ $df_x=0$ et si Ω est connexe, f est constante

i) Soit $a\in\Omega$, il existe $r>0$ tq $\bar{B}(a,r)\subset\Omega$ sur $\bar{B}(a,r)$

convexe, l'IAF donne $\forall (x,y)\in\bar{B}(a,r)^2$ $f(x)=f(y)$

f est cste sur $\bar{B}(a,r)$

ii) $A=\{x\in\Omega \mid f(x)=f(a)\}$ est fermé par $\mathcal{C}^0$ de f ouvert

avec (i) $\neq\emptyset$ car $a\in A$. Ω connexe (par arcs), $A=\Omega$

Avec la connexité par arcs : $a \to b$ on regarde $f\circ\gamma$

$f\circ\gamma$ est localement constante $[0,1]\to F$

donc $\exists\, \varphi' \equiv 0$ les AF vectoriels donnent $\varphi=$ cste

Conséquence : Si $\exists u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall x \in \Omega : \exists df_x = u$, alors f est affine. (la m̂ $\forall x$.)

D/ $g = f - u$, il vient : $d(g - u) = 0$ ✓

*Ex : On suppose que Ω est convexe.
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \boxed{\mathbb{R}})$; $a, b \in \Omega$.
Rq : $\exists \theta \in [0,1]$, $f(b) - f(a) = \langle \nabla f_{(1-\theta)a+\theta b}, b-a \rangle$

S/ Soit $\varphi : t \longmapsto f((1-t)a+tb)$. possible car Ω cvx.
φ est dérivable, avec :
$$\varphi'(t) = \langle \nabla f_{(1-t)a+tb}, b-a \rangle$$
⊗ Fonction auxiliaire

EAF $(F = \mathbb{R})$! : $\exists \theta \in [0,1]$, $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ ✓

*Ex : Soit $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$; $b_1, \dots, b_n \geq 0$
$$\longrightarrow \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (a_i+b_i)^{1/n}$$

S/ On se ramène à $\begin{cases} a_i > 0 \\ b_i > 0 \end{cases}$ par $\mathcal{C}^0$ (passage à la limite)

Soit $f :]0,+\infty[^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}$
$$\forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \cdot \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_i} \cdot \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

avec ceci et ce qui précède :
$$f(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}}{n x_k} b_k$$
$x_k = a_k + \theta b_k$, $\theta \in [0,1]$, $k = 1 \cdots n$

Par IAG ($\rightarrow$ optimisation) : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}}{x_k} b_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_k} b_k}$
$$\geq (b_1 \cdots b_n)^{1/n}$$

$\longrightarrow f(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) - f(a_1, \dots, a_n) \geq (b_1 \cdots b_n)^{1/n}$ ✓

Absolument Archi Hors Programme

B) Inversion locale (AAHP) $E=\mathbb{R}^n$, Ω, Ω' ouverts de E

Déf : $f : \Omega \to \Omega'$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo si $\left|\begin{array}{l} f \text{ est bijective } \Omega \to \Omega' \\ f^{-1} \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{array}\right.$

homéo $\mathcal{C}^1$ dont la récip est $\mathcal{C}^1$

esc $f \in GL(\mathbb{R}^n)$

Dans ce cas : $f^{-1} \circ f = Id_\Omega$ si $a \in \Omega$

$$df^{-1}_{f(a)} \circ df_a = I_n$$

⚠ $f\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{pmatrix}$ est un homéo $\mathcal{C}^1$ mais $f'(0)=0$

Ex : Coordonnées polaires $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$
$\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$

$f\begin{pmatrix} \Omega \longrightarrow \Omega' \\ (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}$ f est $\mathcal{C}^1$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$\frac{\partial}{\partial r}$ $\frac{\partial}{\partial \theta}$

f est bijective $f^{-1}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$

f^{-1} est $\mathcal{C}^1$

Th Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ ($E = \mathbb{R}^n$) Soit $a \in \Omega$ si $Df_{f(a)} \neq 0$

Mq il existe $U \in \mathcal{V}_o(a)$, $V \in \mathcal{V}_o(f(a))$ tq
(voisinage ouvert)

$f\ U \to V$ est bijective et que $f^{-1} : V \to U$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

D/ Montrons par esc que $\exists r > 0$, $B(a,r) \subset \Omega$ et
$f_{|B(a,r)}$ est injective

$x \mapsto f(a+x)$ $a=0$

(exo X) Réductions $f(x) - f(a)$; $f(a) = 0$

On sait que $u = df_a \in GL(E)$ on remplace f par $u^{-1} \circ f$

$d(u^{-1} \circ f)_0 = d(u^{-1}) \circ df_0 = u^{-1} \circ u = Id$

Soit $r > 0$ tq $B(0,r) \subset \Omega$ et $\forall x \in B(0,r)$ $|||df_x - Id||| \leq 1/2$

Soit $(x,y) \in B(0,r)^2$ tq $f(x) = f(y)$

$$\| f(x) - f(y) - (x-y) \| = \left\| \int_0^1 df_{(1-t)x+ty}(x-y)\,dt - (x-y) \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 \underbrace{\left(df_{(1-t)x+ty} - Id \right)}_{|||\cdot||| \leq \frac{1}{2}} \cdot (x-y)\,dt \right\| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \|x-y\|\,dt = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

$\|x-y\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$: $x = y$.

Ex $f = I - g$, g k-lipsch $k<1$ alors f est un homéo de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

S/ Injectivité $f(x) = f(y) \Rightarrow x - y = g(y) - g(x)$

$\Rightarrow \|x-y\| = \| \cdot \| \leq k\|x-y\|$ avec $k<1$

$\Rightarrow x = y$

Surjectivité : $f(x) = y \iff x - g(x) = y$

$\iff x = y - g(x)$: Point fixe OK

Si $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\|h(x) - h(x')\| = \|g(x) - g(x')\| \leq k\|x - x'\|$

(CCP) $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\exists! x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) = y$

~~Chg^t de variable~~

Rzay conny Kwate θ diff ♡

Chg^t de variable

HYP
| φ $\mathcal{C}^1$ difféo
| K compact $L = \varphi(K)$, $g : L \to \mathbb{R}$

Alors $\int\int\cdots\int_L g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_K g \circ \varphi \, dx_1 \dots dx_m$

$$= \int \cdots \int_K g \circ \varphi(t_1, \dots, t_m) \, |J\varphi(t_1, \dots, t_m)| \, dt_1 \dots dt_n$$

(Admis)

Coord polaires : $J\varphi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$\iint_L g(x,y)\, dx\, dy = \iint_K g(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r \, dr \, d\theta$$

Ex $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = I^2$

$x = r\cos\theta$ | $0 < r < +\infty$
$y = r\sin\theta$ | $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$x = r\cos\theta$ | $0 < r < +\infty$
$y = r\sin\theta$ | $\theta \in]0, \pi/2[$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$\underset{\text{Fubi}}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr = \frac{\pi}{2 \cdot 2}$$

CC $I^2 = \frac{\pi}{2 \cdot 2} \longrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

IV Dérivées d'ordre ≥ 2

$E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$

lorsque cela a un sens $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{|\alpha|}}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\dfrac{\partial^{\alpha - 1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{|\alpha|}}} \right)$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^{|\alpha|}$: fonction admettant des DP continues jusqu'à l'ordre $|\alpha|$

__Th__ : Si f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur Ω, pour tout $i_1, \ldots, i_m \in [\![1, n]\!]$ tout $\sigma \in S_m$ et tout $x \in \Omega$ on a

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{\sigma(m)}}$$

__Prop__ : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Alors $\forall x \in \Omega$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X)$

D/ On suppose $(0,0) \in \Omega$, on va prouver

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \quad (?)$$

On envisage $F(x,y) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,t)\, dt \right) ds$

il vient $F(x,y) = \displaystyle\int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,0) \right] ds$

$$= f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0)$$

$G(x,y) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s,t)\, dt \right) ds \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^y \left(\int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s,t)\, ds \right)$

$$= \int_0^y \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,t) \right) dt = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$$

Bref : $\forall x,y \in B((0,0),r) \subset \Omega$

$$\int_0^x \left(\int_0^y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s,t) \right] ds \right) dt = 0$$

Si par ex $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lambda > 0$ on choisit $r > 0$ (par continuité)

$\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,r) \subset \Omega$ et $\forall (s,t) \in [0,r]^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,t) \geq \frac{\lambda}{2}$

$$\int_0^r \left(\int_0^r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s,t) \right] ds \right) dt \geq \frac{\lambda}{2} r^2 > 0$$

absurde

Preuve du th : Récurrence sur m

Le cas précédent donne $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$ τ_k transposition $\tau_k = (k, \ell)$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(m)}}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_{\sigma \circ \tau_p(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma \circ \tau_p(m)}}}$$

$$= \frac{\partial^m f}{\partial}$$

Conséquences : On écrit désormais $\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}_p(\Omega) \\ \alpha \in \mathbb{N}^m, \ \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_m) \\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \end{array} \right.$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

Not : $f'_x, f'_y, f''_{xy} \left(= f''_{yx} \right)_{f \in \mathcal{C}^2}$

2) Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ commutent sur $\mathcal{C}^p(\Omega)$

3) $\text{Rot}\,(\nabla f) = \text{Rot}\begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) Th de Poincaré : Soit $\vec{E}$ un champ sur $\mathbb{R}^3$

$$\int_\Gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dM} = \int_0^1 \vec{E}_{(\gamma(t))} \wedge \gamma'(t)\,dt \quad \left| \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right. \quad \vec{E}\begin{pmatrix} a(M) \\ b(M) \\ c(M) \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 a(\gamma(t))\,x'(t) + b(\gamma(t))\,y'(t) + c(\gamma(t))\,z'(t)\,dt$$

Si $\vec{E} = \vec{\nabla} V \quad " = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(V(\gamma(t))\right) dt = V(\gamma(1)) - V(\gamma(0))$

On suppose Ω, ouvert de $\mathbb{R}^3$, est étoilé // 0 $\left[\begin{array}{l} 0 \in \Omega \\ \forall M \in \Omega \ [0, M] \subset \Omega \end{array} \right.$

Soit $\vec{E}$ un champ $\mathcal{C}^1$ sur Ω ~~sur~~ Ω tq $\text{Rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y} \end{array} \right.$

On pose $V(x, y, z) = \int_0^1 [a(tM)\,x + b(tM)\,y + c(tM)\,z]\,dt$

$\gamma(t) = (tx, ty, tz)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^1 a(t\pi)\,dt + \int_0^1 \left(\frac{\partial a}{\partial x}(tx,ty,tz)\,tx + \frac{\partial b}{\partial x}(\dots)\,ty + \frac{\partial c}{\partial x}(\dots)\,tz\right)dt$$

$$= \int_0^1 a(t\pi)\,dt + \int_0^1 \left(\frac{\partial a}{\partial x}(\dots)\,tx + \frac{\partial a}{\partial y}(\dots)\,ty + \frac{\partial a}{\partial z}(\dots)\,tz\right)dt$$

$$= \int_0^1 a(t\pi)\,dt + \int_0^1 t\,\frac{d}{dt}a(tx,ty,tz)\,dt \quad \text{(chaîne)}$$

$$\text{(IPP)} = \int_0^1 a(t\pi)\,dt + \left[t\,a(tx,ty,tz)\right]_0^1 - \int_0^1 \text{''} = a(x,y,z)$$

Les autres coordonnées viennent de m̂.

5) $F(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \quad \Big\| \ \exists \lim_{\substack{y\to 0^+ \\ x\to a}} F(x,y) = f(a)$ (f intégrable)

$$|F(x,y)| \leq \frac{1}{y}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|\,dt}{\left(\frac{x-t}{y}\right)^2+1} \leq \frac{1}{y}\int_{\mathbb{R}} |f| \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \int \ -2(x-t)\,y\,f(t) \dots$$

7) Cas périodique On regarde $u(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}^2/\dots$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$x\in[0,2\pi]$, $x \mapsto u(t,x)$ périodique

$u(0,x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \cos mx$, $\sum |\alpha_m| < +\infty$

$u(t,x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m e^{-m^2 t} \cos(mx)$

4/4

Mq u est $\mathcal{C}^2$ pour $x\in\mathbb{R}, t>0$, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, et sol de $(\mathcal{E})$ avec $\lambda=1$

S/ Continuité : $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $|\alpha_n e^{-n^2t}\cos nx|\leq|\alpha|$
il y a CVN ... AQT

Caractère $\mathcal{C}^2$: Soit $\tau>0$. On se place sur $A_\tau=[\tau,+\infty[\times\mathbb{R}$

$\left|\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_n e^{-n^2t}\cos nx)\right|\leq n^2|\alpha_n|e^{-n^2\tau}$ série CV

donc $\sum\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x)$ est NCV sur A_τ

Sa somme y est $\mathcal{C}^0$ $\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)\right|=|\alpha_n(-n^2)e^{-n^2t}\cos nx|$

$\leq n^2|\alpha_n|e^{-n^2\tau}$

série CV

$\sum\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ CVN sur A_τ et y est $\mathcal{C}^0$ TC.

Delà u possède des DP // (t,x) jusqu'à l'ordre 2 et $\mathcal{C}^0$

donc u est $\mathcal{C}^2$ ok

B) EDP (HP)

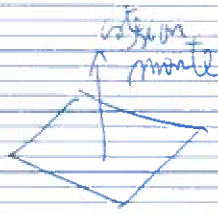
~~Th Cauchy~~ unicité

1) Déterminer les $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ tq $\exists\, a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^n$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)=0$$

S/ On reconnaît
$\langle\vec{\nabla}u,\vec{a}\rangle=0$ ie $\forall x\in\mathbb{R}$ $t\mapsto u(x+ta)$ a une dérivée identiquement nulle, $\forall t\in\mathbb{R}\ \frac{d\gamma}{dt}=0$

donc γ est constant à x fixé



Soit $H=\{\vec{v}\}^{\perp}$ u est déterminé par $u|_H$: si l'on se donne

| v de classe $\mathcal{C}^1$ sur H, la fonction définie par : $u(x) = v(\pi(x))$ vérifie (E)
| π la p.o. sur H

et réciproquement

(2) Soit Ω un ouvert tq $\left|\begin{array}{l} 0\in\Omega \\ \forall x\in\Omega\ \forall\lambda>0,\ \lambda x\in\Omega \end{array}\right.$

Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ $\Updownarrow$ f est homogène de degré n (ie $\forall\lambda>0\ \forall x\in\Omega$ $f(\lambda x)=\lambda^n f(x)$)

f vérifie $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x)$

S/ ($\Downarrow$) On dérive l'identité $f(\lambda x)=\lambda^n f(x)$ par rapport à λ

sur $]0,+\infty[\times\Omega$

ce qui donne, f étant $\mathcal{C}^1$ $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = n\lambda^{n-1} f(x)$

et on prend $\lambda=1$.

($\Uparrow$) Soit $x\in\Omega$ soit $\gamma :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\gamma(t)=f(tx)$

γ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall t>0$, $\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} t x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$

ie $\gamma' = \frac{n}{t}\gamma$ $t\in]0,+\infty[$

Delà $\exists c\in\mathbb{R}$ $\forall t>0$ $\gamma(t)= c(\exp(n\ln t)) = Ct^n$

$t=1$ $C=f(x)$, $f(tx)=t^n f(x)$

1-6

③ Laplacien en polaires

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ $\quad g(r,\theta) = f(\overset{x}{r\cos\theta}, \overset{y}{r\sin\theta})$

Calculer $\frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \times r\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial g}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\vec{u_\theta}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\sin\theta\right]\cos\theta$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right]\sin\theta = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta \ldots$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta)\right] - r\sin\theta$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta)\right] r\cos\theta$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(-r\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(-r\sin\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \Delta f - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

① Equation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

Solutions évidentes $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$