Géométrie

I Arcs

Déf : Soit E un espace affine euclidien, un arc de classe $\mathcal{C}^p$ à valeurs dans E est une application $\mathcal{C}^p$ $\underbrace{I}_{\text{int de } \mathbb{R}} \xrightarrow{\gamma} E$ $\left\{ (I, \gamma) \right.$

Voc : Arc simple injectif

Arc de Jordan $I = [a,b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\gamma|_{[a,b[}$ injectif

Support de M : $\gamma(I)$

Point multiple : $m \in I$ tq $|\gamma^{-1}(m)| \geqslant 2$

On suppose désormais que $p \geqslant 1$:

Point | régulier : $m = \gamma(t_0)$ avec $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$
| stationnaire $m = \gamma(t_0)$ $\gamma'(t_0) = \vec{0}$
| arc régulier : $\forall t \in I$, $\gamma'(t) \neq \vec{0}$

Ex $\gamma'(t) = A(t)\, \vec{\gamma}(t)$ $\gamma \neq C$ cte

Illustration : ① Parabole $y = x^2$ est un arc régulier $x \longmapsto (x, x^2)$ $\mathcal{C}^P$

$t \longmapsto (\text{ch}\, t, \text{sh}\, t)$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

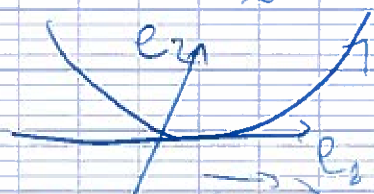
② $r = \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}$ $\theta \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Allure au voisinage d'un point (HP)

Soit $t_0 \in I$, on suppose $\gamma : t \longrightarrow (x(t), y(t))$ est $\mathcal{C}^\infty$, on étudie les cas génériques

① $\overrightarrow{\gamma'(t_0)} \neq \vec{0}$ $\quad \gamma(t_0+h) \underset{\text{Taylor}}{=} \gamma(t_0) + h\overrightarrow{\gamma'(t_0)} + \frac{h^2}{2}\overrightarrow{\gamma''(t_0)} + \underset{\text{vectorielle}}{o(h^2)}$

i) $\left(\overrightarrow{\gamma'(t_0)}, \frac{\overrightarrow{\gamma''(t_0)}}{2}\right)$ est une base (e_1, e_2) il vient $\begin{cases} X(t_0+h) = h + o(h^2) \\ Y(t_0+h) = h^2 + o(h^2) \end{cases}$



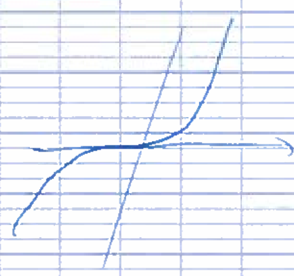
det

ii) $[\overrightarrow{\gamma'(t_0)}, \overrightarrow{\gamma''(t_0)}] = 0$ alors $\left(\overrightarrow{\gamma'(t_0)}, \frac{\overrightarrow{\gamma'''(t_0)}}{6}\right)$ est libre (génériquement)

$\gamma''(t_0) = \mu\gamma'(t_0)$ $\quad \gamma(t_0+h) = \gamma(t_0) + h\vec{e_1} + h^3\vec{e_2} + o(h^3)$

$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t_0+h)} = h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{h^3}{6}\gamma'''(t_0) + o(h^3)$

$\begin{cases} X(t_0+h) = h + O(h^2) \\ Y(t_0+h) = h^3 + o(h^3) \end{cases}$



$Y \simeq X^3$ (générique)

Y / X changement de signe

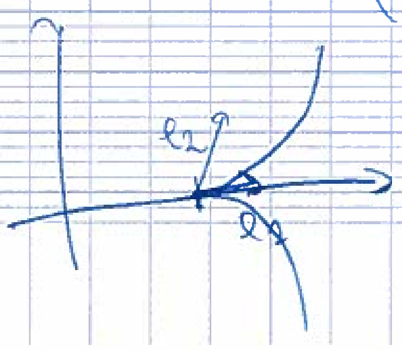
point d'inflexion

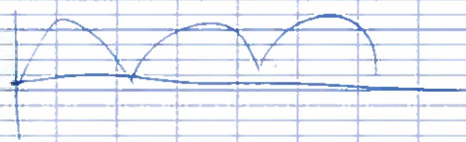
② Points stationnaires : $\overrightarrow{\gamma'(t_0)} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t_0+h)} = h\overrightarrow{\gamma'(t_0)} + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{h^3}{6}\gamma'''(t_0) + o(h^3)$

génériquement $\left(\frac{\gamma''(t_0)}{2}, \frac{\gamma'''(t_0)}{6}\right)$ est libre

$Y = \pm X^{3/2}$ $\quad \begin{cases} X \geq 0 \\ Y \text{ chge de signe} \end{cases}$ $\quad T = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma''(t_0)}$



cycloïde 

II Arc tracés vecteurs tangents

Données : A une partie de $\mathbb{R}^n \neq \emptyset$ et $a \in A$

Déf : On dit que l'arc (I, γ) est tracé sur A lorsque

$\gamma(I) \subset A$

Déf : Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{u}$ est tangent à A en a ssi il existe $\varepsilon > 0$ $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ tq $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset A$

$\gamma(0) = a$

$\gamma'(0) = \vec{u}$

Prop : 1) $\vec{0}$ est toujours tangent : prendre $\gamma(t) = a$

2) Si $\vec{u}$ est tangent à A en a ssi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{u}$ est tangent à A en a

D/ Si $\lambda \neq 0$ on envisage $\left(\begin{array}{l}]-\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}[\longrightarrow A \\ t \longmapsto \gamma(\lambda t) \end{array} \right)$

Aussi $T_a(A)$ est un cône de sommet $\vec{O}$

3) Si $a \in \mathring{A}$, $T_a(A) = \mathbb{R}^n$. Soit $r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$

Soient $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; et $\gamma\ ]-\frac{r}{\|\vec{u}\|}, \frac{r}{\|\vec{u}\|}[\longrightarrow A$, $t \longmapsto a + t\vec{u}$

Exemples : 1) Soit F un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ | $F = b + \vec{F}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\vec{F}$ sev de $\mathbb{R}^n$

Soit $a \in F$. Alors $T_a(F) = \vec{F}$

D/ Soit $u \in \vec{F}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{a + t\vec{u}}_{\gamma(t)} \in F$ $\left(a = b + \underbrace{\vec{v}}_{\in \vec{F}} \quad a + t\vec{u} = b + t\vec{u} + \vec{v}\right)$

$\gamma'(t) = \vec{u}$

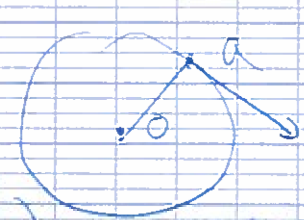
$\infty M \infty^{-1}$

Réciproquement : si $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} A$ vérifie $\gamma(0)=a$

il vient $\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\left.\begin{array}{l}\gamma(t)-b\in\vec F\\ \gamma'(t)\in\vec F\end{array}\right\}$ $\vec{\gamma'}(0)\in\vec F$

Def 2) $A=S(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, $a\in S(0,1)$

$$T_a(A)=\vec{Oa}^{\perp}$$



D/ Soit $u\in\vec{Oa}^{\perp}$, $\vec u\neq\vec 0$; $\left(\vec a,\frac{\vec u}{\|\vec u\|}\right)$ est ON (Gokn)

$\gamma(t)=\cos(\lambda t)\vec a+\sin(\lambda t)\frac{\vec u}{\|\vec u\|}$ est $\mathcal{C}^\infty$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $\|\gamma(t)\|=1$

$\vec{\gamma'}(0)=\frac{\lambda\vec u}{\|\vec u\|}$ avec $\lambda=\|\vec u\|$, $\vec u\in T_a(A)$

** Soit $\gamma\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} S(0,1)$ il vient $\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ $\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle$

$\langle\vec{\gamma'}(0),\underbrace{\gamma(0)}_{\vec{Oa}}\rangle=0$

$\vec{\gamma'}(0)\perp\vec{Oa}$

3) $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$

Soit $\gamma\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} SL_n(\mathbb{R})$, avec $\gamma(0)=I_n$

on a $\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ $\det(\gamma(t))=1$

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\gamma}(t)\vec{\gamma'}(t))=0$$

$t=0$ $\quad\mathrm{Tr}(\vec{\gamma'}(0))=0$ $\Big|$ $\vec{\gamma'}(0)\in\{\mathrm{Tr}\,M=0\}$

** Réciproquement si $\mathrm{Tr}\,M=0$, on introduit $e^{tM}=\gamma(t)$

il vient $\left|\begin{array}{l}\gamma'(0)=M\\ \det(e^{tM})=\exp(\mathrm{Tr}(tM))=e^0=1\end{array}\right.$

(4) $A \in SO_n(\mathbb{R}), a = I_n$ si ${}^tA = -A$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$

${}^t\exp(tA) = \exp({}^t(tA)) = e^{-tA}$

$\mathcal{C}^0$ des opérations

$e^{tA}e^{-tA} = I_n$ donc ${}^tOO = I_n$, O est orthogonale

$\det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Tr}(A)} = e^0$

Aussi $A \in T_{I_n}(SO_n(\mathbb{R}))$ et $\cancel{\det(t\mathrm{Tr}(A))} = e^0 = 1$

antisymétrique

Réciproque : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ ${}^t\gamma(t)\gamma(t) = I_n$

dérivons ${}^t\gamma(0)\gamma'(0) + {}^t\gamma'(0)\gamma(0) = 0$

$\gamma'(0) + {}^t\gamma'(0) = 0$ ✓

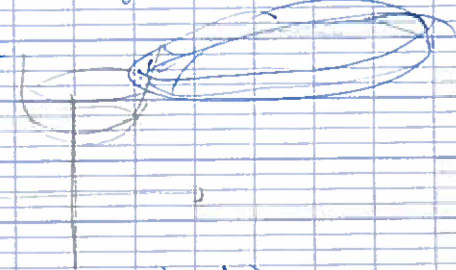
III Surface cartésiennes :

Déf Une partie $A \subset \mathbb{R}^3$ est une surface cartésienne s'il existe un ouvert (connexe) $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$

$A = \Gamma_f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\} = \Phi(D)$ avec $\Phi : \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y)) \end{array} \right.$

Ex 1) Demi sphère $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2<1$

2) Demi ellipsoïde $\frac{z}{c} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$



3) Nappe d'hyperboloïde $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$

4) $z = xy$ ou $z = x^2 - y^2$ (geogebra)

Surface réglée : droite passant par (λ, μ) $\left| \begin{array}{l} z = \lambda y \\ x = \lambda \end{array} \right)$ Δ

Δ bien $\subset$ sur $z = xy$

Th. $z=f(x,y)$, $a=(\alpha,\beta,\gamma)\in A$, $\gamma=f(\alpha,\beta)$, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $T_a(A)=\left\{Z=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)X+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)Y\right\}$

D/ * Soit γ une tracé sur A de la forme

$$\gamma(t)=\left(\alpha+tu,\ \beta+tv,\ f(\alpha+tu,\beta+tv)\right)$$

(défini pour tout tracé t assez petit car D ouvert)

il vient $\gamma'(0)=\left(u,\ v,\ \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)u+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)v\right)$

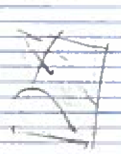
$$\gamma'(0)\in\Pi=\left\{z=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right\}$$

** Soit $\gamma\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1}A$, $\gamma(0)=a$, il vient avec $\gamma(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$

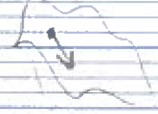
$\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[: z(t)=f(x(t),y(t))$

$$z'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)x'(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)y'(0)$$

Déf: $\mathcal{T}_a(S)=a+T_a(S)=\left\{z-\gamma=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta)\right\}$



Obs: La normale à Π est $\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\\-\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{\text{grad}}_{(\alpha,\beta)}\left(z-f(x,y)\right)$

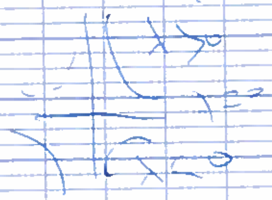


IV. Lignes de niveau

1) Soient Ω un ouvert du plan, $f : \Omega \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$

On pose $A_\lambda = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = \lambda\}$

ex : $f(x,y) = xy$



Prop : si γ est tracée sur A_λ, on a $\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ $\vec{\gamma'}(t) \perp \vec{\nabla} f(\gamma(t))$

D/ On dérive $f(\gamma(t))$ suivant la règle de la chaîne :

$$0 = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Fonction implicite (admis) : Si $(\alpha,\beta) \in A_\lambda$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) \neq 0$.

Alors $\exists \varepsilon, \varepsilon' > 0$ $\exists \varphi \in C^1(]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[, \mathbb{R})$ tq

$$A_\lambda \cap]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[\times]\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon'[\cap A_\lambda = \Gamma_\varphi$$

ie $f(x,y) = \lambda \iff y = \varphi(x)$.

2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$S_\lambda = \{f(x,y,z) = \lambda\}$$

Prop : Si γ est tracée sur S_λ, $\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\gamma'(t) \perp \vec{\nabla} f(\gamma(t))$

Fonctions implicites : Si

2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$S_\lambda = \{ f(x,y,z) = \lambda \}$

Prop : Si γ est tracé sur S_λ, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\vec{\gamma}'(t) \perp \vec{\nabla} f(\gamma(t))$$

Fonctions implicites :

Si $\frac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$, $\exists \varepsilon > 0$, $U \in \mathcal{V}(a)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\times]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[, \mathbb{R})$

tq $U \cap S_\lambda = \Gamma_\varphi$

$f(x,y,z) = \lambda \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$

$\vec{\nabla} f \,//\, \varphi : \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z} \varphi' = 0$

$\varphi'_z = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\varphi'_x \\ -\varphi'_y \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Ex : $f(x,y,z) = 0$: avec f $\mathcal{C}^\infty$, on peut obtenir un fermé quelconque de $\mathbb{R}^3$

On écrit : $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus F$

$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a_n, r_n)$

Soit $\varphi_n : B(a_n, r_n) \to \mathbb{R}_+^*$;

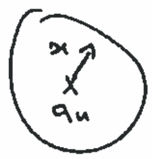
$\varphi_n(x) = \exp\left(\frac{1}{\|x - a_n\|_2^2 - r_n^2} \right)$

φ_n se prolonge $\mathcal{C}^\infty$ à $\mathbb{R}^3$ en posant $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(a_n, r_n)$

on effet, $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_n = e^{1/(\|x-a_n\|_2^2 - r_n^2)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\|x-a_n\|_2^2 - r_n^2} \right) \xrightarrow[\|x-a_n\|_2 \to r_n]{} 0 \\ x \in B(a_n, r_n) \end{cases}$

54 Les $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$ se prolongent $\mathcal{C}^0$ à $\mathbb{R}^3 \setminus B(a_n, r_n)$ (par 0)

On note $r_n = \sup_{1 \leq i \leq 3} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right|$ (Correct, support compact)



$- \frac{1}{r_n^2 - \|x-a_n\|^2} \longrightarrow -\infty$

$\rightarrow \exp(\;"\;) \longrightarrow 0$

On envisage $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\varphi_n}{2^n(r_n+1)}}_{u_n} = f$

1) $\|u_n\| \leq \frac{1}{2^n}$: CVN

2) $i = 1,2,3$; $\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\| \leq \frac{1}{2^n}$: CVN $/ (x_1, x_2, x_3)$

$\rightarrow$ (Cc) $\left| \begin{array}{l} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ f \geq 0 \end{array} \right.$ et $F = \{f = 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ au $\mathcal{V}(a,b,c)$, $f(x,y,z) = 0$

$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = \varphi(x,y) \\ \varphi : \mathcal{C}^1 \,\text{"} \end{array} \right.$, $c = \varphi(a,b)$

(par le thm admis précédent)

Gradient, $f(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0$ au $\mathcal{V}(a,b,c)$

On dérive : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\, \varphi'_x = 0$

(Chaîne) : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\, \varphi'_y = 0$

de là, $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{gradient}} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} -\varphi'_x \\ -\varphi'_y \\ 1 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dirige la normale au plan tangent pour $z = \varphi(x,y)$

Ex. $\|x+h - p(x+h)\|^2 \leq \|\underbrace{x+h-p(x)}_{h+x-p(x)}\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \underbrace{2\langle h, x-p(x)\rangle}_{\text{diff}} + \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)}$

et $\|x+h-p(x+h)\|^2 = \|x-p(x+h)\|^2 + 2\langle h, x-p(x)\rangle + \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)}$

$\geq \|x-p(x)\|^2 + 2\langle h, x-p(x)\rangle + 2\langle h, -p(x+h)+p(x)\rangle + o(h)$

Optimisation

I Inégalités classiques

Problèmes comportant des symétries

<u>Ex</u>: Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ tq $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Etudier le min et le max de $\sum_{i \neq j} x_i x_j$

<u>Ex</u> Maximum de l'aire d'un triangle connaissant le périmètre

S/ Soit $2p$ le périmètre de T, a,b,c ses côtés. On a

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

IAG $$\mathcal{A}^2 \leqslant p\left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3 = p \cdot \frac{p^3}{27} = \frac{p^4}{27}$$

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \quad \text{atteint si } a=b=c \text{ et } p = \frac{3a}{2}$$

<u>Ex</u> $x>0, y>0$, $f(x,y) = ax+by+\frac{c}{xy}$, $a>0, b>0, c>0$ (Revoir)

II Compacité

$\left.\begin{array}{l} A \text{ compact} \neq \emptyset \\ f \; \mathcal{C}^0 \end{array}\right)$ alors f atteint son max et son min

Ex: On suppose A convexe compact $\neq \emptyset$, $f : A \to \mathbb{R}$ convexe

Mq: f atteint ~~atteint~~ son max en un point extrémal.

D/ Par compacité f atteint son max en $a \in A$

si a n'est pas extrémal $a = \frac{1}{2}(b+c)$ d'où $f(a) \leqslant \frac{1}{2}(f(b)+f(c))$

or $f(a) = \max_A f$, $f(a) = f(b) = f(c)$

* Soit $B = \{x \in A \mid f(x) = \max_A f\}$, B contient un point extrémal ?

On va mq A est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux

cela fait, si $a \in B$ $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $a_i \in Ext(A)$ et alors

$$f(a) \leq \sum_{1}^{m} \lambda_i f(a_i) \leq \max(f(a_i)) \leq f(a)$$

classique

donc $f(a) = f(a_i)$ pour tout i

Rappel Carathéodory Si X est compact $Conv(X)$ est compact

1) Soit H : hyperplan ; $H = \{\varphi = 0\}$, $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$.

On note $\lambda = \min_A \varphi$, $\mu = \max_A \varphi$

alors un pt extrémal de $\{\varphi = \mu\} \cap A$ est un point extrémal de A

D/ Si $x = (1-t)a + tb$, $a, b \in A$, et $x \in \{\varphi = \mu\} \cap A$

$\varphi(x) = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$ donc $\mu = (1-t)\underbrace{\varphi(a)}_{\leq \mu} + t\underbrace{\varphi(b)}_{\leq \mu}$ || si $t \in]0,1[$, $\varphi(a) = \varphi(b) = \mu$, $a, b \in \{\varphi = \mu\}$

→ par récurrence sur la dimension, A possède des points extrémaux

2) On note $A' = Conv(Ext(A))$. Alors $A' = A$

On suppose, (ABS), $a \in A \setminus A'$; A' est un convexe compact $\neq \emptyset$

Séparation, $\exists \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tq

$$\varphi(a) > c > \max_{x \in A'} \varphi(x)$$

Posons $\mu = \max_A \varphi \geq \varphi(a)$

→ $A \cap \{\varphi = \mu\}$ contient un point extrémal : non.

56

Bref, $\boxed{A = Conv(Ext(A))}$

3) Si $Ext(A)$ est fermé, il est compact et $Conv(Ext(A))$ est compact, et

$A = Conv(Ext(A))$

$Ext(A) = \{A, B\} \cup T \setminus \{C\}$, non-fermé.

4) Soit $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tq $\varphi(a) = \max\limits_{x \in A} \varphi(x) = \mu$

$\{\varphi = \mu\} \cap A = A'$: convexe, compact avec :

$Ext(A') \subset Ext(A)$

+ récurrence, $a \in Ext(A')$.

Ex. Soit T un arc de Jordan $\mathcal{C}^1$-régulier (du plan)

Mq : $\exists A, B \in supp(T)$, $A \neq B$ tq $T_A(T) \parallel T_B(T)$

$AB \perp T_A(T)$

5/ Idée : diamètre

Soit $(A,B) \in T^2$ tq : $AB = \max\limits_{(M,N) \in T^2} MN$ || Compacité de T

$A = \gamma(t_0)$, $B = \gamma(t_1)$; γ est 1-périodique, et $\forall t$: $\vec{\gamma'}(t) \neq \vec{0}$

Soit $t \xrightarrow{\varphi} \|\gamma(t_0) - \gamma(t)\|_2^2$, φ atteint son max en t_1

$\varphi'(t_1) = \vec{0}$ donne :

$2\langle \gamma(t_1) - \gamma(t_0), \vec{\gamma}'(t_1) \rangle = 0$

$\rightarrow \boxed{AB \perp T_B(T)}$

de m̂, $T_A(T) \perp AB$, donc $T_A(T) \parallel T_B(T)$

III - Locale compacité

|| Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tq : $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f = +\infty$; f est minorée et atteint son min.

Application : d'Alembert-Gauss

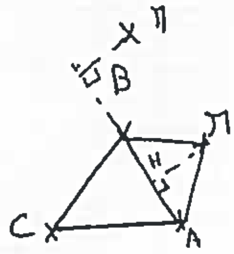
Ex : Point de Fermat :

Soit (A, B, C) un (vrai) triangle du plan.

On étudie $\min (AM + BM + CM)$

Obs : f est $\mathcal{C}^0$, convexe et $f(\pi) \to +\infty$ si $O\pi \to +\infty$

$\to \exists\, \pi_0 \in P$, tq $f(\pi_0) = \min_{\pi \in P} f(\pi)$



$\pi_0 \in \mathrm{Conv}(A,B,C)$.

Si $\pi \notin \mathrm{Conv}(A,B,C)$, π est dans l'un des 1/2 plans limité par les côtés du triangle, ne contenant pas le triangle

On projette : H par ex, π sur AB $\to$ H. $f(H) < f(\pi)$

et si $H \notin [A,B]$, on projette sur A ou B selon ...

IV - Optimisation différentiable :

Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, a est un extremum local de f alors $\vec\nabla f(a) = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\right)$ | Point critique

/!\ $f(x,y) = x^2 - y^2$ $(0,0)$ est un point critique

$(0,0)$ n'est pas un extremum local

$f(x,0) = x^2$, $f(0,y) = -y^2$

Ex : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tq $\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Mq $\vec\nabla f$ est surjectif.

S/ Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. On regarde :

$$f(x) - \langle \vec{u}, x \rangle = g(x) \text{, qui est } \mathcal{C}^1.$$

$$\|g(x)\| \geq f(x) - \|\vec{u}\| \cdot \|x\|$$

$$\geq \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|\vec{u}\| \right) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

g, étant continue, atteint son min : $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $g(a) = \min_{\mathbb{R}^n} g$

de là, $\vec\nabla g(a) = \vec{0}$ et $\vec\nabla f(a) = \vec{u}$ ✓ super nice !

2) Point de Fermat,

1er cas : $\pi_0 \notin \{A,B,C\}$: $\vec\nabla f(\pi_0) = \vec{0} = \underbrace{\frac{\vec{A\pi_0}}{A\pi_0}}_{u} + \underbrace{\frac{\vec{B\pi_0}}{B\pi_0}}_{v} + \underbrace{\frac{\vec{C\pi_0}}{C\pi_0}}_{w}$

$u, v, w \in \mathbb{U}$: $u+v+w=0$

$\Rightarrow w(1+u'+v')=0$; $|u'|=|v'|=1$

$\begin{cases} Re(u')+Re(v')=(-1) \\ Im(u')+Im(v')=0 \end{cases}$

$\rightarrow Re(u')=Re(v')=-1/2$

$Im(u')=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Im(v')=-Im(u')$

Le point n_0 s'obtient par arcs capables d'angle $\frac{2\pi}{3}$ lorsque tous les A, B, C sont $< \frac{2\pi}{3}$

<u>2e Cas</u>, $n_0 = A$, $AB+AC = \min f$

$\rightarrow (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \geq \frac{2\pi}{3}$ (sinon –)

<u>Ex</u>, <u>Fonctions convexes</u>,

<u>Données</u>, Ω est un <u>ouvert</u> <u>convexe</u>, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est <u>convexe</u>.

<u>Mq</u> ① f est cvx $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in \Omega$, $\varphi : t \mapsto f((1-t)a+tb)$ est <u>cvx</u> sur $[0,1]$

② <u>Mq</u> $\forall (a,b) \in \Omega^2$, $f(b) \geq f(a) + \langle \vec{\nabla} f(a), b-a \rangle$

[Si $\nabla f(a)=0$, $f(a) = \min_\Omega f$]

③ $\forall (a,b) \in \Omega^2$, $\langle \vec{\nabla} f(b) - \vec{\nabla} f(a), b-a \rangle \geq 0$

④ $\Omega = \mathbb{R}^n$: Si $\varepsilon > 0$: $x \mapsto \nabla f(x) + 2\varepsilon x$ est un homéo de $\mathbb{R}^n$.

① $\Rightarrow$ clair. $t = (1-\lambda)u + \lambda v$

$\varphi(t) = f[(1-((1-\lambda)u+\lambda v))a + ((1-\lambda)u+\lambda v)b]$

$= f((1-\lambda)[(1-u)a+ub] + \lambda[(1-v)a+vb])$

$\varphi(t) \leq (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v)$

$\Leftarrow$ $f(\frac{a+b}{2}) = \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(\frac{1}{2}(0+1)) \leq \frac{1}{2}(\varphi(0)+\varphi(1)) = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$

② $\varphi(1)-\varphi(0) \geq \varphi'(0)(1-0)$, or $\varphi'(t) = \langle \nabla f((1-t)a+tb), b-a \rangle$

$\rightarrow f(b) - f(a) \geq \langle \vec{\nabla} f(a), b-a \rangle$

Conditions d'ordre 2 : (HP)

• Ex : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ présentant un min local en $a \in \Omega$

① Si γ est tracé sur Ω, avec $\gamma(0) = a$, il vient :

$$(f \circ \gamma)''(0) \geq 0$$

② $\forall (h_1, \dots, h_n) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \geq 0$:

$$S \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \text{ est positive.}$$

③ $\Delta f(a) \geq 0$

1) $f \circ \gamma$ possède un min local en 0

2) On prend, pour t assez petit - Ω est ouvert -

$$\gamma(t) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$$

Chaîne : $\gamma'(t) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + th) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + th)$

$$\gamma''(t) = h_1 \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(\,''\,) \right) + \dots + h_n \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_n}(\,''\,) \right)$$

puis $t = 0$; la symétrie vient du Thm de Schwarz.

$h = \varepsilon_i$ (can). Il vient : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \geq 0$

• Ex : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\overline{B}(0,1), \mathbb{R})$, continue sur $\overline{B}(0,1)$ $(*)$

a) On suppose, $\forall x \in B(0,1)$, $\Delta f(x) \geq 0$. Mq,

$$\exists a \in S(0,1), \; f(a) = \mu = \max_{\overline{B}(0,1)} f$$

b) On suppose que f et g vérifient $(*)$, $\Delta f = \Delta g = 0$

Si $f_{|S(0,1)} = g_{|S(0,1)}$, alors $\boxed{f = g}$

S/(Abs) supposons, $\forall a \in S(0,1)$, $f(a) < \mu$

On introduit $\nu = \max_{S(0,1)} f$; ν est atteint par $\mathcal{C}^0$ de f et compacité de S.

donc $\nu < \mu$.

Soit $b \in B(0,1)$ Tq $f(b) = \mu$ (existe par compacité de $\overline{B}$)

On envisage alors : $f_\varepsilon : x \longmapsto f(x) + \varepsilon \|x-b\|^2$.

$f_\varepsilon(b) = \mu > \nu$. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit, pour que :, bossez préciser ?

$$\forall x \in S, \quad f(x) + \varepsilon\|x-b\|^2 \leqslant \nu + \varepsilon\|x-b\|^2 \leqslant \nu + 4\varepsilon \leqslant \mu$$

$\rightarrow$ f_ε atteint son max en $b' \in B(0,1)$ (pas dans S !)

$\rightarrow$ $\Delta f_\varepsilon(b') \leqslant 0$, soit :

$$\underbrace{\Delta f(b')}_{\geqslant 0} + \underbrace{2n\varepsilon}_{\geqslant 0} \leqslant 0 \quad : \text{non}.$$

b) On regarde $f-g$; $\Delta(f-g) = 0 \geqslant 0$; $\max\limits_{B}(f-g) = \max\limits_{S}(f-g) = 0$

$\Delta(g-f) \geqslant 0$, de m. : $\max\limits_{\overline{B}}(g-f) = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{f - g \equiv 0}$

$\rightarrow$ $\boxed{f \equiv g}$

U

Reduction des endomorphismes symétriques

Données : E est un eve, $\dim E = n$
$\langle , \rangle$ est un p.s sur E

$S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A \}$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$

Base $\left\{ E_{ii}, \frac{E_{ij}+E_{ji}}{2} \right\}_{1 \leq i < j \leq n}$ $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$

⚠ Si $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ $AB \in S_n(\mathbb{R}) \iff [A,B] = 0$

I Généralité

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est symétrique lorsque :

$$\forall x, y \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

$S(E) = \{ u \in \mathcal{L}(E) \mid u \text{ symétrique} \}$

Ex : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, $F = \operatorname{Ker} p$, $G = \operatorname{Ker} I - p$
alors p est symétrique $\iff$ p est orthogonal

S/ Soit $(y, z) \in F \times G$
1) Si p est symétrique, $\langle y, z \rangle = \langle y, p(z) \rangle = \langle p(y), z \rangle = 0$ car F
donc $F \perp G$

2) Si $F \perp G$ $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, $y', z' \in F \times G$

$$\langle p(x), x' \rangle = \langle z, x' \rangle = \langle z, y' + z' \rangle = \langle z, z' \rangle$$

$$\langle x, p(x') \rangle = \langle z, z' \rangle \quad \text{OK}$$

Ex Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de couple (F,G)
s est symétrique ssi elle est orthogonale

D/ $s = I - 2p$ où p est la projection de E sur G de moyen F

Alors s sym $\Leftrightarrow \frac{I-s}{2}$ est symétrique $\Leftrightarrow p \in S(E)$
$\Leftrightarrow p$ est orthogonal

Th : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors
1) u est symétrique
2) $\exists (e_i)$ BON tq $[u]_{(e_i)} \in S_n(\mathbb{R})$
3) $\forall (e_i)$ BON $[u]_{(e_i)} \in S_n(\mathbb{R})$

D/ 1) $\Rightarrow$ 3) Soit $[u]_{(e_i)} = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$

$a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$ car (e_i) ON

si $u \in S(E)$, $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$

3) $\Rightarrow$ 2) Clair car il existe des BON

2) $\Rightarrow$ 1) $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$\langle u(x), y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j,k} a_{ki} x_i y_j \langle e_k, e_j \rangle$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ji} x_i y_j$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \langle x, u(y) \rangle \therefore u \in S(E)$$

$[a_{ij}] = [a_{ij}]$

Retenir $\langle u(x), y\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j$

$$\dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ex $u \in O(E) \cap S(E) \iff u$ est une sym orthogonale

II Réduction Thm spectral

Th : Soit $u \in S(E)$

1) Si F est stable par u, $F^\perp$ aussi
2) Si λ et μ sont deux v.p réelles de u, $E_{\lambda,u} \perp E_{\mu,u}$
3) $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(u)} E_{\lambda,u}$
4) u est DZ en BON

Prop: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est DZ en BON il est symétrique

D/ $[u]_{(e_i)} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ symétrique

Constant: ① Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

① $f_A \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto AX\end{pmatrix}$ est symétrique dans $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{can})$

② $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ $\begin{cases} A = O\Delta O^{-1} \\ A = O\Delta\, {}^tO\end{cases}$ Δ diagonale

D/ ① $[f_A]_{can} = A$ et (ε_i) est une BON

② $\exists e_i$ BON de $\mathbb{R}^n$ $[f_A] = \Delta$ diagonale

si $O = Mat_{(\varepsilon_i)}(e_i)$ il vient $O^{-1}AO = \Delta$ donc $A = O\Delta O^{-1} = O\Delta\, {}^tO$

Rq: ${}^t(O\Delta\, {}^tO) = O\, {}^t\Delta\, {}^tO = O\Delta\, {}^tO$ une matrice de cette forme est symétrique

Exo: Diagonaliser $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

S/ Valeurs propres $\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-1\\1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&1-\lambda\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left(\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\ &2-\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2-\lambda&0\\1&1\end{vmatrix}\right)$

$x^2 - x - 1$ $\quad \Delta = 26 - 4 \cdot 1 \cdot 1$
$= 21 \quad \Delta = 9 - 4\cdot 1 \cdot 1$

$$= \cancel{(1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1 - 2 - \lambda\right)}$$

$$= \cancel{(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 - 2 + \lambda\right)}$$

$$= \cancel{(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)}$$

$$= (1-\lambda)\left(-\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(-(2-\lambda) - 1 + (2-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda) + (1-\lambda)(3-\lambda)\right)$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

[Comment ça trouve la matrice

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Big|$ $I_n + X\,{}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + I_n$

M est DZ donc $\mathrm{Ker}(M-I)^2$ est un plan $(= \mathrm{Ker}(M-I))$

$$(M-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \boxed{x+y-z=0}, \text{ ~~sept~~}$$

vecteur restant : normale $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt6} \\ 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \end{pmatrix}$$

5/ $$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(\cos^2 0$$

Ex Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ Mq $Tr(A)^2 \leq rg A \; Tr(A^2)$ (C.S)

S/ MQR

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ Mq ${}^tAA \underset{\sim}{\sim} A{}^tA$

S/ ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$ (réguler) Sym réelle

${}^t(A{}^tA) = A{}^tA$ Sym réelle

$\chi_{{}^tAA} = \chi_{A{}^tA} = \chi_{\Delta_1} = \chi_{\Delta_2}$ Con permute les vecteurs

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

III Estimations et valeurs propres pour $u \in S(E)$

Th : Soit $u \in S(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de diagonalisation de u avec $\text{spec}(u) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

① $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^n$ $\langle u(\sum_1^n s_i e_i), \sum t_j e_j \rangle = \sum_1^n \lambda_i s_i t_i$

$$\langle u(\sum_1^n s_i e_i), \sum_1^n s_i e_i \rangle = \sum_1^n \lambda_i s_i^2$$

② $\min_{\|x\|_2=1} \langle u(x), x \rangle = \underbrace{\lambda_1}_{\lambda_{min}}$ et $\max \langle u(x), x \rangle = \underbrace{\lambda_n}_{\lambda_{max}}$

D/ ① $u(\sum_1^n s_i e_i) = \sum_1^n \lambda_i s_i e_i$

(e_i) BON $\langle \sum_1^n \lambda_i s_i e_i, \sum_1^n t_j e_j \rangle = \sum_1^n \lambda_i s_i t_i$ / $s=t$

② On écrit $X = \sum_1^n s_i e_i$ (e_i) BON $\|x\|_2 = 1 \Leftrightarrow \sum_1 s_i^2 = 1$

De là $\lambda_1 (\sum_1^n s_i^2) \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n (\sum_1^n s_i^2)$ {nombre positif}

$\lambda_1 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n$

$x = e_1 \; \langle u(e_1), e_1\rangle = \lambda_1 \quad , x = e_n \; \langle u(e_n), e_n\rangle = \lambda_n$

Fin du Programme

Rq) Soit $f : S(0,1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$

f atteint son max en a (mettons), par $\left\| \begin{array}{l} \mathcal{C}^{0} \text{ de } f \\ \text{Compacité de } S(0,1) \end{array}\right.$

On a vu, f est $\mathcal{C}^\infty$, car c'est un polynôme dans une base

$$f(x+h) - f(x) = \langle u(x+h), x+h\rangle - \langle u(x), x\rangle = \langle u(x), h\rangle + \underbrace{\langle u(h), x\rangle}_{\substack{=\langle h, u(x)\rangle \\ \text{par sym}}} + o(h)$$

$$= \langle 2u(x), h\rangle + o(h)$$

?, $\nabla f(a) \in \mathbb{R}a \quad ; u(a) \in \mathbb{R}(a)$

$\rightarrow \mathbb{R}a$ est une direction propre.

Ex(X), Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $F_\mu = \{x \in E \mid \langle u(x), x\rangle = \mu\langle x, x\rangle\}$

Rq F_μ est un sev non-trivial $\Leftrightarrow \mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_n$

S/ Si $\mu > \lambda_n$, et si $x \in E\setminus\{0\}$, $\langle u(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle \leq \lambda_n < \mu$

$\langle u(x), x\rangle < \mu\|x\|^2$

Si $\mu = \lambda_1$; $\langle u(x), x\rangle - \lambda_1\|x\|_2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\geq 0} x_i^2 \qquad \rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } \lambda_1 = \lambda_i$$

$\rightarrow \forall i, (\lambda_i - \lambda_1)x_i^2 = 0 \qquad \rightarrow \boxed{x \in E_{\lambda_1, \mu}}$

si $\lambda_1 < \mu < \lambda_n$, on regarde : $F_\mu \cap \mathrm{Vect}(e_1, e_n)$

$$\lambda_1 s_1^2 + \lambda_n s_n^2 = \mu(s_1^2 + s_n^2)$$

$$(\lambda_n - \mu) s_n^2 - (\mu - \lambda_1) s_1^2 = 0$$

$$\left\{ s_n = \sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}}\, s_1 \right\} \cup \left\{ s_n = -\sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}} \right.$$

$\Rightarrow$ F_μ n'est pas un sev.