Two things : - $f\downarrow$: comparer série intégrale
- Ver formée

COMPARAISON SÉRIE/INTÉGRALE

I Cas monotone

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $(a=0)$

Objectif : comparer $\int_a^{+\infty} f$ et $\sum_{n \geq a} f(n)$

Th : On suppose que $f\downarrow$ positive, Alors

1) $\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f$ est une suite convergente (u_n)

2) $\sum f(n)$ CV $\iff \int_0^{+\infty} f$ converge

D/ $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f \leq 0$

Or u_n est positive : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f\right) + f(n)$

or f décroit, donc $f(k) - \int_k^{k+1} f \geq 0$

(CC) (u_n) est donc décroissante positive

2) $(\Leftarrow)$ si $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\sum_{k=0}^{n} f(k) = u_n + \int_0^n f$ a une limite finie en $+\infty$

$(\Rightarrow)$ si $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ CV, de même $\int_0^n f$ CV

comme f est positive : $F : x \mapsto \int_0^x f$ est croissante

et donc l'existence de la limite de $F(x)$ en ∞

~~[illegible]~~ Interpolation

~~[illegible]~~

& 68

Applications : ① Séries de Riemann et de Bertrand

$\alpha > 0 \quad \sum \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ CV $\Leftrightarrow \int^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}$ CV

Car $f : x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}$ $\searrow$ au voisinage de $+\infty$ $(\alpha > 0)$

② $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \int_0^n \frac{dx}{x+1}$ CV

$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(1+n)$ CV $\quad \Big| \; H_n - \log n \to \gamma$

RM : Si $u_n = H_n - \log n \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV $\Rightarrow$ la suite u_n CV

RM : On peut aussi travailler avec $f \nearrow \quad \int_0^n f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

Car $\forall k \geq 1 \quad \int_{k-1}^{k} f \leq f(k) \leq \int_{k}^{k+1} f \quad \leq \int_0^{n+1} f$

Ainsi : étant donné $\alpha > 0$: $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}_{S_n} \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - 1$

et donc $S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Ex : Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S_n$, $H_{2n+1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$

$$= H_{2N+1} - H_N = \log(2n+1) - \log(n) + o(1)$$
$$= \log(2 + \tfrac{1}{n}) + o(1)$$
$$= \log 2 + o(1)$$

II variation bornée (HP)

HUGE STUCE

Th. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{C})$. On suppose $\int_0^{\infty} |f'|$ converge (ie f' est sommable) alors on a l'équivalence entre
$\sum f(n)$ CV
$\iff$
$\int_0^{+\infty} f(x)$ CV

S/ (II) (I important). On utilise le "mini-Euler-Mac-Laurin"

$$\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n)) \underbrace{dt}_{d(t-(n+1))} = \overbrace{\Big[(t-(n+1))(f(t)-f(n))\Big]_n^{n+1}}^{0} - \int_n^{n+1} (t-(n+1)) f'(t) dt$$

$$\left| \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n) \right| = \left| \int_n^{n+1} (t-(n+1)) f'(t)\, dt \right| \leq \int_n^{n+1} |t-(n+1)| |f'(t)| dt$$
$$\leq \int_n^{n+1} |f'| = \omega_n$$

f' intégrable $\Rightarrow \sum \omega_n$ CV $\Rightarrow \sum v_n$ est ACV

$$\text{On } \underbrace{\sum_{n=0}^{N} v_n}_{ACV} = \underbrace{\int_1^{n+1} f}_{\text{CV par hyp}} - \sum_{n=0}^{N} f(n) \quad \Big| \quad \sum_{n=0}^{N} f(n) \text{ est CV}$$

(11) Avec ce qui précède $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f$ CV lorsque $n \to +\infty$

← donc $\int_0^n f$ converge, mais tends vers L

Pommelet "c'est là où on peut voir apparaître l'examinateur méchant"

Soit $\varepsilon > 0$ Par CV $\int_0^{\infty} |f'|$ il existe N tq $\int_N^{+\infty} |f'| < \varepsilon$

On peut imposer $\forall n \geq N$, $\left|\int_0^n f - L\right| \leq \varepsilon$

Pour $x \geq N$ et $n = \lfloor x \rfloor$ il vient

$$\left|\int_0^x f - L\right| \leq \left|\int_0^x f - \int_0^n f\right| + \left|\int_0^n f - L\right| \leq \left|\int_n^x f\right| + \varepsilon$$

Pour conclure $\int_0^{+\infty} |f'|$ CV $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f'$ CV $\Rightarrow \exists \lim_{+\infty} f$

or $\sum f(x)$ CV donc $f(x) \to 0$

$\lim_{+\infty} f = 0$

On peut aussi supposer $\forall t \geq N$ $|f(t)| \leq \varepsilon$

donc $\left|\int_n^x f(t)\,dt\right| \leq (x-n)\varepsilon \leq \varepsilon$

FIN : $\left|\int_0^x f - L\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Ex : $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$: $f(x) = \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}$, $f'(x) = \frac{i e^{i\sqrt{x}}}{2x^{3/2}} - \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x^2}$

donc $|f'| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

$\int_0^{+\infty} |f'|$ CV

on regarde $\int_1^x \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t}\,dt \overset{t=u^2}{=} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{iu}}{u^2}\, 2u\,du$

$= \underbrace{\int_1^{\sqrt{x}} \frac{2e^{iu}}{u}\,du}_{CV\ (IPP)}$

(CC) La série CV

Ex : $\sum \frac{\sin(\log n)}{n^\alpha}$ $\quad \sin(\log n) \not\to 0$ car $\sin(\log 2^n) = \sin(n \log 2)$

$\alpha \leq 0$ $\quad (|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}| = |e^{i\theta} - 1| > 0)$

donc $\sum \frac{\sin(\log n)}{n^\alpha}$ DV

$\alpha > 1$ $\quad |u_n| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, $\beta \in]1, \alpha[$

$\alpha \in]0,1]$ $\quad f(x) = \frac{\sin \log x}{x^\alpha}$, $f'(x) = \frac{\cos \log x}{x^{\alpha+1}} - \frac{\alpha \sin \log x}{x^{\alpha+1}}$

$|f'(x)| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$ $\quad \int_0^{+\infty} |f'(x)|$ CV

$\boxed{\alpha = 1}$ $\quad \int_1^x \frac{\sin(\log t)}{t}\,dt = \left[-\cos(\log(t))\right]_1^x$

diverge en $+\infty$, la série DV

$\boxed{0 < \alpha < 1}$ On s'intéresse, pour $p \in \mathbb{N}^*$, à

$A_p = \{ n \in \mathbb{N} \mid 2p\pi + \pi/4 \leq \log n \leq 2p\pi + 3\pi/4 \}$

$e^{2p\pi} e^{\pi/4} \leq n \leq e^{2p\pi} e^{3\pi/4}$

$|A_p| \sim \underbrace{C}_{>0} e^{2p\pi}$, si $n \in A_p$, $\frac{\sin(\ln n)}{n^\alpha} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n^\alpha}$

$$\sum_{n \in A_p} u_n \geq |A_p| \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{e^{\frac{3\alpha\pi}{4}} (e^{2p\pi})^\alpha}$$

il existe $C' > 0$ tq $\forall p$ $\sum_{n \in A_p} u_n \geq C' e^{2p\pi} \frac{1}{(e^{2p\pi})^\alpha} \xrightarrow[(\alpha < 1)]{} +\infty$