CHAPITRE 11.1

Espaces vectoriels normés et espaces métriques

I Espaces vectoriels normés

Dans toute cette partie, on considère $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Définition I.1.

Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes.

(N_1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)

(N_2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (homogénéité)

(N_3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Vocabulaire : une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant (2) et (3) est appelée semi-norme.

Proposition I.2.

1. Si $x \neq 0$, $N(x) > 0$ et $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N(\lambda x) = 1 \iff |\lambda| = \frac{1}{N(x)} \iff \lambda \in \left\{-\frac{1}{N(x)}, \frac{1}{N(x)}\right\}$$

   L'espace $\mathbb{R}x$ contient donc deux vecteurs unitaires.
3. Pour tout $x \in E$, $N(x) = 1 \Longrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R},\ N(e^{i\theta}x) = 1$
4. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i)$

Exemples : voici quelques normes usuelles pour $E = \mathbb{K}^n$. On pose pour tout $x \in E$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

→ $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

→ $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

→ $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

→ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Remarque : la sous-additivité pour la norme $\|.\|_2$ n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Exercice I.3.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|_p \longrightarrow \|x\|_\infty$ lorsque p tends vers l'infini.

(cc) BY-NC-SA

Exemples : pour $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

→ $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

→ $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$

→ $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

→ Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$

Exemples : quelques sous espaces normés de l'espace des suites

→ $E = l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N},\ u_n \text{ est bornée}\}$, muni de $\|(u_n)\|_\infty = sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

→ $E = \mathcal{C}_0(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N},\ u_n \longrightarrow 0\}$ muni de $\|.\|_\infty$

→ Pour $p \geq 1$, $l^p(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \text{ converge}\}$

Remarque : on a les inclusions suivantes

→ $\mathcal{C}_0(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$
En effet, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ pour lequel pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max\{1, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|\}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

→ $l^1(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$
En effet, si on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ alors $u_n \longrightarrow 0$, et alors à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 1$ et alors $|u_n|^2 \leq |u_n|$. On trouve donc immédiatement que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ implique celle de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

II Géométrie

Définition II.1.

Une partie A de E est dite convexe si pour tout $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

Exercice II.2.

Montrer que tout sous espace affine de E (i.e. les ensembles de la forme $a + F$ avec $a \in E$ et F sous espace vectoriel de E) est convexe.

Remarque : la boule unité fermée de E, $B_f(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est convexe.
En effet, si $x, y \in B_f(0,1)$, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_f(0,1)$.

Exercice II.3.

Soit $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie (N_1) et (N_2). Soit $A = \{x \in E,\ N(x) \leq 1\}$. Montrer que si A est convexe, alors N vérifie (N_3).

(cc) BY-NC-SA

Exercice II.4.

Soit $\|.\|$ une norme sur E. Montrer que pour tous $x, y \in E \setminus \{0\}$

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\max(\|x\|, \|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

Exercice II.5.

Une norme $\|.\|$ sur E est dite de somme stricte lorsque pour tous $x, y \in E$

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longrightarrow (x, y) \text{ est liée}$$

1. Parmi les normes suivantes, lesquelles sont de somme stricte ?
   (a) $\|.\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 2$ et $p \in \{1, 2, \infty\}$.
   (b) $\|.\|_p$ sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec $p \in \{1, 2, \infty\}$.
2. Soit $\|.\|$ une norme sur E. Soit $x, y \in E$. Montrer que si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x+y\| = 2$, alors $[x, y] \subset S(0,1) = \{x \in \mathbb{E},\ \ \|x\| = 1\}$.
3. Montrer l'équivalence

$$\|.\| \text{ est stricte sur } E \Longleftrightarrow S(0,1) \text{ ne contient pas de segment non trivial}$$

III Espaces metriques

Définition III.1.

Soit X un ensemble. On dit qu'une application $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur X lorsqu'elle vétifie les propriétés suivantes

(D_1) $\forall (x, y) \in X^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

(D_2) $\forall (x, y) \in X^2$ $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)

(D_3) $\forall (x, y, z) \in X^3$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Exemple 1 : soit $\|.\|$ une norme sur E. On appelle distance induite par $\|.\|$ sur E l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$.
La distance induite définit bien une distance. En effet, il est facile de montrer les implications suivantes :

$\to$ $(N_1) \Longrightarrow (D_1)$

$\to$ $(N_2) \Longrightarrow (D_2)$

$\to$ $(N_3) \Longrightarrow (D_3)$

Exemple 2 : on considère le cas où $X = l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. L'application $d : ((x_n), (y_n)) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ définit bien une distance sur X.

(cc) BY-NC-SA

Proposition III.2.

Soit X une espace metrique et $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ une distance sur X. d vérifie les propriétés suivantes

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$
2. $\forall (x, y, z) \in X^3$, $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$

Preuve

1. Il s'agit d'une simple récurrence. L'initialisation ($n = 2$) correspond à la propriété (D_3).
   Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n,\ d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$
   Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$, on a
   $$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$$
   On en déduit donc immédiatement le résultat voulu.
2. Soit $(x, y, z) \in X^3$, il s'agit de montrer que
   (a) $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$
   (b) $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$
   Le point (a) est équivalent à $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, ce qui est vrai d'après (D_3). On peut dire la même chose du point (b).

IV Boules ouvertes, fermés, sphères ...

Dans toute la suite X est espace metrique muni d'une distance d.

Définition IV.1.

Soit $(a, r) \in X \times]0, +\infty[$. On appelle boule ouverte de centre a et rayon r l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in X,\ d(x, a) < r\}$$

De même, on appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in X,\ d(x, a) \leq r\}$$

On appelle aussi sphère de centre a et de rayon r l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in X,\ d(x, a) = r\}$$

Exemple : En espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$, lorsqu'on prend d égal à la distance induite par la norme, ces ensembles s'écrivent :

→ $B(a, r) = \{x \in X,\ \|x - a\| < r\}$

→ $B_f(a, r) = \{x \in X,\ \|x - a\| \leq r\}$

(cc) BY-NC-SA

→ $S(a,r)=\{x\in X,\ \ \|x-a\|=r\}$

Définition IV.2.

Soit $A\subset X$. On appelle distance induite sur A la restriction de d à A^2. Cette distance est notée d_A.

Notation : En remplacant la distance d par d_A dans les définitions d'une boule et d'une sphère, pour $(a,r)\in A\times\mathbb{R}^+$

→ $B_A(a,r)=\{x\in A,\ d_A(x,a)<r\}=B(a,r)\cap A$

→ $B_{fA}(a,r)=\{x\in A,\ d_A(x,a)\leq r\}=B_f(a,r)\cap A$

→ $S_A(a,r)=\{x\in A,\ d_A(x,a)=r\}=S(a,r)\cap A$

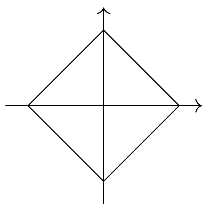
Exemples :

→ Pour $X=\mathbb{R}$, $A=[0,1]$ et d la distance induite par la valeur absolue, $B_A(1,\frac{1}{2})=]\frac{1}{2},1]$.

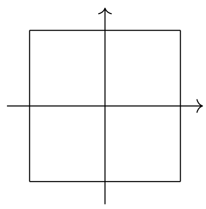
→ Pour $X=\mathbb{C}$, $A=S(0,1)$ et d la distance induite par le module, $B_A(i,1)=\{e^{i\theta},\ \theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]\}$.

Dessins en espace vectoriel normé : voici des dessins de la boule unité $B_f(0,1)$ pour quelques exemples de X.

$X=\mathbb{R}^2$ et d la distance induite par $\|.\|_1$



$X=\mathbb{R}^2$ et d la distance induite par $\|.\|_\infty$



Proposition IV.3.

Lorsque X est un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$ et de la distance induite par cette norme, on a les égalités suivantes pour tout $(a,r)\in X\times\mathbb{R}_+^*$

1. $B(a,r)=a+B(0,r)=a+rB(0,1)$
2. $B_f(a,r)=a+B_f(0,r)=a+rB_f(0,1)$

Preuve : nous allons montrer le point (1). La preuve du point 2 est identique : il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.
Soit $(a,r)\in X\times\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} x\in B(a,r) &\iff \|x-a\|<r \\ &\iff \left\|\frac{1}{r}(x-a)\right\|<1 \\ &\iff \frac{1}{r}(x-a)\in B(0,1) \\ &\iff x\in a+rB(0,1) \end{aligned}$$

(cc) BY-NC-SA

V Bornitude

Proposition V.1.

Soit A une partie de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\{d(x,y),\ (x,y) \in A^2\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^+$.
2. Il existe une boule ouverte de X qui contient A.
3. Pour tout $a \in X$, il existe r tel que $A \subset B(a,r)$.

Si A vérifie l'une de ces trois propriété, on dit que A est borné et on note

$$diam(A) = \sup\{d(x,y),\ (x,y) \in A^2\}$$

Preuve

→ (1) $\implies$ (2)
Soit $a \in A$. L'ensemble $D = \{d(x,y),\ (x,y) \in A^2\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure. On pose alors $r = 1 + \sup D$. Pour tout $x \in A$, $d(x,a) \leq \sup D < r$.
On en déduit donc que $A \subset B(a,r)$.

→ (2) $\implies$ (3)
Soit $B(b,\varepsilon)$ une boule qui contient A. Soit $a \in X$. On pose $r = \varepsilon + d(a,b)$.
Pour tout $x \in A$, on a $d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b) < \varepsilon + d(a,b) = r$. Donc $A \subset B(a,r)$.

→ (3) $\implies$ (1)
Soit $B(a,r)$ une boule qui contient A. Pour tout $(x,y) \in A^2$,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < 2r$$

L'ensemble D est alors majoré par $2r$.

Exercice V.2.

Soit E un espace vectoriel normé différent de $\{0\}$.

1. Montrer que pour tout $(a,r) \in E \times \mathbb{R}^+$, $diam(B(a,r)) = diam(B_f(a,r))$
2. Montrer que le rayon et le centre d'une boule ouverte ou fermée sont uniques.

Définition V.3.

Soit A une partie de X. On dit qu'une fonction $f : A \to X$ est bornée lorsque $f(A)$ est borné.

Notation : On désigne par $\mathcal{B}(A,X)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans X.

Définition V.4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée lorsque l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

BY-NC-SA

VI Suites dans un espace métrique et dans un espace vectoriel normé

Définition VI.1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. On dit que (u_n) converge lorsque

$$\exists l \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ d(u_n, l) \leq \varepsilon$$

Proposition VI.2.

On suppose que X est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$ et que d est la distance induite par cette norme.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans X.

1. Pour tout $(l,l') \in \mathbb{R}^2$, Si (u_n) converge vers l et l', alors $l = l'$.
2. pour tous $a, b, l, l' \in \mathbb{R}$, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$ alors $au_n + bv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} al + bl'$
3. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.

VII Algèbres normées

Définition VII.1.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble. On dit que $(\mathcal{A}, +, ., *)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre lorsque

→ $(\mathcal{A}, +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

→ $*$ est une loi de composition interne.

→ $*$ est bilinéaire.

Vocabulaire :

→ Si $*$ est associative, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre associative.

→ Si $*$ admet un élément neutre, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire.

Définition VII.2.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre munie d'une norme $\|.\|$. On dit que $\|.\|$ est une norme d'algèbre lorsque pour tous $(a,b) \in \mathcal{A}^2$

$$\|a * b\| \leq \|a\|\,\|b\|$$

Proposition VII.3.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre munie d'une norme d'algèbre $\|.\|$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{A}$. L'implication suivante est vraie

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \text{ et } b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b \implies a_n * b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a * b$$

(cc) BY-NC-SA

Preuve : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant les hypothèses. On a

$$\begin{aligned}\|a_n * b_n - a * b\| &= \|a_n * b_n - a * b_n + a * b_n - a * b\| \\ &\leq \|(a_n - a) * b_n\| + \|a * (b_n - b)\| \\ &\leq \|a_n - a\| \, \|b_n\| + \|a\| \, \|b_n - b\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Exercice VII.4.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre munie d'une norme d'algèbre $\|.\|$. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ non nilpotent, montrer que la suite $\left(\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

VIII Suites de fonctions

Dans toute cette partie, on considère A un ensemble et E un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$.

Définition VIII.1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans E. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente lorsque pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Vocabulaire : la fonction $f : x \mapsto \lim_n f_n(x)$ est appelée limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Exemple : On considère ici le cas où $A = [0,1]$, $E = \mathbb{R}$ et $(f_n) = (x \mapsto x^n)$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f qui est définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition VIII.2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans E. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente lorsqu'il existe une fonction f de A dans E telle que

$$\sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque : une formulation équivalente à la définition précédente est la suivante

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in A \;\; \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

La convergence uniforme implique évidemment la convergence simple, mais la réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction f définie juste avant la définition précédente, qui vaut 0 sont $[0,1[$ et 1 en 1. Mais f ne converge pas uniformément vers f car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| = 1$. Cette quantité ne peut donc pas tendre vers 0.

Proposition VIII.3.

On considère le cas où $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
Si (f_n) converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, alors on a

$$\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Preuve
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\, dt} \leq \sqrt{(b-a)\,\|f_n - f\|_\infty^2} = \sqrt{b-a}\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(cc) BY-NC-SA

Correction de l'exercice I.3. :

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Si $\|x\|_\infty = 0$, on a $x = 0$ et alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|x\|_p = 0$. La proposition qu'on veut démontrer est donc vraie. Supposons donc à présent que $\|x\|_\infty > 0$. On pose $r = |\{i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \|x\|_\infty\}|$ Quitte à permuter les x_i, on suppose sans perte de généralité que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = \|x\|_\infty$ et pour tout $k \geq r+1$, $|x_k| < \|x\|_\infty$.
On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_\infty \left(r + \sum_{k=r+1}^n \left|\frac{x_k}{\|x\|_\infty}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Pour tout $k \geq r+1$, $\left|\frac{x_k}{\|x\|_\infty}\right| \in [0,1[$, donc $\left|\frac{x_k}{\|x\|_\infty}\right|^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. On a alors

$$r + \sum_{k=r+1}^n \left|\frac{x_k}{\|x\|_\infty}\right|^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} r$$

Or

$$\|x\|_p = \|x\|_\infty \left(r + \sum_{k=r+1}^n \left|\frac{x_k}{\|x\|_\infty}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \left[\|x\|_\infty, n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty\right]$$

et finalement, par le lemme des gendarmes

$$\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$$

Correction de l'exercice II.2. :

Soit F un sous espace vectoriel de E et $a \in E$. On pour $F' = a + F$. Soit $x, y \in F'$ et $\lambda \in [0,1]$. Par définition, il existe $u, v \in F$ tels que $x = a + u$ et $y = a + v$. On a alors

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda a + \lambda u + (1-\lambda) a + (1-\lambda) u \\ &= a + \underbrace{\lambda u + (1-\lambda) v}_{\in F} \in F'\end{aligned}$$

Correction de l'exercice II.3. :

Supposons que A est convexe. Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{N(x)}$ et $\frac{y}{N(y)}$ sont deux éléments de A, donc en posant $\lambda = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)} \in [0,1]$ on a

$$N\left(\lambda \frac{x}{N(x)} + (1-\lambda)\frac{y}{N(y)}\right) \leq 1$$

Or

$$\begin{aligned}N\left(\lambda \frac{x}{N(x)} + (1-\lambda)\frac{y}{N(y)}\right) &= N\left(\frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)}\right) \\ &= \frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)}\end{aligned}$$

(cc) BY-NC-SA

On en déduit donc finalement que

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

On a donc montré la propriété (N_3) pour N.

Correction de l'exercice II.4. :

Quitte à permuter x et y supposons que $\max(\|x\|, \|y\|) = \|x\|$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\max(\|x\|, \|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| &= \frac{1}{2\|y\|}\left\|\|y\|x - \|x\|y\right\| \\
&= \frac{1}{2\|y\|}\left\|\|y\|x - \|y\|y + \|y\|y - \|x\|y\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\|y\|}\left(\left\|\|y\|x - \|y\|y\right\| + \left\|\|y\|y - \|x\|y\right\|\right) \\
&= \frac{1}{2\|y\|}(\|y\|\|x-y\| + \|y\|\,|\|x\| - \|y\||) \\
&\leq \frac{1}{2\|y\|}(\|y\|\|x-y\| + \|y\|\|x-y\|) \\
&= \|x-y\|
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice II.5. :

1. Nous allons séparer les cas $p=1$, $p=2$ et $p=\infty$.
   (a) Mettons nous sur $\mathbb{K}^n$
      → Si $p=\infty$, la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas de somme stricte.
      En effet, il suffit de considérer le cas $n=2$ pour voir que ce n'est pas le cas :

$$\|(1,0)+(1,1)\|_\infty = 2 = \|(1,0)\|_\infty + \|(1,1)\|_\infty$$

      mais $((1,0),(1,1))$ n'est pas liée.
      → Si $p=1$, la norme $\|.\|_1$ n'est pas de somme stricte.
      En effet, il suffit de considérer le cas $n=2$ pour voir que ce n'est pas le cas :

$$\|(1,0)+(0,1)\|_1 = 2 = \|(1,0)\|_1 + \|(0,1)\|_1$$

      mais $((1,0),(0,1))$ n'est pas liée.
      → Si $p=2$, la norme $\|.\|_2$ est de somme stricte.
      En effet, si on considère $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 &\iff \|x+y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\
&\iff \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^n x_k y_k = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&\iff \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)}
\end{aligned}$$

      La dernière ligne implique le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (il suffit de majorer la somme des $x_k y_k$ par la somme des $|x_k y_k|$, qui est équivalent au fait que (x,y) soit liée.

(cc) BY-NC-SA

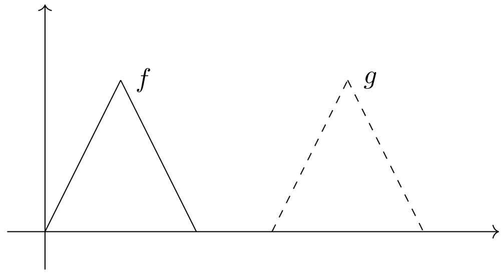
(b) Mettons nous sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

→ Si $p=\infty$, la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas de somme stricte.
En effet, il suffit de considérer les deux fonctions continues sur $[0,1]$ $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto 1$.

$$\|f+g\|_\infty = 2 = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

alors que (f,g) n'est pas liée.

→ Si $p=1$, la norme $\|.\|_1$ n'est pas de somme stricte.
En effet, il suffit de prendre f et g respectivement décrites par les courbes ci dessous.



Il est clair que

$$\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

alors que (f,g) n'est pas liée.

→ Si $p=2$, la norme $\|.\|_2$ est de somme stricte.
En effet, si on considère $f,g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2 &\iff \|f+g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \\ &\iff \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_0^1 f(t)g(t)dt = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|\,\|g\| \\ &\iff \int_0^1 f(t)g(t)dt = \sqrt{\left(\int_0^1 f(t)^2dt\right)\left(\int_0^1 g(t)^2dt\right)}\end{aligned}$$

La dernière ligne implique le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (il suffit de majorer l'intégrale de fg par l'intégrale de $|fg|$), qui est équivalent au fait que (f,g) soit liée.

2. Soit $x,y \in E$ vérifiant $\|x+y\| = 2$ et $\|x\| = \|y\| = 1$.
Soit $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\underbrace{\|\lambda x + (1-\lambda)y\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|(1-\lambda)x + \lambda y\|}_{\leq 1} \geq \|x+y\| = 2$$

Donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\| = 1$$

et finalement $[x,y] \subset S(0,1)$.

3. $(\Longrightarrow)$ Supposons que $\|.\|$ est stricte.
Soit $x,y \in S(0,1)$. Supposons que $[x,y] \subset S(0,1)$. On a

$$\left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\| = 1 = \left\|\frac{1}{2}x\right\| + \left\|\frac{1}{2}y\right\|$$

Donc (x,y) est liée et x et y sont de même norme, pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, deux cas se présentent

→ $x=-y$ ce qui donne $\left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\| = 0$, chose qui n'est clairement pas possible.

→ $x=y$ et donc le segment $[x,y]$ est trivial.

(cc) BY-NC-SA

On en déduit alors immédiatement que $S(0,1)$ ne contient aucun segment non trivial.
($\Longleftarrow$) Nous allons procéder par contraposée. Supposons que $\|.\|$ est non stricte, i.e. il existe (x,y) libre telle que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
On suppose sans perte de généralité de que $\|x\| \leq \|y\|$. On a

$$\begin{aligned} 2 \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|x\|}(\|x\| + \|y\|) - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc $\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2$ et $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in S(0,1)$. On en déduit d'après la question précédente que $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subset S(0,1)$. Ce segment est non trivial puisque (x,y) est libre.
$S(0,1)$ contient donc bien un segment non trivial.

Correction de l'exercice V.2. :

1. Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}^+$. On sait déjà que $diam(B(a,r)) \leq 2r$ et $diam(B_f(a,r) \leq 2r$ (il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire).
   Comme $E \neq \{0\}$, on peut considérer $u \in X$ tel que $\|u\| = 1$. On pose alors
   $$x = a + ru \in B_f(a,r) \text{ et } y = a - ru \in B_f(a,r)$$
   On a donc $\|x - y\| = 2r$ ce qui donne $diam(B_f(a,r)) = 2r$.
   De même, on pose $(r_n)_{n\geq N} = (r - \frac{1}{n})_{n\geq N}$ avec N assez grand pour qu'on ait $r - \frac{1}{N} \geq 0$ et
   $$x_n = a + r_n u \in B(a,r) \text{ et } y_n = a - r_n u \in B(a,r)$$
   On a alors $\|x_n - y_n\| = 2r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2r$. La suite $(\|x_n - y_n\|)_{n\geq N}$ est à valeurs dans $\{\|x-y\|\,,\ (x,y) \in E^2\}$ qui est majoré par $2r$, donc $diam(B(a,r)) = 2r$.
2. L'unicité du rayon d'une boule vient tout simplement de la question précédente. En effet, en espace vectoriel normé, on peut définir de manière unique le rayon d'une boule fermée ou ouverte comme le diamètre de la boule. Il reste donc à montrer l'unicité du centre. Nous allons le faire pour le cas d'une boule fermée. Le cas d'une boule ouvert peut être traité de la même manière.
   Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}^+$. On suppose que $b \in E$ est aussi un centre de $B_f(a,r)$ tel que $b \neq a$. on a alors pour tout $x \in B_f(a,r)$, $\|x - b\| < r$ et $\|x - a\| < r$. Posons $v = \frac{a-b}{\|a-b\|}$. On a $a - rv \in B_f(a,r)$, donc
   $$\begin{aligned} r \geq \|a - rv - b\| &= \left\| \left(\frac{r}{\|a-b\|} + 1\right)(a-b) \right\| \\ &= r + \|a - b\| \end{aligned}$$
   donc $\|a - b\| = 0$ ce qui est absurde. On a donc bien l'unicité du centre.

Correction de l'exercice VII.4. :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}}$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\|a^{n+m}\| \leq \|a^n\|\,\|a^m\|$. Donc si on pose pour tout n, $v_n = \log \|a^n\|$, on a pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+m} \leq v_n + v_m$.
Posons également pour tout n, $u_n = \log(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})$. On a alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous additive et pour tout n, $u_n = \frac{v_n}{n}$. Donc d'après le théorème de Fekete (hors programme, mais très classique)

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{k\in\mathbb{N}^*} u_k = \alpha$$

(cc) BY-NC-SA

et finalement

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha}$$

Remarque : ici, on suppose implicitement par convention que $e^{-\infty} = 0$.

*   *

*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 17/11/2021 pour cpge-paradise.com.

Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.

(cc) BY-NC-SA