CHAPITRE 11.2

Ouverts et fermés

Dans tout le chapitre, on considère X un espace metrique muni d'une distance d.

I Ouverts

Définition I.1.

Soit O un sous ensemble de X. On dit que O est ouvert lorsque

$$\forall a \in O,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset O$$

Exemples

→ $\varnothing$ et les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

→ $\mathbb{R}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{C}$.

Proposition I.2.

Soit I un ensemble et $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X.

1. $\varnothing$ et X sont des ouverts de X.
2. $\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouvert.
3. Si I est fini, alors $\bigcap_{i\in I} O_i$ est ouvert.

Preuve

1. La proposition est évidente par définition.
2. Soit $a \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. $\bigcup_{i\in I} O_i$ est donc bien ouvert.
3. Supposons que I soit fini. Soit $a \in \bigcap_{i\in I} O_i$. On a alors pour tout $i \in I$, il exsite $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset O_i$. I est fini, donc on peut définir $r = \min\{r_i\}_{i\in I} > 0$. Par construction, on a bien $B(a,r) \subset \bigcap_{i\in I} O_i$. $\bigcap_{i\in I} O_i$ est donc bien ouvert.

Attention : si I est infini, $\bigcap_{i\in I} O_i$ n'est pas forcément ouvert. En effet, si on prend $I = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in I$, $O_k =]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}[$. On a $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[= \{0\}$ qui n'est pas ouvert.

Définition I.3.

Soit $a \in X$. Une partie U de X est appelée voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.

Remarque : un ouvert est voisinage de tous ses points.
Exemple : Pour tout $(b,r) \in X \times \mathbb{R}_+^*$, $B(b,r)$ est un ouvert.
Montrons ce résultat. Soit $a \in B(b,r)$. Posons $\varepsilon = r - d(a,b)$. On a alors pour tout $x \in B(a,\varepsilon)$,

$$d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b) < \varepsilon + d(a,b) = r$$

donc $B(a,\varepsilon) \subset B(b,r)$. On en déduit donc que $B(b,r)$ est ouvert.

Proposition I.4.

Soit $a \in X$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

1. Si $U \in \mathcal{V}(a)$ et $U \subset V$, alors $V \in \mathcal{V}(a)$.
2. L'intersection d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{V}(a)$ appartient à $\mathcal{V}(a)$.
3. Si $a \neq b$, alors il existe $(U,V) \in \mathcal{V}(a) \times \mathcal{V}(b)$ tel que $U \cap V = \varnothing$.

Preuve

1. Soit U voisinage de a et V un ensemble contenant U. U étant un voisinage de a, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U \subset V$. Donc V est aussi un voisinage de a.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $V_1, \ldots, V_p \in \mathcal{V}(a)$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset V_i$. On pose $r = \min\{r_1, \ldots, r_p\} > 0$. On a alors $B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{p} V_i$, donc $\bigcap_{i=1}^{p} V_i \in \mathcal{V}(a)$.
3. Soit $r = \frac{d(a,b)}{10}$. Prenons $U = B(a,r)$ et $V = B(b,r)$. Si $x \in U \cap V$, alors $d(x,a) < r$ et $d(x,b) < r$. En sommant les deux inégalités, on obtient

$$d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) < 2r = \frac{d(a,b)}{5}$$

ce qui est impossible. On en déduit donc que $U \cap V = \varnothing$.

II Fermés

Définition II.1.

Soit F une partie de X. On dit que F est fermé si $X \setminus F$ est ouvert.

Exemples

- → Si $a \leq b$, alors $[a,b]$ est un fermé.
- → Pour tout $(b,r) \in X \times \mathbb{R}^+$, $B_f(b,r)$ est fermé.
  En effet, si on prend $a \in X \setminus B_f(b,r)$, on peut considérer $\varepsilon = \frac{d(a,b)-r}{2} > 0$ (ε est non nul car sinon on aurait $a \in B_f(b,r)$). Si $x \in B(a,\varepsilon)$, alors $d(x,b) \geq d(a,b) - d(x,a) \geq \frac{d(a,b)+r}{2} > r$ donc $B(a,\varepsilon) \subset X \setminus B_f(b,r)$ et alors $B_f(b,r)$ est fermé.
- → Une réunion finie de points est un fermé.

Proposition II.2.

Soit F une partie de X. F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F, si (x_n) est convergente, alors sa limite est dans F.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que F soit fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F convergente, supposons que la limite l de (x_n) est dans $X \setminus F$. $X \setminus F$ étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset X \setminus F$. Or par construction, il exsite $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $x_n \in B(l, \varepsilon) \subset X \setminus F$ ce qui est absurde.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que toute suite à valeurs dans F convergente converge dans F. supposons de plus que F n'est pas fermé, i.e. $X \setminus F$ n'est pas ouvert. Il existe donc $a \in X \setminus F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \notin X \setminus F$ i.e. $B(a, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing$. Cette propriété étant vraie pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(a, x_n) \leq \frac{1}{n}$. (x_n) est à valeurs dans F et converge vers a qui n'est pas dans a, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Proposition II.3.

1. X et $\varnothing$ sont fermés dans X.
2. Soit I un ensemble. Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de X, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.
3. Si I est fini, alors $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Preuve : pour montrer ces trois propriétés, il suffit de montrer que les complémentaires de ces ensembles sont ouverts en utilisant les propriétés vu sur les ouverts au début du chapitre.

Exercice II.4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est fermé.

Exercice II.5.

Soit $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de $\|.\|_1$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $A = \{(u_n) \in E^{\mathbb{N}},\ u_0 \neq 0, \dots, u_N \neq 0\}$ est ouvert.

Exercice II.6.

Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $O = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ et $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\}$.

1. O est il ouvert pour la distance induite par $\|.\|_\infty$? $\|.\|_1$?
2. F est il fermé pour la distance induite par $\|.\|_\infty$? $\|.\|_1$?

III Topologie induite

Dans cette partie on considère A une partie de X et on considère d_A la restriction de d à A^2. (A, d_A) ainsi défini est un espace metrique, et pout tout $(a, r) \in A \times \mathbb{R}^+$, $B_{d_A}(a, r) = B(a, r) \cap A$.

Proposition III.1.

1. Une partie O de A est ouverte pour d_A si et seulement si il existe $\Omega \subset X$ ouvert tel que $O = A \cap \Omega$.
2. Une partie F de A est fermée pour d_A si et seulement si il existe $G \subset X$ fermé tel que $F = A \cap G$.

Preuve

1. ($\Leftarrow$) Soit $a \in A \cap \Omega$. Puisque Ω est ouvert dans X, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Donc $B_{d_A}(a, r) = B(a, r) \cap A \subset \Omega \cap A$. $O = A \cap \Omega$ est donc ouvert.
   ($\Rightarrow$) Soit $a \in O$. Il exsite $r_a > 0$ tel que $B_{d_A}(a, r_a) \subset O$. On a donc
   $$O = \bigcup_{a \in O} B_{d_A}(a, r_a) = \bigcup_{a \in O} (B(a, r_a) \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{a \in O} B(a, r)\right)}_{\Omega} \cap A$$
   Ω est une union d'ouverts, donc est un ouvert de X, ce qui nous permet de conclure.
2. Il suffit d'utiliser le résultat précédent en passant au complémentaire.

   ($\Leftarrow$) Si $F = A \cap G$, alors $A \setminus F = A \cap \underbrace{(X \setminus G)}_{\Omega}$. Ω est ouvert, donc en appliquant la propriété précédente, $A \setminus F$ est ouvert pour d_A et donc F est fermé pour d_A.
   ($\Rightarrow$) Si F est fermé pour la distance d_A, alors $A \setminus F$ est ouvert pour cette distance. D'après ce qui précéde, il exsite Ω un ouvert de X tel que $A \setminus F = \Omega \cap A$, ce qui donne $F = A \setminus (\Omega \cap A) = A \cap \underbrace{(X \setminus \Omega)}_{G}$.

   G est un fermé de X, ce qui nous permet de conclure.

Conséquences

→ Tout ouvert de A est ouvert dans X si et seulement si A est ouvert dans X

→ Tout fermé de A est fermé dans X si et seulement si A est fermé dans X.

IV Intérieur

Définition IV.1.

Soit A une partie de X. On dit que le point $a \in A$ est intérieur à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$ (i.e. $A \in \mathcal{V}(a)$). On note $\mathring{A}$ ou $Int(A)$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemples

→ Dans $\mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$ car $R \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

→ Dans $\mathbb{C}$, $\mathring{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Proposition IV.2.

Soit A une partie de X. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Preuve : Si $a \in \mathring{A}$, alors il exsite $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$. $B(a, \varepsilon)$ est ouvert, donc pour tout $b \in B(a, \varepsilon)$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(b, \eta) \subset B(a, \varepsilon) \subset A$. b est donc un élément de $\mathring{A}$ et alors $B(a, \varepsilon) \subset \mathring{A}$. On peut donc conclure que $\mathring{A}$ est ouvert. Le fait que A soit le plus grand ouvert inclus dans A découle du fait que tout point appartenant à un ouvert inclus dans A est dans $\mathring{A}$ par définition de l'intérieur de A.

Exercice IV.3.

Soient A et B deux parties de X. Dans chaque cas, comparer les deux ensembles.

1. $Int(A \cap B)$ et $Int(A) \cap Int(B)$.
2. $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.

Exercice IV.4.

Soit E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$. Soit $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$Int(B_f(a, r)) = B(a, r)$$

Attention : cette propriété n'est pas toujours vraie quand on est pas dans le cadre d'expaces vectoriels normés. Par exemple, pour $X = \mathbb{Z}$ et d la distance induite par la valeur absolue, on a

→ $B_f(0, 1) = \{-1, 0, 1\}$

→ $B(0, 1) = \{0\} \neq Int(B_f(0, 1)) = \{-1, 0, 1\}$

V Adhérence

Définition V.1.

Soit $b \in X$. On dit que b est adhérent à A lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(b, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Proposition V.2.

Soit A une partie de X. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $\overline{A}$ est fermé.
2. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
3. $X \setminus \overline{A} = Int(X \setminus A)$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} &\iff \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing \\ &\iff \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A \\ &\iff x \in Int(X \setminus A) \end{aligned}$$

Ceci montre le point 3 et le point 1 car $Int(X \setminus A)$ est ouvert. Montrons le deuxième point.
Soit B un fermé contenant A. $X \setminus A$ contient $X \setminus B$ qui est ouvert. $Int(X \setminus A)$ étant le plus grand ouvert inclus dans $X \setminus A$, $X \setminus B \subset Int(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$ et finalement $\overline{A} \subset B$. $\overline{A}$ est donc bien le plus petit fermé contenant A.

Proposition V.3.

Soit $b \in X$ et A une partie de X. L'équivalence suivante est vraie.

$$b \in \overline{A} \iff \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$$

Preuve
($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. (a_n) est à valeurs dans A donc $B(b, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, donc $b \in \overline{A}$.
($\Rightarrow$) Soit $b \in \overline{A}$. On va construire la suite (a_n) par récurrence. On prend a_0 égal à n'importe quel élément de X. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_0, \dots, a_n$ bien définis. b étant adhérent à A, on a $B(b, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \varnothing$. On peut donc prendre $a_{n+1} \in B(b, \frac{1}{n+1}) \cap A$. On a alors par construction,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(a_n, b) \leq \frac{1}{n} \text{ et } (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$$

et alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Corollaire V.4.

Soit $A \subset X$. L'équivalence suivante est vraie

$$A \text{ fermé } \iff (\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \implies l \in A)$$

Preuve : d'après ce qui précède, on a

$$A \text{ fermé } \iff A = \overline{A} \iff (\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \implies l \in A)$$

Exercice V.5.

Trouver un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Exercice V.6.

Soit E un espace vectoriel normé et $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$$

Exercice V.7.

Soit C un partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\overline{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes.
2. Soit $a \in \mathring{C}$ et $b \in \overline{C}$. Montrer que $[a, b[\subset \mathring{C}$.

Exercice V.8.

On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1]\ f(x) \geq 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé pour $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$.
2. Donner $\mathring{F}$ pour $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$.

VI Densité

Définition VI.1.

Soient A et B deux parties de X. On dit que B est dense dans A lorsque $A \subset \overline{B}$. De même, on dit que B est partout dense dans X lorsque $\overline{B} = X$.

Exemples

→ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ pour les normes usuelles ($\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$, $\ldots$).

Proposition VI.2.

Soient A et B deux parties de X. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. B est dense dans A
2. Pour tout élement $a \in A$, il existe une suite (b_n) à valeurs dans B qui converge vers a.
3. Pour tout $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ tel que $b \in B(x, \varepsilon)$.

Remarque : Ces caractérisations de la densité sont quelques fois plus commode à utiliser en exercice.

Proposition VI.3.

La propriété de densité est transitive, i.e. si A, B et C sont trois parties de X et si B et dense dans A et C est dense dans B alors C est dense dans A.

Exemple : si E est un espace vectoriel normé et F est un sous espace stricte de E (i.e. $F \neq E$), alors $E \setminus F$ est dense dans E.
Montrons ce résultat. Soit $x \notin F$ et $a \in F$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $a + \varepsilon \frac{x}{2\|x\|} \in F \setminus E$ (car sinon, on aurait $a + \varepsilon \frac{x}{2\|x\|} - a \in F$, i.e. $x \in F$). De plus $a + \varepsilon \frac{x}{2\|x\|} \in B(a, \varepsilon)$ et alors $B(a, \varepsilon) \cap (E \setminus F) \neq \varnothing$.
On a montré que $F \subset \overline{F \setminus E}$. On a aussi $E \setminus F \subset \overline{F \setminus E}$. On en déduit donc que $\overline{E \setminus F} = E$, i.e. $E \setminus F$ est dense dans E.

Remarque : le résultat montré ci dessus peut être aussi formulé de la manière suivante :

$$A \text{ est un sous espace vectoriel de } E \text{ et } \mathring{A} \neq \varnothing \iff A = E$$

ou encore :

Si F est un sous espace stricte d'un espace vectoriel normé E, alors F est d'intérieur vide

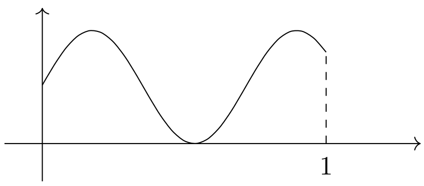
Cette propriété se voit facilement en dimension 3 par exemple. Un sous espace stricte de $\mathbb{R}^3$ est soit un plan, soit une droite, ou alors un point qui dans tous les cas sont d'intérieur vide.

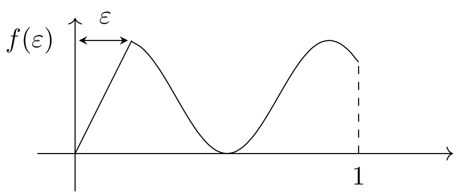
Conséquence : Si H est un hyperplan de E, alors soit H est fermé soit H est dense dans E.
En effet, on a $H \subset \overline{H} \subset E$ donc soit $H = \overline{H}$, i.e. H est fermé, soit $\overline{H} = E$, i.e. H est dense dans E.

Exemple : l'hyperplan $H = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$ n'est pas fermé pour la distance induite par $\|.\|_1$ car il est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
En effet, si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère $g \in H$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon} f(\varepsilon) & \text{si } x \in [0, \varepsilon[\\ f(x) & \text{si } x \in [\varepsilon, 1] \end{cases}$$

Pour montrer que cet exemple est naturel, voici un dessin de la courbe de g à droite et celle de f à gauche





Montrons que g est proche de f. On a

$$\begin{aligned} \|f - g\|_1 &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\varepsilon} |f(x) - g(x)| \, dx \leq 2 \|f\|_\infty \varepsilon \end{aligned}$$

donc quitte à remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$, on peut dire que $g \in B(f, \varepsilon)$ et donc H est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour la distance induite par $\|.\|_1$.

Exercice VI.4.

Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. On sote $A = \{x \in G, \ x > 0\}$.

1. Montrer que si $G \neq \{0\}$, alors A est non vide. On pose alors $a = \inf A$.
2. Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.
4. Application 1 : en utilisant ce qui précéde, montrer que $\{\cos n, \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
5. Application 2 : soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Montrer que f est constante.

Définition VI.5.

On dit que X est un espace séparable si et seulement si il existe un sous ensemble A de X dense dans X et dénombrable.

Exercice VI.6.

Montrer que X est séparable si et seulement si il existe une famillé dénombrable d'ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que pour tout ouvert O de X $\exists J \subset I$, $O = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$.

Définition VI.7.

Soit A une partie de X. Un point $a \in X$ est dit

→ isolé lorsque
$$\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$$

→ d'accumulation lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ (B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \varnothing$$

L'ensemble des points d'accumulation et isolés de A sont respectivement notés A^{ac} et A^{i}.

Notation : On note A^{aci} l'ensemble des points d'accumulation de A qui sont dans A.

Proposition VI.8.

Soit A une partie de X.

1. $A^{aci} \cup A^{i} = A$
2. $a \in A^{ac} \iff \forall \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \cap A$ est infini
3. $a \in A^{ac} \iff$ il existe une suite injective à valeurs dans A qui converge vers a

Preuve

1. En regardant les définitions d'un point isolé et d'un point d'accumulation, on peut aisément remarquer que le fait qu'un point soit isolé est exactement la négation du fait qu'un point soit d'accumulation, donc naturellement, un point a de A est soit d'accumulation, soit isolé, d'où le fait que $A^{aci} \cup A^{i} = A$.
2. ($\Rightarrow$) Supposons que $a \in A^{ac}$. Supposons de plus que $\exists \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A$ est fini. On pose donc $(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $\tilde{\varepsilon} = \min\{d(a,x_i),\ i \in [\![1;p]\!]\}$, il est facile de remarquer que $(B(a,\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}) \setminus \{a\}) \cap A = \varnothing$, ce qui est en contradiction avec le fait que a soit un point d'accumulation.
($\Leftarrow$) Si pour tout $\varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \cap A$ est infini, alors d'une manière évidente $(B(a,\varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} = (B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A$ est non vide, donc a est un point d'accumulation.
3. ($\Rightarrow$) Supposons que $a \in A^{ac}$, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A$ est infini.
Construisons une suite (x_n) qui vérifie la propriété voulue par récurrence. On définit x_0 comme un point pris au hasard dans A différent de a.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que x_n est bien défini. On prend alors x_{n+1} dans $B(a, \frac{1}{2}\min(\frac{1}{n+2}, d(a,x_n))) \cap A$ (c'est possible car cet ensemble est non vide). Par construction (x_n) est injective et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $d(x_n,a) \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, d'où le résultat voulu.
($\Leftarrow$) Supposons l'existence d'une telle suite qu'on note (x_n). Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $B(a,\varepsilon) \cap A$ est fini. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) = \{x_1, \ldots, x_p\}$. En posant $\tilde{\varepsilon} = \min\{d(a,x_i),\ i \in [\![1;p]\!]\}$, il est facile de remarquer que $(B(a,\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}) \setminus \{a\}) \cap A = \varnothing$, ce qui est absurde car pour n assez grand, x_n est dans $(B(a,\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}) \setminus \{a\}) \cap A$.

Proposition VI.9.

En dimension finie, tout ensemble borné infini admet un point d'accumulation.

Correction de l'exercice II.4. :

Soit $a \in X$. Le fait que a ne soit pas une valeur d'adhérence de (u_n) est équivalent au fait qu'il exsite $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \cap \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ soit fini. Soit $b \in B(a, \varepsilon)$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon - d(a,b)}{2}$. La boule $B(b, \eta)$ est incluse dans $B(a, \varepsilon)$ et donc $B(b, \eta) \cap \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini car inclus dans $B(a, \varepsilon) \cap \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Donc $b \in X \setminus Adh(u_n)$, et alors $B(a, \varepsilon) \subset X \setminus Adh(u_n)$ ce qui donne finalement que $X \setminus Adh(u_n)$ soit ouvert i.e. $Adh(u_n)$ est fermé.

Correction de l'exercice II.5. :

Soit $(u_n) \in A$. Posons $\varepsilon = \min\{|u_0|, \dots, |u_N|\}$. Montrons que $B((u_n), \frac{\varepsilon}{2}) \subset A$. Soit $(v_n) \in B((u_n), \frac{\varepsilon}{2})$. Pour tout $i \in [\![0; N]\!]$, on a

$$|u_i - v_i| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$0 < |u_i| - \frac{\varepsilon}{2} \leq |v_i|$$

ce qui nous donne que pour tout $i \in [\![0; N]\!]$, $v_i \neq 0$ et alors $(v_n) \in A$, donc $B((u_n), \frac{\varepsilon}{2}) \subset A$. A est donc ouvert.

Correction de l'exercice II.6. :

On se place dans l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

1. Etudions $O = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$.

   (a) O est ouvert pour la distance induite par $\|.\|_\infty$.
   En effet, si on considère $f \in O$, alors on a $\varepsilon = \min_{x \in [0,1]} f(x) > 0$.
   Soit $g \in B(f, \frac{\varepsilon}{2})$, alors

   $$\|g - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   et alors

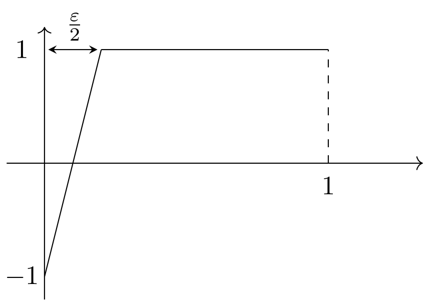
   $$\forall x \in [0,1],\ \ |g(x)| \geq |f(x)| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

   donc $g \in O$ et alors $B(f, \frac{\varepsilon}{2}) \subset O$. D'où le fait que O soit ouvert pour $\|.\|_\infty$.

   (b) O n'est pas ouvert pour la distance induite par $\|.\|_1$.
   Exhibons un contrexemple qui premet d'affirmer cela. Soit $\varepsilon > 0$. considérons la fonction f partout égale à 1 sur $[0,1]$, et g une fonction de E défine de la manière suivante :

   $$g(x) = \begin{cases} \frac{4x}{\varepsilon} - 1 & \text{si } x \in [0, \frac{\varepsilon}{2}[\\ 1 & \text{si } x \in [\frac{\varepsilon}{2}, 1] \end{cases}$$

   Pour rendre ce choix plus parlant, voici un dessin de la fonction g :

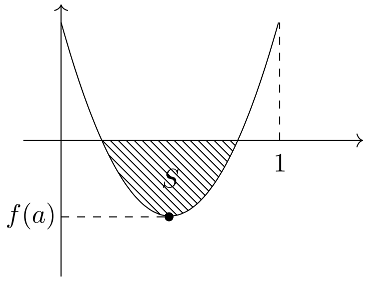


On a alors

$$\begin{aligned}\|f-g\|_1 &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left|\frac{4x}{\varepsilon}-2\right| \\ &= \left[2x-\frac{2x^2}{\varepsilon}\right]_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

donc $g \in B(f,\varepsilon)$ mais $g \notin O$. On en déduit que O n'est pas ouvert pour la distance induite par $\|.\|_1$.

2. Etudions $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\}$.
   (a) F est fermé pour la distance induite par $\|.\|_\infty$.
   Pour montrer cela, on va montrer que $E \setminus F = \{f \in E,\ \exists x\ [0,1],\ f(x) < 0\}$ est ouvert.
   Soit $f \in E\setminus F$. Soit $a \in [0,1]$ tel que $f(a) < 0$. On pose $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$. Montrons que $B(f,\varepsilon) \subset E\setminus F$.
   soit $g \in B(f,\varepsilon)$, on a
   $$\|g-f\|_\infty < \varepsilon$$
   et donc
   $$g(a) \leq f(a) + \varepsilon < 0$$
   on a alors $g \in B(f,\varepsilon)$ et donc $B(f,\varepsilon) \subset E \setminus F$. On en déduit finalement que $E \setminus F$ est ouvert, i.e. F est fermé pour la distance induite par $\|.\|_\infty$.
   (b) F est fermé pour la distance induite par $\|.\|_1$.
   On va procéder de la même manière qu'avant. Soit $f \in E \setminus F$. Soit $a \in [0,1]$ tel que $f(a) < 0$. Par continuité de f, il exsite $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$, $f(x) < \frac{f(a)}{2}$. Donc pour tout $g \in F$,
   $$\begin{aligned}\|f-g\|_1 &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \\ &\geq \int_{a-\eta}^{a+\eta} g(x)-f(x)dx \\ &\geq -\int_{a-\eta}^{a+\eta} f(x)dx \\ &\geq -\eta f(a)\end{aligned}$$
   En prenant donc $\varepsilon = -\eta f(a)$, on a $B(f,\varepsilon) \subset E \setminus F$ et donc $E \setminus F$ est ouvert, i.e. F est fermé pour la distance induite par $\|.\|_1$.
   Pour comprendre un peu ce qui se passe, considérons le cas où f est décrite par la courbe ci-dessous :



   La distance en norme 1 entre f et une fonction partout positive ou nulle va être au moins égale à la surface S hachurée sur la figure. Ici, on a minoré cette surface par $-\eta f(a)$ ce qui nous a permi de trouver une boule incluse dans $E \setminus F$ de centre f.

Correction de l'exercice IV.3. :

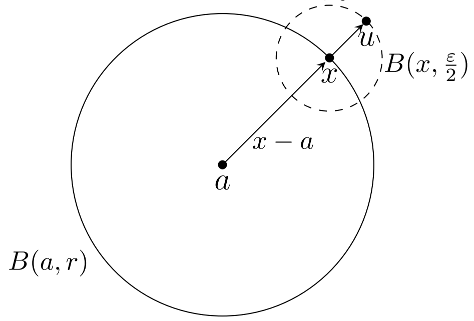
1. On a $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.
   Montrons ce résutat. Soit $x \in X$.
   (⊂) Supposons que $x \in Int(A \cap B)$. On dispose alors de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A \cap B$, i.e. $B(x,r) \subset A$ et $B(x,r) \subset B$ et donc $x \in Int(A)$ et $x \in Int(B)$. On a alors $x \in Int(A) \cap Int(B)$
   (⊃) Supposons que $x \in Int(A) \cap Int(B)$. On dispose alors de $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $B(x, r_A) \subset A$ et $B(x, r_B) \subset B$. En posant $r = \min\{r_A, r_B\} > 0$, on a $B(x,r) \subset A \cap B$ et finalement $x \in Int(A \cap B)$.
2. On a $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.
   Pour montrer ce résultat, on va commencer par supposer que $x \in Int(A) \cup Int(B)$. Sans perte de généralité, on suppose que $x \in Int(A)$, on dispose alors de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A \subset A \cup B$, donc $x \in Int(A \cup B)$.
   L'inclusion réciproque est fausse. Pour le voir, il suffit de prendre $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a $Int(\mathbb{Q}) = Int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$ et $Int((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \not\subset Int(\mathbb{Q}) \cup Int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Correction de l'exercice IV.4. :

On a $B(a,r) \subset B_f(a,r)$ et est ouvert, donc $B(a,r) \subset Int(B_f(a,r)) \subset B_f(a,r)$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour cela, nous allons montrer que $Int(B_f(a,r)) \setminus B(a,r) = \varnothing$. Supposons le contraire, on dispose alors de $x \in Int(B_f(a,r)) \setminus B(a,r) \subset B_f(a,r) \setminus B(a,r)$. On a alors nécessairement $\|x - a\| = r$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset B_f(a,r)$, posons $u = x + \varepsilon \frac{x-a}{2\|x-a\|}$. On a $u \in B(x, \varepsilon)$, mais

$$\begin{aligned}
\|a - u\| &= \left\| a - x + \varepsilon \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\| \\
&= \|x - a\| \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\,\|x-a\|} \right) \\
&= \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= r + \frac{\varepsilon}{2} > r
\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que $B(x, \varepsilon) \subset B_f(a,r)$. Donc finalement on a $Int(B_f(a,r)) = B(a,r)$. Pour comprendre l'intuition derrière le choix de u, jetons un coup d'oeil au dessin ci-dessous.



On souhaite sortir de la boule $B(a,r)$, donc à partir de x, on va se déplacer vers la direction opposée à l'origine, d'où la présence du vecteur directeur unitaire $\frac{x-a}{\|x-a\|}$, mais on veut rester dans $B(x, \varepsilon)$, on va donc multiplier ce vecteur "déplacement" par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Correction de l'exercice V.5. :

Il suffit de prendre $A = [0,1[\cup]1,2[\cup (]3,4[\cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$.
En effet, on a

→ $\mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[$

→ $\overline{\mathring{A}} = [0,2]$

→ $\overline{A} = [0,2] \cup [3,4] \cup \{5\}$

→ $\overset{\circ}{\overline{A}} =]0,2[\cup]3,4[$

→ $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} = [0,2] \cup [3,4]$

→ $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} =]0,2[$

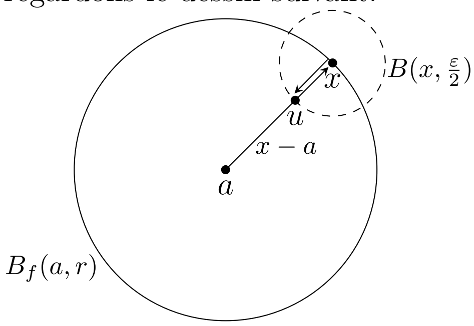
Tous ces ensembles sont bien deux à deux distincts.

Correction de l'exercice V.6. :

On va procéder d'une manière similaire à l'exercice 5. $\overline{B(a,r)}$ étant le plus petit fermé qui contient $B(a,r)$, on a $B(a,r) \subset \overline{B(a,r)} \subset B_f(a,r)$. Il reste donc à montrer l'inclusion réciproque.
Soit $x \in B_f(a,r) \setminus B(a,r)$. soit $\varepsilon > 0$, posons $u = x + \varepsilon \frac{a-x}{2\|a-x\|}$. On a

$$\begin{aligned}\|a-u\| &= \left\| a - x - \varepsilon \frac{a-x}{2\|a-x\|} \right\| \\ &= \|a-x\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|a-x\|}\right) \\ &= \|a-x\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= r - \frac{\varepsilon}{2} < r\end{aligned}$$

On suppose bien sûr ici que ε est suffisemment petit pour que $r - \frac{\varepsilon}{2}$ soit positif. On a donc $u \in B(a,r)$ et de même on a $\|x-u\| = \frac{\varepsilon}{2}$, donc $u \in B(x,\varepsilon)$ ce qui montre enfin que $B_f(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$ et finalement que $B_f(a,r) = \overline{B(a,r)}$.
Pour faire le lien avec l'exercice 5, regardons le dessin suivant.



Ici, aulieu de partir dans la direction du vecteur $x-a$, on a va vers la direction opposée puisqu'on veut rester dans la boule $B(a,r)$. Mais on veut aussi être dans la boule $B(x,\varepsilon)$, on multiplie alors pour cela le vecteur directeur $\frac{a-x}{\|a-x\|}$ par $\frac{\varepsilon}{2}$.

Correction de l'exercice V.7. :

1. Montrons que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

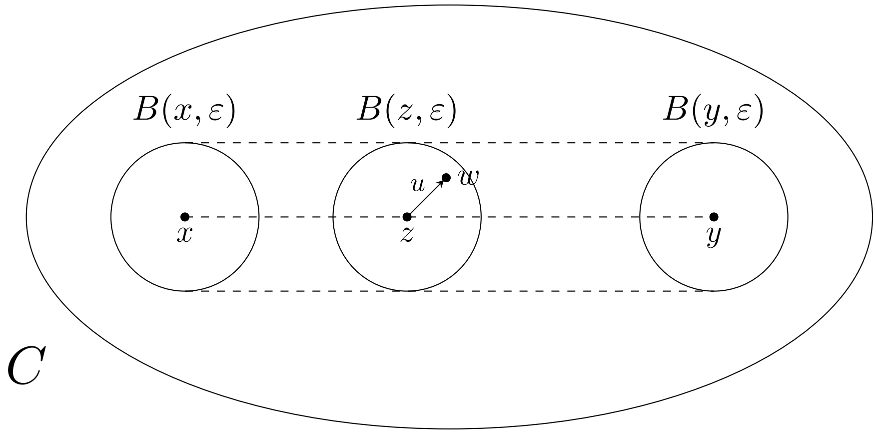
   → Convexité de $\overline{C}$
   Soit $x,y \in \overline{C}$. On dispose de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans C telles que

   $$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ et } y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

   Soit $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + (1-\lambda) y$, donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{C}$ et finalement $\overline{C}$ est convexe.

   → Convexité de $\overset{\circ}{C}$
   Soit $x,y \in \overset{\circ}{C}$. On dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset C$ et $B(y,\varepsilon) \subset C$ (quitte à prendre le

minimum des rayons des deux boules). Soit $\lambda \in [0,1]$, montrons que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathring{C}$. Pour cela, regardons d'abord le dessin suivant.



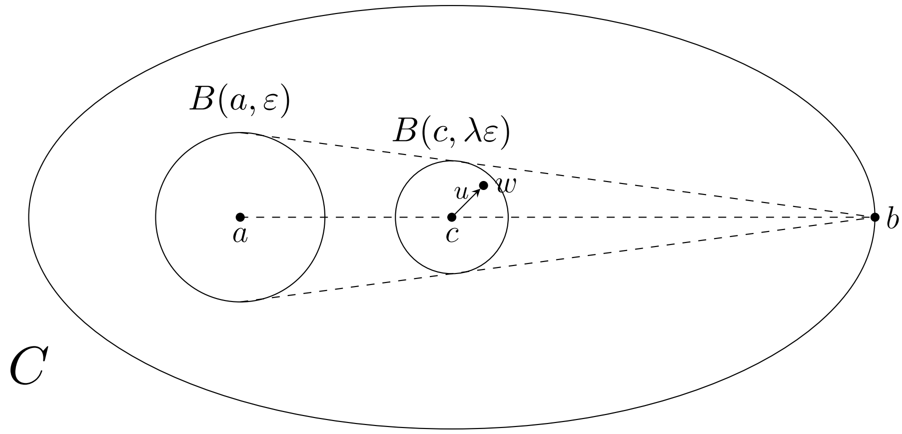
Le dessin ci-dessus suggère de montrer que $B(z,\varepsilon) \subset C$. Soit $w \in B(z,\varepsilon)$. Posons $u = w - z$, on a alors $w = z + u = \lambda(x+u) + (1-\lambda)(y+u)$, et

$$\|x + u - x\| = \|w - z\| < \varepsilon \text{ et } \|y + u - y\| = \|w - z\| < \varepsilon$$

on a alors $y + u \in B(y,\varepsilon) \subset C$ et $x + u \in B(x,\varepsilon) \subset C$. Or w est combinaison linéaire convexe de $x+u$ et $y+u$, donc par convexité de C, $w \in C$ et alors $z \in \mathring{C}$ et finalement $\mathring{C}$ est convexe.

2. Cette question est similaire à la question précédente. Soit $\lambda \in [0,1]$. On pose $c = \lambda a + (1-\lambda)b$. $a \in \mathring{C}$, donc on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset C$. Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à montrer puisque la question revient à montrer que $\varnothing \subset C$, on considère dorénavant donc que $\lambda \in]0,1]$

→ Commencons par le cas $b \in C$. Observons le dessin suivant.



Le rayon de la boule du milieu peut être trouvé en utilisant des théorèmes de géométrie élémentaire (Thalès par exemple). Ce dessin suggère de montrer que $B(c,\lambda\varepsilon) \subset C$.
Soit $w \in B(c,\lambda\varepsilon)$, on pose $u = w - c$. On a alors $w = c + u = \lambda(a + \frac{u}{\lambda}) + (1-\lambda)b$. Or

$$\left\|a + \frac{u}{\lambda} - a\right\| = \left\|\frac{w-c}{\lambda}\right\| < \varepsilon$$

donc $a + \frac{u}{\lambda} \in B(a,\varepsilon) \subset C$ et $b \in C$ et w est combinaison convexe de $a + \frac{u}{\lambda}$ et b, donc par convexité de C, $w \in C$ et alors $B(c,\lambda\varepsilon) \subset C$ et finalement $[a,b[\subset \mathring{C}$.

→ Passons au cas plus général où $b \in \overline{C}$.
On reprend les notations du cas où $b \in C$, et on considère une suite (b_n) à valeurs dans C qui tends vers b. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lambda a + (1-\lambda)b_n$. LaPreuve du cas $b \in C$ nous permet

d'affirmer que $B(c_n, \lambda\varepsilon) \subset C$. On a alors

$$\begin{aligned}\|w - c_n\| &= \|w - c + c - c_n\| \\ &\leq \|w - c\| + \|c - c_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|w - c\| < \lambda\varepsilon\end{aligned}$$

on peut alors affirmer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|w - c_n\| < \lambda\varepsilon$ et donc $w \in B(c_n, \lambda\varepsilon) \subset C$. Ceci nous permet de dire que $B(c, \lambda\varepsilon) \subset C$ et que $c \in \mathring{C}$. Finalement on conclut que $[a, b[\subset \mathring{C}$.
L'intuition derrière le passage au cas où $b \in \overline{C}$ était de prendre n assez grand pour que la boule $B(c_n, \lambda\varepsilon) \subset C$ soit quasi-confondue avec $B(c, \lambda\varepsilon)$ pour dire que tous les points de $B(c, \lambda\varepsilon)$ sont dans C.

Correction de l'exercice V.8. :

1. Cette question a été déjà faite dans la correction de l'exercice 3.

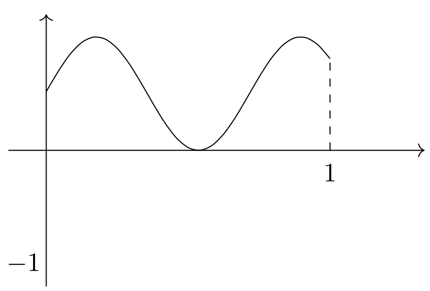
2. Trouvons $\mathring{F}$ pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

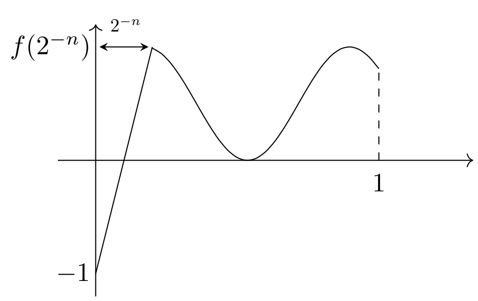
→ Pour $\|.\|_\infty$
On pose $O = \{f \in E,\ \forall x \in E,\ f(x) > 0\}$. On a d'après l'exercice 3, O est ouvert et $O \subset F$, donc $O \subset \mathring{F}$. Il reste donc à voir si $(F \setminus O) \cap \mathring{F} = \varnothing$.
Soit $f \in F \backslash O$ et soit $\varepsilon > 0$. Le fait que $f \in F \backslash O$ implique $\exists a \in [0, 1]$, $f(a) = 0$. En considérant $g = f - \frac{\varepsilon}{2}$, on peut voir immédiatement que $g \notin F$ (car $g(a) = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$) et $g \in B(f, \varepsilon)$. Donc $f \notin \mathring{F}$ et finalement $\mathring{F} = O$.

→ Pour $\|.\|_1$
Soit $f \in F$. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{-n}}(f(2^{-n}) + 1) - 1 & \text{si } x \in [0, 2^{-n}[\\ f(x) & \text{si } x \in [2^{-n}, 1] \end{cases}$$

Voici un dessin d'un terme de cette suite de fonctions à droite et de la courbe de f à gauche.





Bien sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bien une fonction continue sur $[0, 1]$. Il s'agit de la même idée que la question 1 de l'exercice 3 où on a montré que O n'est pas ouvert, sauf que la fonction considérée est f aulieu d'une fonction qui est indentiquement égale à 1 à laquelle on a ajouté une petite perturbation au voisinage de 0, qui fait sortir g_n de F sans trop s'éloigner de f. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = -1$, donc (g_n) est valeurs dans $E \setminus F$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|f - g_n\|_1 &= \int_0^1 |f(x) - g_n(x)|\, dx \\
&= \int_0^{2^{-n}} |f(x) - g_n(x)|\, dx \\
&\leq 2^{-n} \left(\|f\|_\infty + \|g_n\|_\infty\right) \\
&= 2^{-n}(\|f\|_\infty + \max\{1, f(2^{-n})\}) \\
&\leq 2^{-n}(\|f\|_\infty + \max\{1, \|f\|_\infty\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \not\subset F$. On conclut que $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction de l'exercice VI.4. :

1. Suppsons que $G \neq \{0\}$ et que A est vide. Alors nécessairement, on dispose de $x \in G$ tel que $x < 0$. Or $-x \in G$ et $-x > 0$ donc $-x \in A$ ce qui est absurde.
2. Supposons que $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etant donné que $\inf A = 0$, A contient des éléments aussi petits qu'on veut. Soit $\varepsilon > 0$, on dispose donc de $\theta \in A$ tel que $\theta < \varepsilon$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\theta \in G$. On a alors
$$\left|x - \left\lfloor \frac{x}{\theta} \right\rfloor \theta\right| = \left(\frac{x}{\theta} - \left\lfloor \frac{x}{\theta} \right\rfloor\right) \theta \leq \theta < \varepsilon$$
et $\left\lfloor \frac{x}{\theta} \right\rfloor \theta \in G$, donc on a trouvé un élément de G aussi proche qu'on veut de x, ce qui signifie que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Supposons que $a > 0$.
   → Montrons d'abord que $a \in G$.
   Supposons par l'absurde que $a \notin G$. On dispose alors de $b, c \in A$ tels que $b > c$ et $|b - a| \leq \frac{a}{4}$ et $|c - a| \leq \frac{a}{4}$. Donc on a
   $$\begin{aligned} b - c &= |b - a + a - c| \\ &\leq |b - a| + |a - c| \leq \frac{a}{2} \end{aligned}$$
   or $b - c \in A$, donc on a
   $$a < b - c \leq \frac{a}{2}$$
   ce qui est absurde, donc $a \in G$.

   → Montrons ensuite que $G = a\mathbb{Z}$.
   Par stabilité par addition et soustraction, on a évidemment $a\mathbb{Z} \subset G$.
   Supposons que $G \neq a\mathbb{Z}$. On dispose donc de $x \in G \setminus a\mathbb{Z}$. Quitte à passer à l'opposé, on suppose que $x > 0$. On a alors
   $$0 < x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a = a\left(\frac{x}{a} - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor\right) < a$$
   Donc $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in A$ et $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a < a$ ce qui est absurde. On en déduit donc que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Commencons par remarquer que par parité du cos, $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\}$.
   → Montrons d'abord que $G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   G est un sous groupe additif de R. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Il existe alors $n, m \in \mathbb{Z}^*$ tel que $1 = an$ et $2\pi = am$, donc, $\frac{2\pi}{1} = \frac{an}{am}$, i.e. $\pi = \frac{n}{2m}$ ce qui implique que π est rationnel, absurde. Donc d'après les questions précédentes, G est dense dans $\mathbb{R}$.

→ Montrons à présent que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
On a

$$B = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n), n \in G\}$$

Soit $x \in [-1, 1]$ et y un antécédant de x par cos. G étant dense dans $\mathbb{R}$, on dispose d'une suite (y_n) à valeurs dans G qui tend vers y. Donc la suite $(\cos(y_n))$ est valeurs dans B et tend vers x par continuité du cos. On en déduit donc que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est bien dense dans $[-1, 1]$.

5. Commencons par remarquer que $f(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}) = \{f(1)\}$ par périodicité de f. $\sqrt{2}$ étant irrationnel, on peut montrer comme on l'a fait pour $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ que $H = \mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on dispose d'une suite (x_n) à valeurs dans H telle que (x_n) converge vers x. On a donc par continuité de f

$$f(1) = f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

On en déduit donc que f est constante égale à $f(1)$.

Correction de l'exercice VI.6. :

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout i, $\Omega_i \neq \varnothing$ et considérons pour tout i, a_i un élément de Ω_i.
Posons $A = \{a_i,\ i \in I\}$, c'est un ensemble dénombrable. Montrons que A est dense dans X. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $J \subset I$ tel que $B(x, \varepsilon) = \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$, il suffit donc de prendre $i \in J$ pour voir que a_i est dans $B(x, \varepsilon) \cap A$. D'où la densité de A dans X.

($\Rightarrow$) Soit $A = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de X. Considérons la famille d'ouverts $(\Omega_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} = (B(a_n, \frac{1}{m+1}))_{n,m\in\mathbb{N}}$ et montrons qu'elle vérifie la propriété voulue.
Soit O un ouvert de X. Considérons l'ensemble $J = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ B(a_n, \frac{1}{m+1}) \subset O\}$.
On a $\bigcup\limits_{(n,m)\in J} \Omega_{n,m} \subset O$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in O$. Comme A est dense dans X, il existe $a_n \in A$ (avec $n \in \mathbb{N}$) et $m \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand tel que $x \in B(a_n, \frac{1}{m+1})$. On prend alors m assez grand pour qu'on ait $B(a_n, \frac{1}{m+1}) \subset O$, i.e. $(n, m) \in J$ ce qui nous donne $x \in \bigcup\limits_{(m,n)\in J} \Omega_{n,m}$.
On a donc bien obtenu le résultat voulu.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 22/11/2021 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.