CHAPITRE 11.3

# Limites et continuité

Dans tout ce chapitre, on considère $X$ et $Y$ deux espaces metriques respectivement munis des distances $d$ et $\delta$, $A$ une partie de $X$, $a \in \overline{A}$ et $f$ une fonction de $A$ dans $Y$.

## I Limites

**Définition I.1.**

On dit que $f$ admet une limite en $a$ selon $A$ lorsqu'il exsite $l \in Y$ tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U \cap A) \subset V\ (*)$$

**Remarques**

→ une formulation équivalente à la définition ci-dessous est la suivante.
$f$ admet une limite en $a$ selon $A$ s'il existe $l \in Y$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d(a,x) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x),a),l) < \varepsilon$$

→ La propriété $(*)$ est équivalente à

$$\forall V \in \mathcal{V}(l),\ f^{-1}(V) \cap A \in \{U \cap A,\ U \in \mathcal{V}(a)\}$$

**Proposition I.2.**

1. Si $f$ tends vers $l$ et $l'$, alors $l = l'$.
2. Si $f$ admet une limite $l$ en $a$ selon $A$ et $a \in A$, alors nécessairement $f(a) = l$.
3. Si $f$ admet une limite en a selon $A$, elle au bornée au voisinage de $a$ (dans $A$).

**Preuve**

1. Soit $l, l' \in Y$ telles que $f$ tends vers $l$ et $l'$ en $a$ selon $A$.Supposons que $l \neq l'$. Appliquons la définition de limite avec $\varepsilon = \frac{\delta(l,l')}{10}$. Il existe $\eta, \eta' > 0$ tel que
   → $\forall x \in A,\ d(a,x) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x),l) < \frac{\delta(l,l')}{10}$
   → $\forall x \in A,\ d(a,x) < \eta' \Longrightarrow \delta(f(x),l') < \frac{\delta(l,l')}{10}$
   On a alors pour tout $x \in A$ tel que $d(x,a) < \min(\eta, \eta')$
   $$\delta(l,l') < \delta(f(x),l) + \delta(f(x),l') < \frac{\delta(l,l')}{5}$$
   ce qui est absurde et finalement $l = l'$.
2. Si $a$ admet une limite en $a$ selon $A$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \ d(x,a) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x),l) < \varepsilon$. Or pour tout $\eta > 0$, $d(a,a) = 0 < \eta$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $d(f(a),l) < \varepsilon$ ce qui donne directement que $d(f(a),l) = 0$ et finalement $f(a) = l$.
3. Il suffit d'appliquer la définition avec $\varepsilon = 1$. En effet, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $d(x,a) < \eta \implies \delta(f(x),l) < 1$. Ceci implique que $f(A \cap B(a,\eta)) \subset B(l,1)$ qui est borné. $B(a,\eta)$ est un voisinage de $a$, donc $f$ est bien bornée au voisinage de $a$ dans $A$.

**Proposition I.3.**

Les propositions suivantes sont équivalentes

1. $f$ possède une limite en $a$ selon $A$.
2. Pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a$, la suite $(f(x_n))$ converge.

**Preuve**
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in B(a,\eta) \cap A$, $\delta(f(x), l) < \varepsilon$.
$(x_n)$ converge vers $a$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, a) < \eta$ et alors $\delta(f(x_n), l) < \varepsilon$.
On en déduit donc que $(f(x_n))$ converge vers $l$.
(2) $\Rightarrow$ (1)

$\to$ Montrons tout d'abord que toutes les suites de la forme $(f(x_n))$ avec $(x_n)$ une suite à valeurs dans $A$ convergeant vers $a$ convergent vers une même limite $l$.
Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites à valeurs dans $A$ convergeant vers $a$. A partir de ces deux suites, on construit la suite $(z_n)$ définie de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} z_{2n} = x_n \\ z_{2n+1} = y_n \end{cases}$
On a alors bien évidemment $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et alors par hypothèse $f(z_n)$ converge vers une limite qu'on notera $l$. En considèrant les deux suites extraites $(f(z_{2n+1})) = (f(y_n))$ et $(f(z_{2n})) = (f(x_n))$, on en déduit immédiatement que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ admettent la même limite que $(f(z_n))$.

$\to$ Il reste à montrer maintenant que la limite de $f$ en $a$ selon $A$ est bien $l$.
Supposons que $f$ ne converge pas vers $l$, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in B(a,\eta) \cap A,\ \delta(f(x), l) \geq \varepsilon$$

cette proposition peut être reformulée de la manière suivante

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \cap A,\ \delta(f(x), l) \geq \varepsilon$$

On peut alors construire une suite $(x_n)$ à valeurs dans $A$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n+1}$ et $\delta(f(x_n), l) \geq \varepsilon$.
En résumé, on a

- $(x_n)$ est une suite à valeurs dans $A$ qui converge vers $a$.
- Pour tout $n$, $\delta(f(x_n), l) \geq \varepsilon$ donc $(f(x_n))$ ne peut pas tendre vers $l$.

ce qui est absurde par hypothèse.

**Proposition I.4.**

Soit $B$ une partie de $Y$ et $Z$ un espace metrique. Si

$\to$ $a \in \overline{A}$ et $f$ est une fonction de $A$ dans $Y$ qui admet une limite $b$ en $a$ selon $A$.
$\to$ $b \in \overline{B}$ et $g$ est une fonction de $B$ dans $Z$ qui admet une limite $l$ en $b$ selon $B$
$\to$ $f(A) \subset B$

Alors $g \circ f$ admet la limite $l$ en $a$ selon $A$.

**Preuve :** soit $W \in \mathcal{V}(l)$.

$\to$ Il existe $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que $g(V \cap B) \subset W$.
$\to$ Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V$.

On a aussi $f(U \cap A) \subset f(A) \subset B$, donc $f(U \cap A) \subset V \cap B$ et alors $g \circ f(U \cap A) \subset W$.
En résumé, on a montré que

$$\forall W \in \mathcal{V}(l),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ g \circ f(U \cap A) \subset W$$

**Attention :** la condition $f(A) \subset B$ est nécessaire.
En effet, si on prend $A = \mathbb{R}^*$, $B = \mathbb{R}^*$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}$ tous munis de la distance induite par la valeur absolue. On considère le cas où

→ $f$ est une fonction de $A$ dans $Y$, définie par $\forall x \neq 0,\ f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

→ $g$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $Z$, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1_{x=0}$.

On a alors

→ $f$ admet une limite 0 en 0 selon $A = \mathbb{R}^*$.

→ $g$ admet une limite 0 en 0 selon $B = \mathbb{R}^*$

→ $f(A) = f(\mathbb{R}^*)$ contient 0 donc $f(A) \not\subset \mathbb{R}^* = B$.

Mais $g \circ f$ n'admet pas de limite en 0 selon $\mathbb{R}^*$. En effet, si on considère les suites à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2\pi n}\right)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)$, on a

→ $g \circ f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

→ $g \circ f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On en déduit donc que $g \circ f$ n'admet pas de limite en 0.

**Exercice I.5.**

Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Exercice I.6.**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$$

Montrer que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

# II Continuité

Dans cette partie, on considère que l'ensemble de départ de $f$ est $X$ et que $a \in X$. Nous nous allons donc dire "$f$ admet une limite $l$ en $a$" aulieu de "$f$ admet une limite $l$ en $a$ selon $X$" lorsqu'il n'y a pas ambigüité.

## 1. Continuité locale

**Proposition II.1.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $Y$. Les propositions suivantes sont équivalentes

1. $f$ admet une limite en $a$.
2. $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U) \subset V$
3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ d(a,x) < \eta \implies \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Lorsque $f$ vérifie l'une de ces propriétés, on dit que $f$ est continue en $a$.

**Preuve**
(1) ⇒ (2) Si $f$ admet une limite en $a$ selon $X$, alors nécessairement, d'après ce qui précéde, puisque $a \in X$, cette limite est égale à $f(a)$. Le point (2) est tout simplement l'application de la définition de limite pour $l = f(a)$.
(2) ⇒ (3) soit $\varepsilon > 0$. On considère le voisinage de $f(a)$, $B(f(a), \varepsilon)$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset B(f(a), \varepsilon)$. $U$ étant un voisinage de $a$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$. et alors on a $f(B(a, \eta)) \subset U$. En résumé,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ d(x,a) < \eta \implies \delta(f(x), a) < \varepsilon$$

(3) ⇒ (1) Il s'agit tout simplement de l'une des formulations du fait que $f$ admet une limite $f(a)$ en $a$ selon $X$.

**Proposition II.2.**

Les propositions suivantes sont équivalentes

1. $f$ est continue en $a$.
2. Pour tout suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies (f(x_n))$ converge.

**Remarques**
La composition de deux fonctions continues est continue.
lorsque $Y$ est un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$ et $\delta$ la distance induite par $\|.\|$, alors les opérations conservent la continuité :

→ La somme de deux fonctions continues est continue.

→ Lorsque $\|.\|$ est une norme d'algèbre, le produit de deux fonctions continues est cotninu.

**Exercice II.3.**

Soit $a, b$ deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée lorsque $f$ admet une limite à droite et à gauche en tout point de $[a, b]$. Par exemple, les fonctions monotones sont réglées.
Supposons que $f$ soit réglée. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est dénombrable.

## 2. Continuité globale

Commencons par énoncer un résultat qui sera utile par la suite.

**Lemme II.4.**

Les propositions suivantes sont équivalentes

1. $f$ est continue en $a$.
2. $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$

**Preuve**
(1) $\Rightarrow$ (2) Si $f$ est continue en $a$, alors par définition

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U) \subset V$$

et donc

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$$

or $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$ et finalement pour tout $V \in \mathcal{V}(f(a))$, on a $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$ car contient $U$ un voisinage de $a$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$, posons $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. On a $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$, d'où la continuité de $f$ en $a$.

**Proposition II.5.**

Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est continue en tout point de $X$.
2. Pour tout ouvert $\Omega$ de $Y$, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $X$.
3. pour tout fermé $F$ de $Y$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $X$.

**Preuve**
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $\Omega$ un ouvert de $Y$ et $x \in f^{-1}(\Omega)$. $\Omega$ est un ouvert contenant $f(x)$, donc $\Omega \in \mathcal{V}(f(x))$, alors par continuité de $f$ et le lemme précédent, $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}(x)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset f^{-1}(\Omega)$ et finalement $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $\varepsilon > 0$ et $b \in X$. Posons $\Omega = B(f(b), \varepsilon)$. Par hypothèse, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert et donc il existe $\eta > 0$ tel que $B(b, \varepsilon) \subset f^{-1}(\Omega)$, i.e. $f(B(b, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$, ce qui donne directement la continuité de $f$ en $b$, donc en tout point de $X$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $F$ un fermé de $Y$. $Y \setminus F$ est ouvert de $Y$, donc $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert et finalement $f^{-1}(F)$ est fermé.
(3) $\Rightarrow$ (2) Le sens réciproque peut être fait de la même manière et est laissé comme exercice au lecteur.

**Applications**

→ Si $f$ est une fonction continue de $X$ dans $Y$, alors pour tout $b \in Y$, $f^{-1}(\{b\})$ est fermé car $\{b\}$ est fermé.

→ Si de plus $Y = \mathbb{R}$, alors $\{x \in X,\ f(x) < 0\}$ est ouvert car est égal à $f^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $]-\infty, 0[$ est ouvert.

→ Si $Y$ est un espace vectoriel normé et $g$ une fonction continue de $X$ dans $Y$, alors l'ensemble où $f$ coincide avec $g$ est un fermé car il est égal à

$$\{x \in X\ f(x) = g(x)\} = \{x \in X\ (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\})$$

le fait que $f - g$ continue et $\{0\}$ est fermé permet de conclure.

**Exemple** (principe des prolongements des indentités)
Soit $E$ un espace vectoriel normé et $f, g \in \mathcal{C}(X, E)$. Si $f$ et $g$ coincident sur une partie $A$ dense dans $X$, alors $f = g$.
En effet, si $B$ est l'ensemble où $f$ coincide avec $g$, alors d'après le troisième point des application de la proposition précédente, $B$ est fermé. On a alors $A \subset B$ et donc $X = \overline{A} \subset \overline{B} = B$ car $B$ est fermé. On obtient donc que $B = X$ et que finalement $f = g$.

**Exercice II.6.**

Soit $f$ une fonction de $X$ dans $Y$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est continue en tout point de $X$.
2. Pour toute partie $A$ de $X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

**Exercice II.7.**

Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ un morphisme de groupe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est continue.
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x$
3. $f$ est continue en un point.
4. $f$ est continue en 0.
5. $f$ est bornée au voisinage de 0.

**Exercice II.8.**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de corps continu. Montrer que $f = Id$.

**Exercice II.9.**

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de corps continu. Montrer que $f = Id$ ou $f = (z \longmapsto \overline{z})$.

## 3. Homéomorphismes

**Définition II.10.**

Soit $f$ une application de $X$ dans $Y$. Si
- → $f$ est continue.
- → $f$ est bijective.
- → $f^{-1}$ est continue.

alors on dit que $f$ est un homéomorphisme de $X$ dans $Y$.

**Exemples**

→ Soit $E$ un $\mathbb{K}$−espace vectoriel normé et $(\lambda, a) \in \mathbb{K}^* \times E$. L'application $h_{\lambda,a} : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda x + a \end{cases}$ est un homéomorphisme.

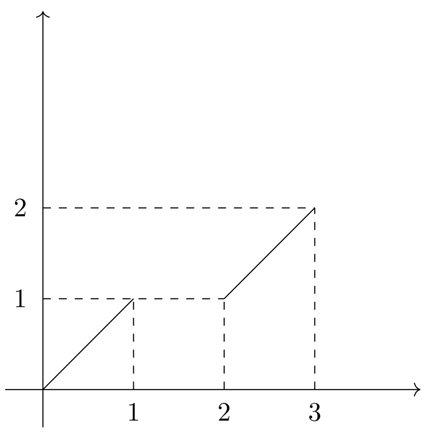
→ La fonction tangente est un homéomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

**Proposition II.11.**

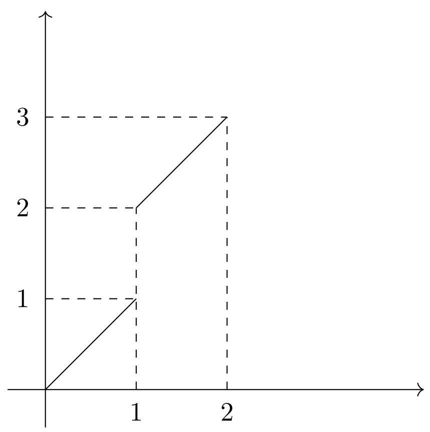
Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow J$ est une bijection continue, alors $f^{-1}$ est continue.

**Attention :** cette propriété n'est plus vraie lorsque $I$ et $J$ ne sont pas des intervalles. En effet, si on considère la fonction de $[0,1[\cup[2,3]$ dans $[0,2]$ $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, cette fonction est continue bijective mais sa bijection réciproque n'est pas continue.

Courbe de $f$




Courbe de $f^{-1}$




**Proposition II.12.**

Soient $\Omega$ et $\Omega'$ deux ouverts de $\mathbb{R}$. Si $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est une bijection continue, alors $f^{-1}$ est continue.

## 4. Applications lipschitziennes

**Définition II.13.**

Soit $f$ une application de $X$ dans $Y$. On dit que $f$ est lipschitzienne ou $k-$lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (x,y) \in X^2,\ \delta(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$$

**Exemples**

→ Soit $E$ un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$. l'application $x \longmapsto \|x\|$ est $1-$lipschitzienne. En effet, pour tout $x, y \in E$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

→ Soit $a \in X$. L'application $x \longmapsto d(a,x)$ est $1-$lipschitzienne. En effet, pour tout $x, y \in X$

$$|d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$$

**Exercice II.14.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est lipschitzienne.
2. $f'$ est bornée.

**Vocabulaire :** lorsque $f$ est lipschitzienne, on appelle rapport de lipschitzianité le nombre

$$k = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+,\ f \text{ est } \alpha-\text{lipschitzienne}\}$$

**Exercice II.15.**

Soit $A$ une partie non vide $X$. Posons pour tout $x \in X$

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

1. Montrer que pour tout $x \in X$, $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
2. Montrer que $x \longmapsto d(x, A)$ est $1-$lipschitzienne.
3. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux fermés disjoints non vides de $X$, alors il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$, et $U \cap V = \varnothing$.

**Exercice II.16.**

Soit $k \in \mathbb{R}^+$, $I$ un ensemble, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $k-$lipschitziennes. Supposons qu'il existe $a \in X$ tel que la famille $(f_i(a))_{i \in I}$ est majorée.

Montrer que $f : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sup\limits_{i \in I} f_i(x) \end{cases}$ est correctement définie et est $k-$lipschitzienne.

**Exercice II.17.**

Soit $A$ une partie de $X$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $k-$lipschitzienne. Posons pour tout $x \in A$

$$g(x) = \inf_{y \in A} (f(y) + kd(x,y))$$

Montrer que $g$ est $k-$lipschitzienne et que $g_{|A} = f$.

## 5. Uniforme continuité

**Définition II.18.**

Soit $f$ une application de $X$ dans $Y$. On dit que $f$ est uniformément continue lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Exemples**

→ Si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$, alors $f$ est uniformément continue d'après le théorème de Heine.

→ Si $f$ est une application de $X$ dans $Y$ $k-$lipschitzienne, alors $f$ est uniformément continue. LaPreuve de ce résultat est laissée comme exercice au lecteur.

**Attention :** il n'y a pas de réciproque pour le point précédent. Une fonction uniformément continue n'est pas nécessairement lipschitzienne.
En effet, il suffit de considérer la fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. C'est une fonction continue sur un segment, donc elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine.
Supposons que $f$ est lipschitzienne. On dispose alors de $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in ]0,1]$,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq k$$

i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$$

ce qui est absurde.

**Théorème (Heine) II.19.**

Une fonction $f$ continue sur un segment $[a,b]$ est uniformément continue.

**Preuve :** formulons tout d'abord la négation de l'uniforme continuité

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x, y \in [a,b],\ \ |x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Supposons donc cette proposition vérifiée. On dispose alors de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ $(*)$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. $(x_n)$ et $(y_n)$ étant à valeurs dans un fermé borné de $\mathbb{R}$, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permet d'affirmer l'existence d'une extractice $\varphi$ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge. De même, on dispose d'une extractrice $\psi$ telle que $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ soit convergente. L'inégalité $(*)$ impose que $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ admettent la même limite qu'on note $l$.
On a alors

$$\left| f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)}) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f(l) - f(l)| = 0$$

mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x_{\varphi\circ\psi(n)} - f(y_{\varphi\circ\psi(n)})\right| \geq \varepsilon > 0$, ce qui absurde, d'où l'uniforme continuité de $f$ sur $[a, b]$.

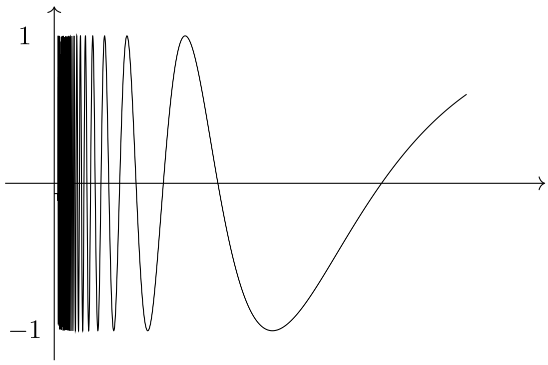
**Exercice II.20.**

Soit $A$ une partie de $X$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que $f$ admet une limite en tout point de $\overline{A}$.

**Exercice II.21.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $f : B_f(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que $f$ est bornée.

**Attention :** une application continue bornée n'est pas nécessairement uniformément continue.
En effet, considérons la fonction de $]0, 1]$ dans $[-1, 1]$, $f : x \longmapsto \cos(\frac{1}{x})$.




Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas uniformément continue. Montrons le.
Enoncons tout d'abord la négation de l'uniforme continuité.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in X^2,\ d(x, y) < \eta \text{ et } \delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

i.e., en adaptant cette proposition à notre problème,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in ]0, 1]^2,\ \ |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

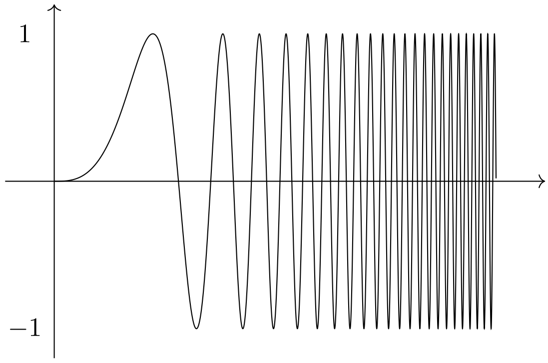
Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{2n\pi})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{(2n+1)\pi})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1$$

donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a pour tout $\eta > 0$, on peut prendre $n$ assez grand pour qu'on ait $|x_n - y_n| < \eta$ et $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geq \varepsilon$ ce qui montre bien la négation de l'uniforme continuité.
L'intuition derrière ce contrexemple est que $f$ oscille très rapidement au voisinage de 0 (voir figure ci-dessus), ce qui fait qu'on ne peut plus contrôler l'écart entre l'image de deux points assez proches.
Il existe une infinité d'autres contrexemples, on peut par exemple prendre la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ $x \longmapsto \sin(x^2)$




on peut prouver de la même manière la non uniforme continuité en prenant les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{(2n+\frac{1}{2})\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ici encore, on voit que la fonction oscille très vite au voisinage de $+\infty$ ce qui empêche la fonction d'être uniformément continue.

## 6. Extensions du théorème de Heine

**Exercice II.22.**

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ et $E = \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $T-$périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction de $E$ est uniformément continue.

**Exercice II.23.**

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0\}$. Montrer que toute fonction de $E$ est uniformément continue.

## Correction de l'exercice I.5. :

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(0,\eta)$

$$\left|\frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} - l\right| < \varepsilon$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $x \in B(0,\eta)$, alors $\frac{x}{2^k} \in B(0,\eta)$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{\frac{x}{2^k}} - l\right| < \varepsilon$$

i.e.

$$\left|\frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} - \frac{l}{2^k}\right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

En sommant toutes ces inégalités pour $k \in [\![0; n-1]\!]$ et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in B(0,\eta)$,

$$\left|\frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} - l\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{f(\frac{x}{2^{k+1}}) - f(\frac{x}{2^k})}{x} - \frac{l}{2^k}\right| < \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini, par continuité de $f$, l'inégalité ci-dessus devient

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2l\right| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2l$.

## Correction de l'exercice I.6. :

Soit $\varepsilon > 0$, $A > 1$ tel que pour tout $x \geq A - 1$,

$$L - \varepsilon \leq f(x+1) - f(x) \leq L + \varepsilon$$

Posons pour tout $x$, $n(x)$ l'unique entier vérifiant $A \leq x - n(x) < A + 1$. On a alors

$$L - \varepsilon \leq f(x - (n(x) - 1) + 1) - f(x - (n(x) - 1)) \leq L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon \leq f(x - (n(x) - 2) + 1) - f(x - (n(x) - 2)) \leq L + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$L - \varepsilon \leq f((x - 1 + 1) - f(x - 1) \leq L + \varepsilon$$

En sommant toutes les inégalités ci-dessous, on obtient

$$n(x)(L - \varepsilon) \leq f(x) - f(x - n(x)) \leq n(x)(L + \varepsilon)$$

et on a $x - n(x)$ est toujours dans $[A, A+1]$ où $f$ est bornée car continue, donc

$$\underbrace{\frac{n(x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} (L - \varepsilon) + \underbrace{\frac{f(x - n(x))}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{n(x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} (L + \varepsilon) + \underbrace{\frac{f(x - n(x))}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

On peut donc choisir $B > A$ de sorte à ce que pour tout $x > B$,

$$\left|\frac{f(x-n(x))}{x}\right| \leq \varepsilon \text{ et } L - 2\varepsilon \leq \frac{n(x)}{x}(L+\varepsilon) \leq L + 2\varepsilon$$

et donc pour tout $x > B$

$$L - 3\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq L + 3\varepsilon$$

On a donc bien montré que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ et que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$$

## Correction de l'exercice II.3. :

Posons pour tout $x \in [a,b]$ $f(x^+)$ et $f(x^-)$ respectivement la limite à droite et à gauche en $x$. Définissons les ensembles suivants.

- → $C$ est l'ensemble des points de discontinuité de $f$.
- → $A = \{x \in [a,b],\ \ |f(x^+) - f(x^-)| > 0\}$
- → Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = \left\{x \in [a,b],\ \ |f(x^+) - f(x^-)| \geq \frac{1}{p}\right\}$
- → $B = \{x \in [a,b],\ f(x^-) = f(x^+) \text{ et } f(x^+) \neq f(x)\}$
- → Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $B_p = \left\{x \in B,\ \ |f(x^+) - f(x)| \geq \frac{1}{p}\right\}$

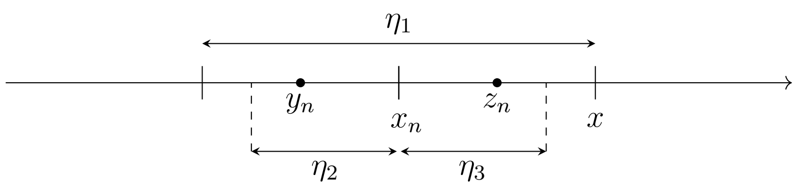
On a alors

$$C = B \cup A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} B_p \cup \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_p$$

On va montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p$ et $B_p$ sont finis. Une fois cela fait, on peut facilement conclure car on aura montré que $A$ et $B$ sont union dénombrable d'ensembles finis et donc qu'ils sont dénombrables. Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_p$ est infini. $A_p$ est infini borné en dimension finie, il possède donc un point d'accumulation qu'on note $x$. On dispose alors d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injective à valeurs dans $A$ qui converge vers $x$. Quitte à extraire de la suite $(x_n)$ on suppose sans perte de généralité qu'elle est croissante.

- → Soit $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in ]x-\eta_1, x[$, $|f(\alpha) - f(x^-)| < \frac{1}{4p}$
- → Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in ]x-\eta_1, x[$. On suppose aussi sans perte de généralité que $x \neq a$.
- → Soit $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in ]x_n-\eta_2, x_n[$, $|f(\alpha) - f(x_n^-)| < \frac{1}{4p}$
- → Soit $\eta_3 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in ]x_n, x_n+\eta_3[$, $|f(x_n^+) - f(\alpha)| < \frac{1}{4p}$
  Quitte à remplacer $\eta_2$ par $\min(|x_n - x|, \eta_2)$ et $\eta_3$ par $\min(|x_n - x + \eta_1|, \eta_3)$, on suppose que $\eta_2 \leq |x_n - x + \eta_1|$ et que $\eta_3 \leq |x_n - x|$ pour qu'on ait $]x_n-\eta_2, x_n[ \subset ]x-\eta_1, x[$ et $]x_n, x_n+\eta_3[ \subset ]x-\eta_1, x[$.
- → Soit $y_n, z_n \in [a,b]$ tels que $y_n \in ]x_n-\eta_2, x_n[$ et $y_n \in ]x_n, x_n+\eta_3[$.

Pour que tout cela soit plus clair, observons tous les paramètres qu'on vient de définir sur le dessin suivant :




On a

$$\begin{aligned} |f(y_n) - f(z_n)| &\geq \left|f(x_n^-) - f(x_n^+)\right| - \left|f(x_n^+) - f(z_n)\right| - \left|f(y_n) - f(x_n^-)\right| \\ &> \frac{1}{p} - \frac{1}{4p} - \frac{1}{4p} = \frac{1}{2p} \end{aligned}$$

et

$$|f(y_n) - f(z_n)| \leq \left|f(y_n) - f(x^-)\right| + \left|f(z_n) - f(x^-)\right| < \frac{1}{4p} + \frac{1}{4p} = \frac{1}{2p}$$

ce qui est absurde.
On va procéder de la même manière pour les ensembles $B_p$. Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_p$ est infini. $B_p$ est infini borné en dimension finie, il admet donc un point d'accumulation qu'on note $x$. On dispose alors d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injective à valeurs dans $B_p$ qu'on suppose sans perte de généralité, quitte à extraire, croissante.

→ Soit $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in ]x-\eta_1, x[$, $|f(\alpha) - f(x^-)| < \frac{1}{4p}$

→ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in ]x-\eta_1, x[$.

→ Soit $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in ]x_n-\eta_2, x_n+\eta_2[$, $|f(\alpha) - f(x_n^-)| < \frac{1}{2p}$
Quitte à remplacer $\eta_2$ par $\min(|x_n - x|, |x_n - x + \eta|, \eta_2)$, on suppose que $]x_n-\eta_2, x_n+\eta_2[ \subset ]x-\eta_1, x[$.

→ Soit $y_n \in ]x_n-\eta_2, x_n+\eta_2[$.

On a alors

$$\left|f(x_n) - f(x^-)\right| < \frac{1}{4p}$$

et

$$\begin{aligned}\left|f(x_n) - f(x^-)\right| &\geq |f(x_n) - f(y_n)| - \left|f(y_n) - f(x^-)\right| \\ &\geq \left|f(x_n) - f(x_n^-)\right| - \left|f(x_n^-) - f(y_n)\right| - \left|f(y_n) - f(x^-)\right| \\ &> \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{4p} = \frac{1}{4p}\end{aligned}$$

ce qui est absurde. On a donc bien obtenu le résultat voulu.
L'intuition derrière le fait que $A_p$ et $B_p$ soient finis est que lorsqu'on se rapproche par exemple par la gauche d'un point $x$ où $f$ admet une limite à gauche, on ne peut pas rencontrer un nombre infini de points de discontinuité de taille $\frac{1}{p}$ car sinon la fonction fera des pas trop grands pour tendre vers $f(x^-)$ à gauche de $x$.
**Remarque :** ici, $x$ n'est pas nécessairement dans $A$. On a juste eu besoin du fait que $f$ admet une limite à gauche de $x$.

## Correction de l'exercice II.6. :

(1) ⇒ (2) Supposons que $f$ est continue. Soit $x \in \overline{A}$. On dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ qui converge vers $x$. On a alors par continuité de $f$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $f(A)$ converge vers $f(x)$, i.e. $f(x) \in \overline{f(A)}$ et on a finalement $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
(2) ⇒ (1) Supposons que pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soit $F$ un fermé de $Y$. Posons $A = f^{-1}(F)$ et montrons que $A$ est fermé. Une fois cela fait, on peut aisément conclure que $f$ est continue d'après une propriété du cours.
On a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$, et donc $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$ i.e. $A$ est fermé.

## Correction de l'exercice II.7. :

(1) ⇒ (2) On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Lorsque $n \neq 0$, en remplacant $x$ par $\frac{x}{n}$, $f(x) = nf(\frac{x}{n})$, i.e. $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$.
On a alors pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$, et alors pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $x$. On utilise alors cette suite pour avoir le résultat suivant : $f(x_n) = x_n f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xf(1)$ et $f$ continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. En posant $\lambda = f(1)$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x$.

(2) ⇒ (3) Le résultat est évident car toutes les homothéties de $\mathbb{R}$ sont continues.
(3) ⇒ (4) idem.
(4) ⇒ (5) Il suffit d'appliquer la définition de la continuité en 0 avec $\varepsilon = 1$.
(5) ⇒ (1) Soit $\alpha > 0$ tel que $f$ est bornée sur $[-\alpha, \alpha]$ et posons $M = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |f(x)|$. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{n} < \varepsilon$. On a alors

$$f\left(\left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} f([-\alpha, \alpha]) \subset \left[-\frac{M}{n}, \frac{M}{n}\right] \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$$

ce qui nous donne la continuité de $f$ en 0. La continuité de $f$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ vient du fait que

$$f(y) = \underbrace{f(y-x)}_{\xrightarrow[y\to x]{} 0} + f(x) \xrightarrow[y\to x]{} f(x)$$

par continuité de $f$ en 0.

## Correction de l'exercice II.8. :

D'après l'exercice précédent, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $f = x \longmapsto \lambda x$. Or, $f$ étant un morphisme de corps, on a $f(1) = 1$, i.e. $\lambda = 1$ et alors $f = Id$

## Correction de l'exercice II.9. :

En utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour les deux exercices précedents, on peut montrer que pour tout nombre complexe $a+ib$, $f(a+ib) = a + f(i)b$. Il reste donc à déterminer la valeur de $f(i)$ pour déterminer $f$. On a $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$ et alors $f(i) \in \{i, -i\}$. On peut donc immédiatement en déduire que $f = Id$ ou $f = (z \longmapsto \overline{z})$.

## Correction de l'exercice II.14. :

(1) ⇒ (2) Posons $k \geq 0$ le rapport de lipschitziannité de $f$. on alors pour tout $a \in I$,

$$k \geq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \xrightarrow[x\to a]{} |f'(a)|$$

i.e.$f'$ est bornée par $k$.
(2) ⇒ (1) Supposons que $f'$ est bornée par $k$. Utilisons le théorème des accroissements finis. On a pour tout $x, y \in I$ différents, il existe $c \in I$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leq k\,|x-y|$$

## Correction de l'exercice II.15. :

1. On a
$$d(x, A) = 0 \iff \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ d(x, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff x \in \overline{A}$$

2. Il s'agit de l'inégalité triangulaire. Soit $x, y \in X$.
   On a pour tout $a \in A$, $d(y, A) \leq d(a, y) \leq d(x, a) + d(x, y)$ et alors en passant à la borne inférieure sur $a$ des deux côtés, on obtient
$$d(y, A) \leq d(x, A) + d(x, y)\ (1)$$
   de même, on a pour tout $a \in A$, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(y, a) + d(x, y)$ et alors en passant à la borne

inférieure des deux côtés on obtient

$$d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y) \ (2)$$

en combinant les inégalités (1) et (2), on obtient

$$-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

i.e.

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

3. Considèrons l'application $f : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto d(x, B) - d(x, A) \end{cases}$
   - $\rightarrow$ Si $x \in A$, on a $x \notin B = \overline{B}$, et alors $f(x) = d(x, B) > 0$. On alors $A \subset \{x \in X,\ f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = U$
   - $\rightarrow$ Si $x \in B$, on a $x \notin A = \overline{A}$, et alors $f(x) = -d(x, A) < 0$. On alors $B \subset \{x \in X,\ f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = V$

   $U$ et $V$ sont les images réciproques des ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ par une fonction continue (car lipschitzienne) et donc sont ouverts. De plus on a $U \cap V = \varnothing$, on a alors bien obtenu le résultat voulu.

## Correction de l'exercice II.16. :

Montrons tout d'abord que $f$ est bien définie, i.e. pour tout $i \in I$ et $x \in \mathbb{R}$, la famille $(f_i(x))_{i \in I}$ est majorée. Soit $M$ un majorant de $(f_i(a))_{i \in I}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $i \in I$,

$$f_i(x) - f_i(a) \leq k\,|x - a|$$

et alors

$$f_i(x) \leq k\,|x - a| + M$$

ce qui montre bien que $f$ est définie.
Montrons ensuite que $f$ est $k-$lipschitzienne. On a pour $i \in I$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq k\,|x - y|$$

i.e.

$$f_i(y) - k\,|x - y| \leq f_i(x) \leq f_i(y) + k\,|x - y|$$

On peut donc passer à la borne supérieure en $i$ de chaque côté de l'inégalité pour obtenir que

$$f(y) - k\,|x - y| \leq f(x) \leq f(y) + k\,|x - y|$$

i.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

## Correction de l'exercice II.17. :

- $\rightarrow$ Montrons que $g$ est bien définie et est $k-$lipschitzienne.
  Posons pour tout $y \in X$, $\varphi_y : x \longmapsto f(y) + kd(x, y)$. Toutes les fonctions $-\varphi_y$ sont $k-$lipschitziennes et par lipschitzianité de $-\varphi_y$ pour tout $y \in X$,

  $$-\varphi_y(0) = -(f(y) + kd(0, y)) \leq -f(0)$$

  donc la famille $(\varphi_y(0))_{y \in X}$ est majorée, et alors d'après l'exercice précédent, $h = \sup_{y \in X}(-\varphi_y)$ est bien définie et est $k-$lipschitzienne et donc de même pour $g = -h$.

→ Montrons que $g_{|A} = f$.
On a pour tout $x, y \in A$, $f(y) + kd(x,y) \geq f(x)$ (car $f$ est $k-$lipschitzienne). Ce minorant est atteint pour $y = x$, donc $\inf\limits_{y \in X} f(y) + kd(x,y) = f(x)$.

## Correction de l'exercice II.20. :

Soit $a \in \overline{A}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. On va montrer que la suite $(f(x_n))_{,\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de $f$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,

$$d(x,y) < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente et donc de Cauchy, on peut considérer $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \eta$.
On alors pour tout $n, m > N$, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, i.e. convergente. $f$ admet donc bien une limite en tout point de $\overline{A}$.

## Correction de l'exercice II.21. :

Supposons sans perte de généralité que $f(0) = 0$. Par uniforme continuité de $f$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in B_f(0,1)$, $\|x - y\| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 1$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} \leq \eta$. On a pour tout $x \in B_f(0,1)$,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left| f\left((k+1)\frac{x}{p}\right) - f\left(k\frac{x}{p}\right) \right|$$

Or on a pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, $\left\|(k+1)\frac{x}{p} - k\frac{x}{p}\right\| = \frac{\|x\|}{p} < \frac{1}{p} < \eta$ et alors

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left| f\left((k+1)\frac{x}{p}\right) - f\left(k\frac{x}{p}\right) \right| \leq p$$

donc $f$ est bornée sur $B_f(0,1)$.

## Correction de l'exercice II.22. :

$f$ est une fonction continue sur le segment $[-T, 2T]$ et y est donc uniformément continue. Montrons maintenant que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-T, 2T]$,

$$|x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \eta$. Quitte à remplacer $\eta$ par $\min(\eta, T)$, on suppose que $\eta \leq T$. On dispose alors de $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [-T, 2T]$ et $y - nT \in [-T, 2T]$. On a alors $|(x - nT) - (y - nT)| < \eta$ et donc

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| < \varepsilon$$

d'où l'uniforme continuité de $f$.
**Remarque :** on a choisi de regarder l'uniforme continuité de $f$ dans l'intervalle $[-T, 2T]$ et non pas $[0, T]$ pour éviter le cas pathologique où $x$ se retrouve sur les bords de l'intervalle $[0, T]$ et $y$ en dehors de cet intervalle, ce qui nous empêcherait de conclure car on pourra pas utiliser l'uniforme continuité de $f$ sur $[0, T]$.

## Correction de l'exercice II.23. :

Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq A \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
$f$ est uniformément continue sur $[-A, A]$ car continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < A$ et pour tout $x, y \in [-A, A]$, $|x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $|x - y| < \eta$, trois cas de présentent :

- $\rightarrow$ $x, y \in [-A, A]$, alors on a directement que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- $\rightarrow$ $x, y \in ]A, +\infty[$ ou $x, y \in ]-\infty, A[$, alors on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < 2\varepsilon$
- $\rightarrow$ $x \in [-A, A]$ et $y \notin [-A, A]$. On suppose sans perte de généralité que $x < A < y$. On a alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| \leq 3\varepsilon$

d'où l'uniforme continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 04/12/2021 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.