CHAPITRE 11.7

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$ et on pose $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de cet espace.

I Équivalence des normes

Proposition I.1.

Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve : Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. En posant $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $x = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in \mathbb{R}^n$,

$$N(x) = N(x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, N(\varepsilon_k) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} N(\varepsilon_k)\right) \|x\|_\infty$$

Et on a en posant $C = \sum_{k=1}^{n} N(\varepsilon_k)$ pour tout $x, y \in E$

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C \, \|x - y\|_\infty$$

N est donc lipschitzienne et alors continue pour $\|.\|_\infty$.
Posons $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_\infty = 1\}$. S est fermé et borné dans un espace de dimension finie pour $\|.\|_\infty$, c'est donc un compact d'après la proposition III.2 du chapitre 11.5. N étant continue, elle est bornée sur S et y atteint sa borne inférieure qu'on note α. Il existe alors $y \in S$ pour lequel pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq N(y) = \alpha > 0$$

et alors

$$\alpha \, \|x\|_\infty \leq N(x) \leq C \, \|x\|_\infty$$

On en déduit donc que tout norme N sur $\mathbb{R}^n$ est équivalent à $\|.\|_\infty$ et que donc par transitivité, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Corollaire I.2.

E étant isomorphe à $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve : Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorphisme et soit N_1 et N_2 deux normes sur E. Sur $\mathbb{R}^n$, les deux normes $N_1 \circ \varphi$ et $N_2 \circ \varphi$ sont équivalentes. Il existe donc $\beta, \gamma > 0$ tels que pour tout x

$$\gamma N_2(\varphi(x)) \leq N_1(\varphi(x)) \leq \beta N_2(\varphi(x))$$

Or φ étant surjective, pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = y$, on a donc pour tout $y \in E$,

$$\gamma N_2(y) \leq N_1(y) \leq \beta N_2(y)$$

N_1 et N_2 sont alors équivalentes.

II Suites et composantes

Proposition II.1.

Soit $(u_p) \in E^{\mathbb{N}}$, on pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \sum_{k=1}^{n} u_{p,k} e_k$ et soit $\|.\|$ une norme sur E. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. (u_p) converge pour $\|.\|$.
2. $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \exists l_k \in \mathbb{K},\ u_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_k$.

Dans ce cas, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{n} l_k e_k$.

Preuve : On pose pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $N(x) = \max_{k\in[\![1;n]\!]} |x_k|$. N est une norme sur E équivalente à $\|.\|$. On a alors

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (u_n) \text{ converge vers un certain } l = \sum_{k=1}^{n} l_k e_k \text{ pour } \|.\| \\
&\iff (u_n) \text{ converge vers un certain } l \text{ pour } N \\
&\iff \exists l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{K}^n,\ \max_{k\in[\![1;n]\!]} |u_{n,k} - l_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
&\iff \exists l \in E,\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ u_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_k \iff (2)
\end{aligned}$$

Application : Une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge si et seulement les suites de ses coefficients convergent.

Proposition II.2.

Soit X un espace métrique et A une partie de X. Soit $a \in \overline{A}$ et l'application

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k \end{cases}$$

Avec pour tout k, f_k une application de A dans E.
Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. f possède une limite finie en a selon A, notée l.
2. Chaque f_k possède une limite finie en a, notée l_k.

Preuve : La preuve est laissé comme exercice au lecteur.

III Compacité et complétude

Théorème (Bolzano Weierstraß) III.1.

Soit (u_p) une suite à valeurs dans E. Si (u_p) est bornée pour $\|.\|$, alors elle admet au moins une valeur d'adhérence.

Preuve : Posons pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, $N(x) = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|$.
N étant équivalente à $\|.\|$, donc (u_p) est aussi bornée pour N. Toutes les suites $(u_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$ sont alors bornées. Montrons par récurrence sur r la propriété suivante :

$$\text{il existe une extractrice } \varphi_r \text{ telle que pour tout } i \in [\![1;r]\!]\,, (u_{\varphi_r(p),i}) \text{ est convergence vers } l_i \in \mathbb{R}$$

La propriété pour $r = 1$ est vraie car il s'agit du théorème de Bolzano Weierstraß pour les suites réelles et complexes. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $r \in [\![1;n-1]\!]$. La suite $(u_{\varphi_r(p),r+1})$ est bornée, il existe alors une extractrice φ telle que $(u_{\varphi_r\circ\varphi(p),r+1})$ converge vers un certain l_{r+1}. On a alors pour tout $i \in [\![1;r+1]\!]$, $(u_{\varphi_r\circ\varphi(p),i})$ converge vers l_i. La propriété est alors vraie pour $r = n$ ce qui implique que, pour $\|.\|_\infty$, $(u_{\varphi_n(p)})$ converge vers $l = \sum_{k=1}^{n} l_k e_k$ et donc par équivalence des normes N et $\|.\|_\infty$, $(u_{\varphi_n(p)})$ converge vers l pour N, d'où le résultat voulu.

Corollaire III.2.

Les propositions suivantes sont vraies. Une partie A de E est compacte si elle est fermée et bornée.

Preuve : Soit $(u_p) \in A^{\mathbb{N}}$. (u_p) est bornée, le théorème précedent nous permet d'affirmer qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} a \in E$. A étant fermé, on a $a \in A$, d'où la compacité de A.

Proposition III.3.

L'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|)$ est complet.

Preuve : Soit $(u_p) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$,

$$\|u_m - u_n\| \leq 1$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\| \leq \max\{\|u_0\|\,, \ldots, \|u_{N-1}\|\,, \|u_N\| + 1\}$$

La suite (u_p) est bornée, donc d'après le théorème III.1, elle admet une suite extraite convergente. D'après la remarque à la fin de la page 4 du chapitre 11.5, toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, d'où le résultat voulu.

Corollaire III.4.

Soit (u_p) une suite à valeurs dans E.

$$\sum \|u_p\| \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_p \text{ converge}$$

Preuve : Supposons que $\sum \|u_p\|$ converge et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|u_p\| \leq \varepsilon$$

On a alors pour tout $m \geq n \geq N$,

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} u_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|u_k\| \leq \varepsilon$$

La suite $(U_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et E est complet, donc elle converge, d'où la convergence de la série $\sum u_p$.

Remarque : La propriété ci-dessus est en particulier vraie pour tout espace vectoriel normé complet.

Proposition III.5.

Soit A une partie fermée de E et $f : A \longrightarrow A$. Si f vérifie la propriété

$$\exists q \in]0,1[, \ \forall x, y \in A, \ \|f(x) - f(y)\| \leq q \|x - y\|$$

Alors f possède un unique point fixe dans A.

Preuve

→ Unicité
Soit l et l' deux éléments de A tels que $f(l) = l$ et $f(l') = l'$. On alors

$$q \|l - l'\| \geq \|f(l) - f(l')\| = \|l - l'\|$$

On a alors nécessairement $l = l'$.

→ Existence
Soit $a \in A$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On a alors pour tout $n > 1$,

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq q \|u_n - u_{n-1}\| \leq \cdots \leq q^n \|u_1 - u_0\|$$

On a $q \in]0,1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est alors convergence, et par conséquent $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_{n+1} - u_n\|$ est convergente. E étant complet, le corollaire III.4 nous permet donc d'affirmer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$ est convergente, i.e. (u_n) est convergente vers une limite qu'on note l. A est fermé donc $l \in A$ et en passant à la limite dans la relation de récurrence $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient par continuité de f que $l = f(l)$, d'où le résultat voulu.

Remarque : Pour démontrer le résultat ci-dessus, on n'a pas eu besoin du fait que E est de dimension finie. Il suffit que A soit complet.

Proposition III.6.

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(F, \|.\|)$, alors E est fermé.

Preuve : Soit (u_p) une suite à valeurs dans E qui converge vers $a \in F$. E est de dimension finie et (u_p) est convergente donc bornée dans E, il existe donc une extractrice φ telle que $u_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} b \in E$, or par unicité de la limite, $a = b \in E$, donc E est bien fermé.
Exemple : $\mathbb{R}_n[X]$ est fermé dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Théorème (Théorème de Riesz) III.7.

Soit $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. $B_f(0,1)$ est compacte si et seulement si F est de dimension finie.

Preuve : La preuve sera présentée sous forme d'exercice dans la suite du chapitre.

IV Fonctions polynômes sur $\mathbb{K}^n$

On rappelle ici que E est un espace vectoriel normé de **dimension finie** muni de la norme $\|.\|_E$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Définition IV.1.

Soit f une application de E dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{E} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de F. On dit que f est polynomiale dans la base $\mathcal{E}$, lorsqu'il existe une suite $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^n}$ avec un nombre fini de termes non nuls telle que pour tout $x = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in E$,

$$f(x) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$$

Proposition IV.2.

Soit F un espace vectoriel normé quelconque.

1. Toute application u linéaire de E dans F est continue.
2. Toute application f polynomiale dans une base de E à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.

Preuve

1. soit N une norme sur E définie de la manière suivante

$$\forall x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E,\ N(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

On alors pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$,

$$\|u(x)\|_F = \|x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)\|_F \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i|\,\|u(e_i)\|_F \leq CN(x)$$

Avec $C = \max_{k\in[\![1;n]\!]} \|u(e_k)\|_F$. Mais E est de dimension finie, donc N est équivalente à $\|.\|_E$, donc u est continue.

2. Posons pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$,

$$f(x) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, l'application $x \longmapsto x_k$ est continue, et f est somme et produit d'applications de cette forme qui sont toutes continues, donc f est continue.

Corollaire IV.3.

Toute application f multilinéaire de E^p dans un espace vectoriel normé F est continue.

Preuve : Considérons les p éléments de E suivants :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,1}e_1 + \cdots + x_{1,n}e_n \\ x_2 &= x_{2,1}e_1 + \cdots + x_{2,n}e_n \\ &\vdots \\ x_p &= x_{p,1}e_1 + \cdots + x_{p,n}e_n \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_p) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n x_{1,i_1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{2,i_2}e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n x_{p,i_p}e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1;n]\!]^p} x_{i_1}\dots x_{i_p} f(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) \end{aligned}$$

f est donc combinaison linéaire et produit d'applications de la forme $(x_1,\dots,x_p) \longmapsto x_{k,l}$ avec $(k,l) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]$. Toutes ces applications sont continues, donc f est continue.

V Exercices

Exercice V.1.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

Exercice V.2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \deg P = n \text{ et } P \text{ est scindé à racines simples}\}$. Montrer que Ω est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice V.3.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose que la suite $(\tilde{P}_k)$ de fonctions polynômes associée à (P_k) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice V.4.

Soit F un fermé non vide de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|)$ et soit $a \in E$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a, F)$.

Exercice V.5.

Soit F un sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(G, \|.\|)$ de dimension quelconque. Soit $a \in G$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a, F)$.

Exercice V.6.

Soit K un compact non vide de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant K et que cette boule est unique.

Exercice V.7.

Soit f une fonction continue de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|)$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f est minorée et qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = \min\limits_{x \in E} f(x)$.

Exercice V.8.

Ceci est un exercice visant à prouver le théorème III.7 (Théorème de Riesz).
Soit $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Soit G un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Montrer qu'il existe $a \in S(0,1)$ tel que $d(a, F) \geq 1$.
2. Construire une suite $(a_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \neq m,\ \|a_n - a_m\| \geq 1$.
3. Conclure.

Correction de l'exercice V.1. :

f est de classe $\mathcal{C}^n$, on peut alors appliquer l'égalité de Talor-Lagrange à l'ordre n pour f sur $[0,1]$

$$\forall(x,h)\in\mathbb{R}^+\times[0,1],\ \exists c_{x,h}\in[0,1],\ f(x+h)-f(x)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c_{x,h})=\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k}_{P_x(h)}$$

D'après les hypothèses, $(x,h)\longmapsto f(x+h)-f(x)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c_{x,h})$ est bornée par un certain $M>0$. On alors en posant $g_x : h\longmapsto f(x+h)-f(x)-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c_{x,h})$, on a par construction, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\|g_x\|_\infty\leq M$, et alors $\|P_x\|_\infty\leq M$. Posons pour tout $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$, $N(P)=\max\limits_{k\in[\![0;n]\!]}|a_k|$. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes. En particulier, N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes, ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe $M'>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $N(P_x)<M'$. On a donc pour tout

$$x\in\mathbb{R}^+,\ \forall k\in[\![1;n]\!],\ \left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right|<M'$$

Ce qui nous permet d'affirmer que pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

Correction de l'exercice V.2. :

Soit $P\in\Omega$. P admet n racines distinctes et est scindé à racine simples, il change donc $n+1$ fois de signe sur $\mathbb{R}$. Soit $y_1,\ldots,y_{n+1}\in\mathbb{R}$ tels que sans perte de généralité, pour tout $k\in[\![1;n+1]\!]$, $signe(P(y_k))=(-1)^k$. Posons pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, $N(Q)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}|Q(y_i)|$. N est bien une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$, car elle vérifie l'inégalité triangulaire, homogène, et pour tout polynôme Q de degré au plus n, $N(Q)=0\Longrightarrow Q=0$. Posons $\varepsilon=\min\limits_{k\in[\![1;n+1]\!]}|P(y_k)|$. Pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, si $N(P-Q)<\frac{\varepsilon}{2}$, alors pour tout $k\in[\![1;n+1]\!]$

$$|Q(y_k)-P(y_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

i.e.

$$P(y_k)-\frac{\varepsilon}{2}<Q(y_k)<P(y_k)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Mais pour tout $k\in[\![1;n+1]\!]$, $|P(y_k)|\geq\varepsilon$, donc

$$signe\left(P(y_k)+\frac{\varepsilon}{2}\right)=signe\left(P(y_k)-\frac{\varepsilon}{2}\right)=signe(P(y_k))$$

Donc pour tout $k\in[\![1;n+1]\!]$, $Q(y_k)$ a le même signe que $P(y_k)$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[y_k,y_{k+1}]$ pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, on trouve que Q, étant de degré n, admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. On en déduit donc que $B(P,\varepsilon)\subset\Omega$ et finalement que Ω est ouvert.

Correction de l'exercice V.3. :

Soit $x_0,x_1,\ldots,x_n$ des éléments deux à deux distincts de $[0,1]$. Posons pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$P_k(X)=\sum_{i=0}^{n}a_{k,i}X^i$$

On a alors pour tout $l\in[\![0;n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n}a_{k,i}x_l^i\xrightarrow[k\to+\infty]{}f(x_l)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

En posant

$$V = V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On remarque que V est une matrice de Vandermonde, elle est donc inversible. $X \longmapsto V^{-1}X$ est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue d'après la proposition IV.2. On a alors, en multipliant par V^{-1} et en passant à la limite

$$\begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} V^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

En posant pour tout $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $N(Q) = \sum_{i=0}^{n} |b_i|$, on voit que N est une norme dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$, elle est donc équivalente à $\|.\|_\infty : Q \longmapsto \sup_{x\in[0,1]} \tilde{Q}(x)$. D'après $(*)$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour N (chaque coefficient converge) et donc par équivalence des normes, (P_k) converge aussi pour $\|.\|_\infty$. $(\tilde{P}_k)$ converge donc uniformément vers une certaine fonction continue dans $[0,1]$ g. Il reste à montrer que $f = g$. La convergence uniforme implique la convergence simple, donc $(\tilde{P}_k)$ converge simplement vers f et g, et donc par unicité de la limite, $f = g$.

Remarque : l'espace des fonctions polynômes de degré au plus n étant de dimension finie, il est fermé dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Cet argument nous permet d'affirmer que (P_k) converge uniformément vers un polynôme de degré au plus n.

Une démonstration plus directe de ce résultat peut être faite de la manière suivante. Soit $a_0, \dots, a_n$ les limites respectives des suites de coefficients $(a_{k,0})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$. En posant $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on a

$$\left\|\tilde{P}_k - \tilde{P}\right\|_\infty \le \sum_{i=0}^{n} |a_{k,i} - a_i| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Correction de l'exercice V.4. :

Soit $R > d(a,F)$. On a $B_f(a,R) \cap F = K \neq \varnothing$ K est une intersection de deux fermés incluse dans l'ensemble bornée $B_f(a,R)$ en dimension finie, c'est donc une partie compacte de E. On considère la fonction

$$g : \begin{cases} K & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|a - x\| \end{cases}$$

g est continue sur le compact K, il y atteint donc son minimum en un élément de K qu'on note b.

Soit $y \in F$, $\begin{cases} \text{Si } y \notin K, \text{ alors} & \|y - a\| > R \ge \|a - b\| \\ \text{Si } y \in K, \text{ alors} & \|y - a\| \ge \|a - b\| \end{cases}$

On a donc bien $\|a - b\| = \min_{x\in F} \|a - x\| = d(a,F)$.

Correction de l'exercice V.5. :

Cet exercice se fait d'une manière identique au précédent. Soit $R > d(a,F)$ et $K = B_f(a,R) \cap F$. K est fermé borné inclus dans un espace de dimension finie F, c'est donc un compact. en reprenant les notations de l'exercice précédent, g est continue et donc atteint son minimum sur le compact K en un certain $b \in F$. Avec un raisonnement identique à l'exercice précédent, on peut affirmer que $\|a-b\| = d(a,F)$.

Correction de l'exercice V.6. :

Posons $S_K = \{\gamma \geq 0,\ \exists a \in \mathbb{R}^n,\ K \subset B_f(a,\gamma)\}$. K est borné, il existe donc une boule fermée contenant K. L'ensemble S_K est alors non vide, minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure $r = \inf S_K$.
Soit $((a_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ vérifiant les deux propriétés suivantes

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ K \subset B(a_n, r_n) \\ r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r \end{cases}$$

D'après les hypothèses, il existe N assez grand tel que pour tout $n \geq N$ on ait $r_n \leq r+1$. Soit $b \in K$. On a pour tout $n \geq N$,

$$\|a_n - b\| \leq r_n \leq r+1$$

et alors

$$\|a_n\| \leq r + 1 + \|b\|$$

La suite (a_n) est bornée, ce qui nous permet en utilisant le théorème III.1 d'affirmer que (a_n) admet une suite extraite convergente. Quitte à extraire de la suite (a_n), on suppose qu'elle est convergente vers un certain $a \in \mathbb{R}^n$.

→ Pour montrer l'existence de la boule, montrons que $K \subset B_f(a,r)$.
On a pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|a_n - x\| \leq r_n$. En passant à la limite, on obtient $\|a - x\| \leq r$, i.e. $x \in B_f(a,r)$. On a donc bien que $K \subset B_f(a,r)$.

→ Unicité de la boule
On sait que le rayon de la boule est unique car il est défini comme la borne inférieure de S_K, il suffit donc de montrer l'unicité du centre.
Soit $a' \in \mathbb{R}^n$ différent de a tel que $K \subset B_f(a',r)$. Soit $x \in B_f(a,r) \cap B_f(a',r)$, on a

$$\begin{aligned} 2r^2 \geq \|\underbrace{x-a}_{u}\|^2 + \|\underbrace{x-a'}_{v}\|^2 &= \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \\ &= 2\left(\left\|x - \frac{a+a'}{2}\right\|^2 + \underbrace{\left\|\frac{a-a'}{2}\right\|^2}_{\alpha}\right) \end{aligned}$$

En posant $b = \frac{a+a'}{2}$, on en déduit

$$\|x - b\| \leq \sqrt{r^2 - \underbrace{\alpha}_{>0}} < r$$

Donc $K \subset B_f(b, \sqrt{r^2-\alpha})$ ce qui est absurde par définition de r, d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice V.7. :

Le fait que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$ se réécrit

$$\forall M > 0\ \exists R > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| > R \Longrightarrow \|f(x)\| > M$$

Appliquons cette proposition à $M = |f(0)| + 1$. f est continue sur $B_f(0,R)$ qui est fermé borné en dimension finie donc compact, elle y atteint donc son minimum en un certain $a \in B_f(0,R)$.

Or pour tout $y \in E$

→ Si $\|y\| > R$, $f(y) > |f(0)| + 1 > f(a)$.

→ Sinon, par construction, $f(y) \geq f(a)$

Donc f atteint bien son minimum sur E en a.

Correction de l'exercice V.8. : *(Preuve du théorème de Riesz)*

1. Soit $a_0 \in F \setminus G$. L'exercice V.4 nous permet d'affirmer qu'il existe $b \in G$ tel que

$$\|a_0 - b\| = \inf_{x \in G} \|x - a_0\| = d(a_0, F)$$

Posons alors $a = \frac{b-a_0}{\|b-a_0\|} \in S(0,1)$, on a alors pour tout $x \in G$,

$$\begin{aligned} \|x - a\| &= \left\| x - \frac{a_0 - b}{\|a_0 - b\|} \right\| \\ &= \frac{1}{d(a_0, G)} \|\underbrace{b + x\,\|a_0 - b\|}_{=y \in G} - a_0\| \\ &= \frac{1}{d(a_0, G)} \|y - a_0\| \geq 1 \end{aligned}$$

2. Construisons la suite a_n par récurrence. le premier terme a_0 peut être pris quelconque vérifiant $\|a_0\| = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les termes $a_0, \ldots, a_n$ sont bien définis. Posons $G_n = Vect(a_0, \ldots, a_n)$. D'après la questions précédente, il existe $a_{n+1} \in S(0,1)$ tel que $d(a_{n+1}, G_n) \geq 1$. On a alors

$$\forall m \leq n,\ \|a_m - a_{n+1}\| \geq 1$$

Il est clair que la suite (a_n) telle qu'on l'a définie vérifie

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ (n \neq m \Longrightarrow \|a_n - a_m\| \geq 1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \|a_n\| = 1$$

3. Reprenons le théorème III.7. L'énoncé du théorème est le suivant : Si H un espace vectoriel normé, alors on a l'équivalence

$$H \text{ est de dimension finie} \iff \text{La boule unité fermée de } H \text{ est compacte}$$

→ $(\Leftarrow)$ nous allons faire cette implication par contraposée. Supposons que H soit de dimension infinie. La question précédente nous permet de considérer une suite $(a_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m \Longrightarrow \|a_n - a_m\| \geq 1$$

Si la boule unité était compacte, on disposerait d'une extractrice φ telle que $(a_{\varphi(n)})$ soit convergente, et alors

$$1 \leq \left\| a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)} \right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ce qui est absurde.

→ $(\Rightarrow)$ Si H est de dimension finie, alors la boule unité fermée de H est fermé bornée en dimension finie, elle est alors compacte.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 01/03/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.